Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

KÖN. PR. REGIERUNG ZU POTSDAM

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Achtzehnter Band.

In vier Heften.

Mit fünf Figurentafeln.

Berlin, 1838.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier), Libraire pour les Mathématiques etc Quai des Augustins No 55.

Inhaltsverzeichnifs
des achtzehnten Bandes, nach den Gegenständen.

Reine Mathematik.

1. Analysis.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
1.	Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale. Von Herrn Dr. *Gudermann* zu Münster.	I.	1
10.	Fortsetzung dieser Abhandlung.	II.	142
15.	Fortsetzung dieser Abhandlung.	III.	220
21.	Fortsetzung dieser Abhandlung.	IV.	303
2.	Mémoire sur quelques intégrales définies. Par Mr. *A. F. Svanberg* à Stockholm.	I.	55
3.	Zur Theorie der Kettenbrüche. Von Herrn Dr. Stern zu Göttingen. . .	I.	69
4.	Beiträge zur näherungsweisen Berechnung bestimmter Integrale nach der Methode der Quadraturen. Von Herrn Prof. *J. L. Raabe* in Zürich. . . .	I.	75
7.	Neuer Beweis der Zerlegbarkeit ganzer Functionen in reelle Factoren vom ersten oder zweiten Grade. Von Herrn *Ed. Collins*, Staatsrath und Mitglied der Akad. d. W. zu St. Petersburg. (Nach einer vor der Kaiserl. Akad. der W. zu St. Petersburg in deren Sitzung am $\frac{10}{22}$ten März 1837 gehaltenen Vorlesung neu bearbeitet.)	II.	119
16.	Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres. Par Mr. *Lejeune Dirichlet*, prof. à l'université de Berlin.	III.	259

2. Geometrie.

6.	Ueber Oberflächen zweiter Ordnung. Von Herrn Dr. *Hesse* zu Königsberg in Pr.	II.	101
8.	Auflösung der Aufgabe 1. (links) im Anhange des ersten Bandes der „Systematischen Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten etc." von J. Steiner. Von Herrn *Schaellibaum*, Privatlehrer zu Berlin.	II.	127
9.	Ueber die 44. Aufgabe im Anhange zum ersten Bande des Steinerschen Werkes: „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit etc." Von Demselben.	II.	134
11.	Einiges in Bezug auf den im II. Bande d. J. No. 63. S. 291. aufgestellten Lehrsatz. Von Hrn. Dr. *F. Heinen* zu Cleve.	II.	176
12.	Auflösung der 10. Aufgabe im Anhange zum 1. Bande des Steinerschen Werkes „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit etc." Vom Herrn *A. Kramer*, Stud. philos. zu Berlin.	II.	185

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
14.	Beweis der Lehrsätze 3. und 4. im 15. Bande S. 374 und 375 und Auflösung der Aufgabe 1. im 14. Bande S. 89 und S. 79 dieses Journals. Von Hrn. Dr. *A. R. Luchterhandt*, Gymnasial-Oberlehrer zu Marienwerder.	III.	213
17.	Ein polyedrischer Satz. Von Hrn. *C. Koppe* in Soest.	III.	275
19.	Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze. Von Hrn. Prof. *Steiner* zu Berlin. (Auszug aus einer am 1. December 1836 in der hiesigen Akademie der Wissenschaften gehaltenen Vorlesung.)	IV.	281
20.	Ueber die Biegung gewisser Flächen. Von Hrn. Dr. *Ferd. Minding* zu Berlin.	IV.	297
22.	Fortsetzung dieses Aufsatzes.	IV.	365

3. Mechanik.

13.	Ueber die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen. Von Hrn. Prof. *Möbius* zu Leipzig.	IV.	189

Aufgaben und Lehrsätze.

5.	Aufgaben. Von Herrn Dr. *Stern* zu Göttingen.	I.	100
18.	Aufgaben und Lehrsätze, erstere aufzulösen, letztere zu beweisen. Von Hrn. Prof. *Steiner* zu Berlin.	III.	278
23.	Aufgaben und Lehrsätze, erstere aufzulösen, letztere zu beweisen. (Fortsetzung der Sätze unter No. 18. d. Bandes.) Von Demselben.	IV.	369
	Von Hrn. Dr. *Stern* zu Göttingen.	IV.	375
	Formule générale d'intégration indéfinie. Par Mr. *Hill*, prof. à Lund. . .	IV.	376
	Druckfehler im 16ten Bande.	IV.	376

1.

Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale.

(Von Herrn Dr. *Gudermann* zu Münster.)

Einleitung.

Allgemeiner Charakter der Potenzial-Functionen.

§. 1.

Die Potenzial-Functionen, welche ich in einer frühern Schrift abgehandelt habe, erscheinen nur als besondere Formen der Modular-Functionen in weitester Bedeutung, und eine Folge dieses Verhältnisses ist die grofse Aehnlichkeit zwischen den beiden Hauptarten dieser periodischen Functionen; diese Aehnlichkeit mufs nicht nur, um dem Gedächtnisse zu Hülfe zu kommen, in der Bezeichnung berücksichtigt oder geltend gemacht, sondern überhaupt als ein Princip bei der Behandlung der Modular-Functionen betrachtet werden. Aus diesem Grunde werden wir zuerst den allgemeinen Charakter der Potenzial-Functionen ins Klare setzen, dann aber auch den allgemeinen Charakter der Modular-Functionen angeben, und ihn also jenem der besseren Unterscheidung wegen gegenüberstellen. Hierin nehmen wir zugleich den Weg der Erfindung, welchen der unsterbliche *Euler* betrat, als er unbewufst den Grund zu der Theorie der Modular-Functionen legte, welche durch die ruhmreichen Erfindungen von *Legendre, Abel* und *Jacobi* zu einem der wichtigsten Zweige der Mathematik erhoben worden ist.

Sind zwei veränderliche Zahlen v und w, deren hyperbolische Sinus x und y sein mögen, so beschaffen, dafs ihre Summe $v+w=u$, deren hyperbolischer Sinus z sein mag, eine unveränderliche Gröfse ist, so wird der arithmetische Zusammenhang zwischen den beiden veränderlichen Gröfsen x und y durch eine rationale und symmetrische Gleichung des zweiten Grades ausgedrückt, welche die *charakteristische Gleichung der hyperbolischen Sinus* genannt werden mag. Da nämlich $w=u-v$ ist, so ist nach Theil I. §. 10. $\mathfrak{Sin}\,w = \mathfrak{Sin}\,u\,\mathfrak{Cos}\,v - \mathfrak{Cos}\,u\,\mathfrak{Sin}\,v$, oder $y = z\sqrt{(1+x^2)} - x\sqrt{(1+z^2)}$, also $(y+x\sqrt{(1+z^2)})^2 = z^2(1+x^2)$, und

diese Gleichung reducirt sich auf

$$x^2+2xy\sqrt{(1+z^2)}+y^2=z^2,$$

welche die charakteristische Gleichung der hyperbolischen Sinus ist; sie ist rational und vom zweiten Grade in Ansehung der beiden veränderlichen Gröfsen x und y, auch ist sie symmetrisch, weil sie nicht geändert wird, wenn man darin x und y mit einander vertauscht.

Für die cyklischen Sinus $x=\sin v$ und $y=\sin w$ erhält man in ähnlicher Weise die Gleichung

$$x^2+2xy\sqrt{(1-z^2)}+y^2=z^2,$$

welche sich aber aus der vorigen herleiten läfst, indem man xi für x, yi für y und zi für z setzt, und unter i, wie im Nachfolgenden immer $\sqrt{-1}$ versteht.

Was so eben in Ansehung der Sinus gezeigt worden ist, läfst sich auch leicht als richtig nachweisen in Ansehung der Cosinus, der Tangenten und Cotangenten; daher besteht der allgemeine Character der Potenzial-Functionen darin, *dafs der arithmetische Zusammenhang unter zwei gleichnamigen Functionen, deren Argumente oder Arcus eine unveränderliche Summe ausmachen, durch eine symmetrische und rationale Gleichung des zweiten Grades ausgedrückt werden kann.*

Zusatz. Setzt man in einer solchen Gleichung $m+nx$ für x und $m+ny$ für y, und ordnet man dieselbe wieder nach den Potenzen von x und y, so bleibt sie vom zweiten Grade, auch ist sie dann wieder symmetrisch in Ansehung der neuen Gröfsen x und y, und hat die Form

$$A(x^2+y^2)+2B.xy+2C(x+y)+D=0.$$

§. 2.

Das vorige allgemeine Theorem kann auch umgekehrt werden und heifst dann also: *Wird der arithmetische Zusammenhang unter zwei gleichnamigen Functionen durch eine symmetrische Gleichung des zweiten Grades ausgedrückt, so sind diese entweder Potenzial-Functionen, deren veränderliche Arcus eine unveränderliche Summe ausmachen, oder sie sind arithmetische Formen des ersten Grades, welche aus solchen gleichnamigen Potenzial-Functionen, deren Arcus eine unveränderliche Summe ausmachen, in gleicher Weise gebildet sind.*

Nehmen wir z. B. die Gleichung

$$x^2+2xy\sqrt{(1+z^2)}+y^2=z^2,$$

welche in Ansehung der beiden veränderlichen Gröfsen x und y symmetrisch und vom zweiten Grade ist, und differenziiren wir dieselbe, wodurch wir, weil z unveränderlich sein soll, erhalten

$$(y+x\sqrt{(1+z^2)}).\partial y+(x+y\sqrt{(1+z^2)}).\partial x=0,$$

oder

$$\frac{\partial y}{x+y\sqrt{(1+z^2)}}+\frac{\partial x}{y+x\sqrt{(1+z^2)}}=0,$$

so kann diese Differenzial-Gleichung leicht als eine separirte dargestellt werden; lösen wir nämlich die vorgelegte Gleichung nach x und y auf, wodurch wir

$$y=z\sqrt{(1+x^2)}-x\sqrt{(1+z^2)}, \qquad x=z\sqrt{(1+y^2)}-y\sqrt{(1+z^2)},$$

oder auch $y+x\sqrt{(1+z^2)}=z\sqrt{(1+x^2)}$ und $x+y\sqrt{(1+z^2)}=z\sqrt{(1+y^2)}$ erhalten, und substituiren wir diese Ausdrücke in der vorigen Differenzial-Gleichung, so verwandelt sie sich in

$$\frac{\partial y}{z\sqrt{(1+y^2)}}+\frac{\partial x}{z\sqrt{(1+x^2)}}=0, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial y}{\sqrt{(1+y^2)}}+\frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^2)}}=0,$$

und nach Theil I. §. 18. ist das Integral dieser Gleichung

$$\mathfrak{Arc\,Sin}\,(y)+\mathfrak{Arc\,Sin}\,(x)=\text{const.}$$

Wir fügen noch ein Beispiel hinzu, indem wir die symmetrische Gleichung

$$x+y-z.xy=z$$

behandeln, welche wegen des Productes $x.y$ der beiden veränderlichen Gröfsen x und y als eine Gleichung des zweiten Grades anzusehen ist. Geben wir jener Gleichung zuerst die Form

$$z=\frac{x+y}{1+xy},$$

so erhalten wir durch Differenziiren auf der Stelle $0=\partial y(1-x^2)+\partial x(1-y^2)$, oder

$$\frac{\partial y}{1-y^2}+\frac{\partial x}{1-x^2}=0,$$

und das Integral dieser Gleichung ist $\mathfrak{Arc\,Tang}\,(y)+\mathfrak{Arc\,Tang}\,(x)=\text{const.}$

Zusatz. Die allgemeinste Gleichung

$$\alpha(x^2+y^2)+2\beta xy+2\gamma(x+y)+\delta=0$$

verwandelt sich, wenn $x=m+nx'$ und $y=m+ny'$ subsituirt wird, in eine ähnliche Gleichung

$$\alpha'(x'^2+y'^2)+2\beta' x'y+2\gamma'(x'+y')+\delta'=0,$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$\alpha'=\alpha n^2,\ \beta'=\beta n^2,\ \gamma'=n(m\alpha+m\beta+\gamma),\ \delta'=\delta+4m\gamma+2\beta m^2+2\alpha m^2;$$

wird nun $m = -\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$ genommen, wodurch $\gamma' = 0$ und $\delta' = \delta - \frac{2\gamma^2}{\alpha+\beta}$ wird, so hat man die einfachere characteristische Gleichung

$$\alpha'(x'^2+y'^2)+2\beta' x'y'+\delta' = 0$$

für die beiden veränderlichen Gröfsen x' und y'. Behandelt man diese Gleichung wie vorhin, so findet man die separirte Differenzial-Gleichung

$$\frac{\partial y'}{\sqrt{[(\beta'^2-\alpha'^2)y'^2-\alpha'\delta']}}+\frac{\partial x'}{\sqrt{[(\beta'^2-\alpha'^2)x'^2-\alpha'\delta']}} = 0.$$

Wird nun n so bestimmt, dafs $\frac{\alpha'\delta'}{\beta'^2-\alpha'^2} = \pm 1$ wird, wodurch man erhält

$$n = \sqrt{\frac{\pm\alpha\left(\delta-\frac{2\gamma^2}{\alpha+\beta}\right)}{\beta^2-\alpha^2}},$$

so erhält die vorige Differenzial-Gleichung eine von den drei Formen:

$$\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y'^2)}}+\frac{\partial x'}{\sqrt{(1-x'^2)}} = 0, \qquad \frac{\partial y'}{\sqrt{(1+y'^2)}}+\frac{\partial x'}{\sqrt{(1+x'^2)}} = 0,$$

$$\frac{\partial y'}{\sqrt{(y'^2-1)}}+\frac{\partial x'}{\sqrt{(x'^2-1)}} = 0,$$

und das Integral ist also entweder $\arcsin(y')+\arcsin(x') = \text{const.}$, oder $\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Sin}(y')+\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Sin}(x') = \text{const.}$ oder $\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Cos}(y')+\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Cos}(x') = \text{const.}$ Hierbei wird vorausgesetzt, dafs α nicht $= 0$ sei; ist $\alpha = 0$, so ist die Nachweisung noch einfacher.

Erster Abschnitt.

Allgemeiner Charakter der Modular-Functionen.

§. 3.

Der allgemeine Charakter der Modular-Functionen besteht darin, dafs der arithmetische Zusammenhang unter zwei gleichnamigen solchen Functionen, deren Argumente eine unveränderliche Summe ausmachen, durch eine rationale und symmetrische Gleichung des vierten Grades ausgedrückt wird, die aber in Ansehung der einzelnen Functionen selbst nur vom zweiten Grade ist.

Die allgemeinste Gleichung des vierten Grades zwischen den Gröfsen x und y hat die Form:

$$A+Bx+B'y+Cxy+Dx^2+D'y^2+Ex^2y+E'xy^2+Fx^2y^2+Gx^3 + G'y^3+Hx^3y+H'xy^3+Ix^4+I'y^4 = 0;$$

sie enthält die Potenzen x^3, y^3, x^4 und y^4, welche der Annahme gemäfs

in ihr nicht vorkommen sollen; lassen wir aber die Glieder weg, welche diese Potenzen enthalten, so zieht sich die Gleichung zusammen auf:

$$A+Bx+B'y+Cxy+Dx^2+D'y^2+Ex^2y+E'xy^2+Fx^2y^2=0,$$

welche nur noch in Hinsicht auf das Glied $F.x^2y^2$ vom vierten Grade ist. Soll diese Gleichung unverändert bleiben, wenn darin x mit y vertauscht wird, so mufs $B'=B$, $D'=D$ und $E'=E$ sein und es kann daher die Gleichung also dargestellt werden:

$$A+B(x+y)+Cxy+D(x^2+y^2)+Exy(x+y)+Fx^2y^2=0.$$

Die gefundene Gleichung hat noch eine überflüssige Allgemeinheit; sie pafst nicht nur auf allgemeine Modular-Functionen selbst, sondern auch auf arithmetische Ausdrücke, welche aus gleichnamigen Modular-Functionen der Argumente v und w von unveränderlicher Summe $u=v+w$ in gleicher Weise gebildet sind.

In der charakteristischen Gleichung der hyperbolischen oder auch cyklischen Sinus wird kein Glied geändert, wenn man darin $-x$ für x und gleichzeitig $-y$ für y setzt; wollen wir daher solche Functionen finden, welche, wie die genannten Potenzial-Functionen einen gleich grofsen aber entgegengesetzten Werth erhalten, wenn statt ihres Arguments ein gleich grofses entgegengesetztes genommen wird, so nehmen wir an, dafs die Gröfsen A, B, C, D, E, F sich ebenfalls nicht ändern, wenn darin $-x$ für x, $-y$ für y und $-z$ für z gesetzt wird; da sich aber die Gleichung

$$A+B(x+y)+Cxy+D(x^2+y^2)+Exy(x+y)+Fx^2y^2=0,$$

durch die angezeigte Aenderung verwandelt in

$$A-B(x+y)+Cxy+D(x^2+y^2)-Exy(x+y)+Fx^2y^2=0,$$

so mufs $B=0$ und $E=0$ sein, wenn die beiden Gleichungen übereinstimmen sollen, und wir haben also die einfachere Gleichung:

$$A+C.xy+D(x^2+y^2)+Fx^2y^2=0,$$

welche auf solche drei gleichnamige Modular-Functionen $x=\varphi(v)$, $y=\varphi(w)$ und $z=\varphi(v+w)=\varphi(u)$ pafst, welche mit den cyklischen oder hyperbolischen Sinus Aehnlichkeit haben, nämlich mit ihrem Argumente zugleich verschwinden, und einen gleich grofsen negativen Werth erhalten, wenn statt ihres Arguments ein gleich grofses negatives genommen wird.

Da für $v=0$ der Gleichung $v+w=u$ gemäfs $w=u$, also $x=0$ und $y=z$ wird, so können wir die Form der vorigen Gleichung sogleich

noch näher bestimmen, indem wir darin $x = 0$ und $y = z$ (oder $y = 0$ und $x = z$) setzen, wodurch $A = -Dz^2$ gefunden wird. Wird dieser Werth substituirt, die Gleichung dann durch D dividirt, so erhält sie die Form

$$y^2 + 2mxy + x^2 + nx^2y^2 = z^2.$$

Das Glied nx^2y^2 ist das einzige in dieser Gleichung, welches wegen des Productes x^2y^2 von der vierten Dimension ist, und die Gleichung selbst ist also nur in Hinsicht darauf vom vierten Grade; fehlte dieses Glied und wäre also $n = 0$, so wäre die Gleichung $y^2 + 2mxy + x^2 = z^2$ die charakteristische Gleichung der cyklischen oder hyperbolischen Sinus, wenn m entweder $= \sqrt{(1 - z^2)}$ oder $m = \sqrt{(1 + z^2)}$ wäre, und für andere Werthe von m liefse sich nun ein constanter Factor r finden, dergestalt, dafs rx, ry und rz cyklische oder hyperbolische Functionen wären.

Zusatz. Die allgemeine Gleichung $A' + B'(x' + y') + C'.x'y' + D'(x'^2 + y'^2) + E'x'y'(x' + y') + F'.x'^2y'^2 = 0$ läfst sich durch die Substitutionen

$$x' = \frac{p + qx}{1 + rx} \quad \text{und} \quad y' = \frac{p + qy}{1 + ry},$$

oder auch schon durch die Substitutionen $x' = p + qx$ und $y' = p + qy$ in eine ähnliche Gleichung

$$A + B(x + y) + Cxy + D(x^2 + y^2) + Exy(x + y) + Fx^2y^2 = 0$$

umformen, und die drei Constanten p, q, r im ersten oder die beiden Constanten p und q im zweiten Falle lassen sich dann so bestimmen, dafs $B = 0$ und $E = 0$ wird, wodurch die Gleichung die vorhin erwähnte einfachere Form erhält.

§. 4.

Wird die gefundene Gleichung $x^2 + 2mxy + y^2 + nx^2y^2 = z^2$, in welcher $x = \Phi(v)$, $y = \Phi(w)$, $z = \Phi(u)$ und $u = v + w$ ist, differenziirt, indem man u und also auch z als unveränderlich ansieht; so erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial x}{y + mx + nyx^2} + \frac{\partial y}{x + my + nxy^2} = 0.$$

Um in dieser Gleichung die veränderlichen Gröfsen zu trennen, löst man die ursprüngliche Gleichung nach x und y auf; hierdurch erhält man ohne alle Zweideutigkeit

$$y = \frac{-mx + \sqrt{[z^2 + (m^2 - 1 + nz^2)x^2 - nx^4]}}{1 + nx^2}$$

und

$$x = \frac{-my + \sqrt{[z^2 + (m^2 - 1 + nz^2)y^2 - ny^4}}{1 + ny^2},$$

weil für $x=0$ mufs $y=+z$ und für $y=0$ mufs $x=+z$ werden. Die in diesen Formeln enthaltenen Wurzelausdrücke sind also:

$$\sqrt{(z^2+(m^2-1+nz^2)x^2-nx^4)} = y+mx+nx^2y$$

und

$$\sqrt{(z^2+(m^2-1+nz^2)y^2-ny^4)} = x+my+nxy^2,$$

und werden sie in der obigen Differenzial-Gleichung substituirt, so verwandelt sie sich in die separirte

$$\frac{\partial x}{\sqrt{[z^2+(m^2-1+nz^2)x^2-nx^4]}} + \frac{\partial y}{\sqrt{[z^2+(m^2-1+nz^2)y^2-ny^4]}} = 0.$$

Die biquadratische Form

$$z^2+(m^2-1+nz^2)x^2-nx^4 \quad \text{oder} \quad z^2\left(1+\frac{m^2-1+nz^2}{z^2}x^2-\frac{n}{z^2}\cdot x^4\right)$$

kann leicht in zwei quadratische Factoren (reelle oder imaginäre) zerfällt werden; setzt man aber

$$z^2+(m^2-1+nz^2)x^2-nx^4 = z^2(1+px^2)(1+qx^2),$$

so ist auch

$$z^2+(m^2-1+nz^2)y^2-ny^4 = z^2(1+py^2)(1+qy^2),$$

und die Differenzial-Gleichung verwandelt sich in

$$\frac{\partial x}{\sqrt{[(1+px^2)(1+qx^2)]}} + \frac{\partial y}{\sqrt{[(1+py^2)(1+qy^2)]}} = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit einem noch näher zu bestimmenden constanten Factor g, und setzt man

$$1. \quad \begin{cases} v = \int_0 \frac{g\,\partial x}{\sqrt{[(1+px^2)(1+qx^2)]}}, \\ w = \int_0 \frac{g\,\partial y}{\sqrt{[(1+py^2)(1+qy^2)]}}, \\ u = \int_0 \frac{g\,\partial z}{\sqrt{[(1+pz^2)(1+qz^2)]}}, \end{cases}$$

so ist die Differenzial-Gleichung $\partial v+\partial w=0$ und ihr Integral

$$2. \quad v+w = \text{const.},$$

die Summe u der Argumente v und w ist also unveränderlich.

Aus der Zerfällung der biquadratischen Formen geht aber hervor, dafs

$$p+q = \frac{m^2-1+nz^2}{z^2} \quad \text{und} \quad p.q = -\frac{n}{z^2}$$

ist, und diese Gleichungen dienen zur Berechnung von p und q, wenn m und n gegeben sind; man findet aber aus ihnen rückwärts

$$n = -pqz^2 \quad \text{und} \quad m = \sqrt{[(1+pz^2)(1+qz^2)]},$$

und hiernach sind die beiden Constanten m und n durch zwei neue p und

q ersetzt, welche einer beliebigen Bestimmung fähig sind; es darf nur keine derselben $=0$ gesetzt werden, weil sonst $n=0$ wäre, und man also auf die cyklischen oder hyperbolischen Sinus zurückkommen würde; ferner dürfen auch p und q sich nicht gleich sein, weil die Differenzial-Gleichung dann die einfache Gestalt

$$\frac{\partial x}{1+px^2}+\frac{\partial y}{1+py^2}=0$$

bekommen würde, deren Integral entweder $\text{arc tang}(x\sqrt{p})+\text{arc tang}(y\sqrt{p})=\text{const.}$, oder $\mathfrak{Arc\,Tang}(x\sqrt{-p})+\mathfrak{Arc\,Tang}(y\sqrt{-p})=\text{const.}$ sein würde, je nachdem p positiv oder negativ wäre.

Durch die gefundenen Werthe von m und n verwandelt sich die charakteristische Gleichung in

$$3.\quad x^2+2xy\sqrt{[(1+pz^2)(1+qz^2)]}+y^2=z^2(1+pqx^2y^2),$$

und ihre Auflösungen nach x und y sind nun

$$4.\quad \begin{cases} x=\dfrac{z\sqrt{[(1+py^2)(1+qy^2)]}-y\sqrt{[(1+pz^2)(1+qz^2)]}}{1-pqy^2z^2}, \\ y=\dfrac{z\sqrt{[(1+px^2)(1+qx^2)]}-x\sqrt{[(1+pz^2)(1+qz^2)]}}{1-pqx^2z^2}. \end{cases}$$

Der Factor g, welcher in den Integralen (1.) vorkommt, kommt in den Gleichungen (3.) und (4.) nicht vor; die Ursache hiervon ist, dafs in der Gleichung $v+w=u$ die Verhältnisse ihrer drei Glieder zu einander nicht geändert werden, wenn man diese Gleichung mit einem constanten Factor multiplicirt, oder sie dadurch dividirt.

Könnte man die angezeigten Integrationen vollführen, so würde v als eine Function von x, w als eine Function von y und u als eine Function von z dargestellt werden; durch Umkehrung dieser Gleichungen würde man dann zu den gesuchten Ausdrücken

$$x=\varphi(v),\quad y=\varphi(w)\quad \text{und}\quad z=\varphi(u)$$

gelangen: diese Functionen werden aber wie die cyklischen und hyperbolischen Sinus (und Tangenten) so beschaffen sein, dafs ist

$$\varphi(0)=0\quad \text{und}\quad \varphi(-v)=-\varphi(+v).$$

§. 5.

Durch die Formeln (4.) im §. 4. ist der Zusammenhang zwischen den drei gleichnamigen Functionen x, y, z dergestalt ausgedrückt, dafs man x aus y und z, wie auch y aus x und z berechnen kann, da die beiden Constanten p und q als gegeben betrachtet werden. Es entsteht

nun die Frage, wie umgekehrt die Function z aus x und y berechnet werden könne. Schafft man in den Gleichungen (4.) die Nenner weg, und multiplicirt man dann die erste Gleichung mit x, die zweite aber mit y, so erhält man, wenn die eine Gleichung von der anderen subtrahirt wird, die Formel

$$z = \frac{y^2 - x^2}{y\sqrt{[(1+px^2)(1+qx^2)]} - x\sqrt{[(1+py^2)(1+qy^2)]}},$$

in welcher wir aber den Nenner noch rational machen wollen, indem wir die beiden Glieder des Bruches mit $y\sqrt{[(1+px^2)(1+qx^2)]} + x\sqrt{[(1+py^2)(1+qy^2)]}$ multipliciren; der neue Nenner wird dann $y^2(1+px^2)(1+qx^2) - x^2(1+py^2)(1+qy^2)$, oder nach einer leichten Reduction $(y^2-x^2)(1-pqx^2y^2)$; daher haben wir

$$5. \quad z = \frac{y\sqrt{[(1+px^2)(1+qx^2)]} + x\sqrt{[(1+py^2)(1+qy^2)]}}{1-pqx^2y^2}.$$

Aus den Formeln (4.) und (5.) leiten wir noch andere her. Man findet

$$1+px^2 = \frac{(1+pz^2)(1+py^2) - 2pyz\sqrt{[(1+pz^2)(1+py^2)(1+qz^2)(1+qy^2)]} + p^2y^2z^2(1+qz^2)(1+qy^2)}{(1-pqz^2y^2)^2},$$

und dieser Bruch ist ein vollkommenes Quadrat; zieht man die Wurzel aus, so erhält man

$$6. \quad \sqrt{(1+px^2)} = \frac{\sqrt{[(1+pz^2)(1+py^2)} - pyz\sqrt{[(1+qz^2)(1+qy^2)]}}{1-pqz^2y^2}.$$

Das Ausziehen der Quadratwurzel bringt zwar eine Zweideutigkeit mit sich, aber diese kann leicht gehoben werden; da nämlich für $y=0$ mufs $x=z$ werden, so erhellet die Richtigkeit der angegebenen Formel. Eben so findet man noch

$$7. \quad \sqrt{(1+qx^2)} = \frac{\sqrt{[(1+qz^2)(1+qy^2)]} - qyz\sqrt{[(1+pz^2)(1+py^2)]}}{1-pqz^2y^2},$$

$$8. \quad \sqrt{(1+py^2)} = \frac{\sqrt{[(1+pz^2)(1+px^2)]} - pxz\sqrt{[(1+qz^2)(1+qx^2)]}}{1-pqz^2x^2},$$

$$9. \quad \sqrt{(1+qy^2)} = \frac{\sqrt{[(1+qz^2)(1+qx^2)]} - qxz\sqrt{[(1+pz^2)(1+px^2)]}}{1-pqz^2x^2},$$

$$10. \quad \sqrt{(1+pz^2)} = \frac{\sqrt{[(1+px^2)(1+py^2)]} + pxy\sqrt{[(1+qx^2)(1+qy^2)]}}{1-pqx^2y^2},$$

$$11. \quad \sqrt{(1+qz^2)} = \frac{\sqrt{[(1+qx^2)(1+qy^2)]} + qxy\sqrt{[(1+px^2)(1+py^2)]}}{1-pqx^2y^2}.$$

Aus den vorstehenden Formeln leiten wir noch einige andere her, nämlich

12. $\sqrt{(1+qx^2)}+qyz\sqrt{(1+px^2)} = \sqrt{[(1+qz^2)(1+qy^2)]}$,
13. $\sqrt{(1+px^2)}+pyz\sqrt{(1+qx^2)} = \sqrt{[(1+pz^2)(1+py^2)]}$,
14. $\sqrt{(1+qy^2)}+qxz\sqrt{(1+py^2)} = \sqrt{[(1+qz^2)(1+qx^2)]}$,
15. $\sqrt{(1+py^2)}+pxz\sqrt{(1+qy^2)} = \sqrt{[(1+pz^2)(1+px^2)]}$,
16. $\sqrt{(1+qz^2)}-qxy\sqrt{(1+pz^2)} = \sqrt{[(1+qx^2)(1+qy^2)]}$,
17. $\sqrt{(1+pz^2)}-pxy\sqrt{(1+qz^2)} = \sqrt{[(1+px^2)(1+py^2)]}$.

Multiplicirt man die Gleichung (12.) mit $\sqrt{(1+px^2)}$ und (13.) mit $\sqrt{(1+qx^2)}$, so erhält man durch das Subtrahiren der einen Gleichung von der anderen noch

18. $\sqrt{[(1+qz^2)(1+qy^2)(1+px^2)]}-\sqrt{[(1+pz^2)(1+py^2)(1+qx^2)]}=(q-p).yz$,

und eben so

19. $\sqrt{[(1+qz^2)(1+qx^2)(1+py^2)]}-\sqrt{[(1+pz^2)(1+px^2)(1+qy^2)]}=(q-p).xz$,
20. $\sqrt{[(1+qx^2)(1+qy^2)(1+pz^2)]}-\sqrt{[(1+px^2)(1+py^2)(1+qz^2)]}=(p-q).xy$.

In ähnlicher Weise erhält man auch noch die folgende merkwürdige Relation

21. $p\sqrt{[(1+qx^2)(1+qy^2)(1+qz^2)]}-q\sqrt{[(1+px^2)(1+py^2)(1+pz^2)]}=p-q$.

Die Menge dieser Gleichungen liefse sich leicht noch ansehnlich vermehren; wir werden aber weiter unten die noch fehlenden Relationen auf eine bequemere Weise herleiten.

§. 6.

Cyklische Modular-Functionen überhaupt.

Der durch die Formeln (3.) bis (21.) ausgedrückte Zusammenhang unter den drei Functionen x, y, z der Argumente v, w, u, welche durch die Bedingung $v+w=u$ mit einander verbunden sind, ist von ziemlich einfacher Beschaffenheit; weit verwickelter ist aber der Zusammenhang zwischen einer solchen Function und ihrem Argumente, nnd also die Natur der Function selbst, welche durch die Integral-Formel

$$u = \int_0 \frac{g\,\partial z}{\sqrt{[(1+pz^2)(1+qz^2)]}}$$

ausgedrückt wird. Dieser Zusammenhang zwischen z und u hängt wesentlich von den beiden unbestimmten Constanten p und q ab, welche nur der Einschränkung unterworfen wurden, dafs sie ungleich sein sollen und keine derselben $=0$ sei. Die Gröfsen p und q können übrigens reell und imaginär sein und im letzten Falle ist $p=\alpha-\beta i$, wenn $q=\alpha+\beta i$ ist (und unter i verstanden wird $\sqrt{-1}$), weil das Product $(1+pz^2)(1+qz^2)$ selbst reell sein soll.

Nehmen wir vorläufig an, dafs p und q beide reell sein sollen, so müssen noch, insofern diese Zahlen positiv oder auch negativ sein können, vier verschiedene Fälle unterschieden werden; wir unterscheiden aber, um der allzugrofsen Vielförmigkeit zu begegnen, demungeachtet vorläufig nur zwei Fälle, nämlich die beiden, in welchen p und q entweder beide negativ oder beide positiv sind, weil wir die beiden noch übrigen Fälle auf die vorhin genannten später zurückzuführen gesonnen sind.

Nehmen wir zuerst an, dafs p und q beide negativ und $p>q$ sei, so haben wir die Formel

$$u = \int_0 \frac{g.\partial z}{\sqrt{[(1-pz^2)(1-qz^2)]}},$$

wenn wir $-p$ und $-q$ für p und q setzen. Führen wir eine neue veränderliche Gröfse t ein, welche durch die Gleichung $t = z\sqrt{p}$ bestimmt ist, so ist für $z=0$ auch $t=0$; ferner ist $\partial z = \frac{\partial t}{\sqrt{p}}$, und also

$$u = \int_0 \frac{\frac{g}{\sqrt{p}}.\partial t}{\sqrt{\left[(1-t^2)\left(1-\frac{q}{p}t^2\right)\right]}}.$$

Diese Formel wird am einfachsten, wenn $g=\sqrt{p}$ genommen wird; aufserdem ist der Bruch $\frac{q}{p}$ positiv und <1; setzen wir daher $\frac{q}{p}=k^2$, so haben wir die Formel

$$u = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{[(1-t^2)(1-k^2t^2)]}},$$

in welcher nur noch eine einzige Constante k vorkommt, welche zwischen den Grenzen 0 und $+1$ enthalten ist und welche wir den *Modul* nennen. Dieselbe Formel finden wir, wenn wir in der ursprünglichen setzen $g=1$, $z=t$, $p=-1$ und $q=-k^2$. Wäre $k=0$, so wäre $u = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1-t^2)}} = \arc\sin(t)$, und also $t=\sin u$; wäre aber $k=1$, so wäre $u = \int_0 \frac{\partial t}{1-t^2} = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\,(t)$, und also $t=\mathfrak{Tang}\,u$ oder auch $t=\sin lu$ nach Theil I. §. 37.; hieraus schliefst man, *dafs, wenn der Modul* k *zwischen den Grenzen* 0 *und* 1 *enthalten ist, die Function* t *zwischen den Grenzen* sin u *und* sin lu *und also überhaupt zwischen zwei cyklischen Sinus enthalten sei.*

Aus diesem Grunde nennen wir, wenn der Zusammenhang zwischen t und u durch die Gleichung $u = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1-t^2)}.\sqrt{(1-k^2t^2)}}$ ausgedrückt ist,

t *den cyklischen Modular-Sinus* des Argumentes u für den Modul k, $\sqrt{(1-t^2)}$ *den cyklischen Modular-Cosinus* und $\frac{t}{\sqrt{(1-t^2)}}$ die *cyklische Modular-Tangente* des Argumentes u für den Modul k. Zu diesen drei cyklischen Modular-Functionen kommt noch eine vierte, nämlich $\sqrt{(1-k^2t^2)}$, welche wir die *cyklische Differente* des Argumentes u für den Modul k nennen, weil sich in ihrem Vorhandensein die cyklischen Modular-Functionen von den gewöhnlichen cyklischen Functionen am auffallendsten unterscheiden. Die Bezeichnung stellen wir also fest:

$$t = \mathrm{sn}\, u, \qquad \sqrt{(1-t^2)} = \mathrm{cn}\, u, \qquad \frac{t}{\sqrt{(1-t^2)}} = \mathrm{tn}\, u, \qquad \sqrt{(1-k^2t^2)} = \mathrm{dn}\, u.$$

Die vier cyklischen Modular-Functionen $\mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{cn}\, u$, $\mathrm{tn}\, u$, $\mathrm{dn}\, u$ sind nicht blofs Functionen des Argumentes u, sondern auch Functionen des Moduls k, welcher zwischen den Grenzen Null und Eins enthalten ist, und daher als der cyklische Sinus eines Arcus θ gedacht werden kann; setzen wir aber

$$k = \sin\theta, \qquad k' = \cos\theta, \qquad \frac{k}{k'} = \mathrm{tang}\,\theta,$$

so ist $k^2 + k'^2 = 1$, und der Winkel θ heifst der Winkel oder der Arcus des Moduls. Da auch k' zwischen den Grenzen Null und Eins enthalten ist, so kann auch k' als ein Modul cyklischer Modular-Functionen vorgestellt werden; vertauschen wir aber k mit k', so vertauschen wir $\mathrm{sn}\, u$ mit $\mathrm{sn}'\, u$, $\mathrm{cn}\, u$ mit $\mathrm{cn}'\, u$, $\mathrm{tn}\, u$ mit $\mathrm{tn}'\, u$ und $\mathrm{dn}\, u$ mit $\mathrm{dn}'\, u$. Die durch die Gleichung $k^2 + k'^2 = 1$ mit einander verbundenen Modul nennen wir den einen den conjugirten des andern; ist θ der Arcus des Moduls k, so ist $\frac{\pi}{2} - \theta$ der Arcus des conjugirten Moduls k'.

§. 7.

Der Zusammenhang zwischen den vier auf dasselbe Argument u und auf denselben Modul k bezogenen Functionen $\mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{cn}\, u$, $\mathrm{tn}\, u$, $\mathrm{dn}\, u$ wird ausgedrückt durch die Formeln

$$\mathrm{sn}^2 u + \mathrm{cn}^2 u = 1, \qquad \mathrm{tn}\, u = \frac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{cn}\, u},$$

$$\mathrm{cn}\, u = \sqrt{(1-\mathrm{sn}^2 u)}, \qquad 1 + \mathrm{tn}^2 u = \frac{1}{\mathrm{cn}^2 u},$$

$$\mathrm{sn}\, u = \sqrt{(1-\mathrm{cn}^2 u)}, \qquad \frac{1+\mathrm{tn}^2 u}{\mathrm{tn}^2 u} = \frac{1}{\mathrm{sn}^2 u},$$

$$\mathrm{dn}\,u = \sqrt{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u)} = \sqrt{(k'^2+k^2\,\mathrm{cn}^2\,u)} = \sqrt{(\mathrm{cn}^2\,u+k'^2\,\mathrm{sn}^2\,u)},$$

$$\mathrm{dn}\,u = \sqrt{\frac{1+k'^2\,\mathrm{tn}^2\,u}{1+\mathrm{tn}^2\,u}},$$

$$\mathrm{tn}\,u = \sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}^2\,u}{\mathrm{dn}^2\,u-k'^2}}.$$

Dem §. 4. gemäfs ist

$$\mathrm{sn}(-u) = -\mathrm{sn}\,u,$$

also

$$\mathrm{cn}(-u) = \mathrm{cn}\,u, \qquad \mathrm{tn}(-u) = -\mathrm{tn}\,u, \qquad \mathrm{dn}(-u) = \mathrm{dn}\,u.$$

Wird das Argument $u=0$ gesetzt, so ist

$$\mathrm{sn}\,0 = 0, \quad \mathrm{cn}\,0 = 1, \quad \mathrm{tn}\,0 = 0, \quad \mathrm{dn}\,0 = 1.$$

Nach §. 6. ist $\mathrm{sn}\,u$ zwischen den Grenzen $\sin u$ und $\sin lu$ enthalten, und da $lu<u$, also auch $\sin lu<\sin u$ ist, so ist immer

$\sin u>\mathrm{sn}\,u>\sin lu$, also $\cos u<\mathrm{cn}\,u<\cos lu$, $\mathrm{tang}\,u>\mathrm{tn}\,u>\mathrm{tang}\,lu$.

Wird also das Argument u nicht verändert, der Modul k dagegen vergröfsert, so verkleinert sich $\mathrm{sn}\,u$ und $\mathrm{tn}\,u$, aber $\mathrm{cn}\,u$ vergröfsert sich, wie auch $\mathrm{dn}\,u$.

§. 8.

Erste Differenziale der cyklischen Modular-Functionen.

Wenn wir in der Formel $\partial u = \frac{\partial t}{\sqrt{(1-t^2)}\sqrt{(1-k^2\,t^2)}}$ für t den Werth $\mathrm{sn}\,u$ an die Stelle setzen, so haben wir $\partial u = \frac{\partial\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}$, oder auch

$$1. \quad \partial\,\mathrm{sn}\,u = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\partial u.$$

Differenziiren wir die Gleichung $\mathrm{sn}^2\,u+\mathrm{cn}^2\,u=1$, so entsteht $\mathrm{sn}\,u\,\partial\,\mathrm{sn}\,u + \mathrm{cn}\,u\,\partial\,\mathrm{cn}\,u=0$, und wird für $\partial\,\mathrm{sn}\,u$ der vorher gefundene Werth substituirt, so entsteht sofort die Formel

$$2. \quad \partial\,\mathrm{cn}\,u = -\mathrm{sn}\,u\;\mathrm{dn}\,u.\partial u.$$

Da $\mathrm{tn}\,u = \frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}$ ist, so ist $\partial\,\mathrm{tn}\,u = \frac{\mathrm{dn}\,u\,(\mathrm{cn}^2\,u+\mathrm{sn}^2\,u)\,.\,\partial u}{\mathrm{cn}^2\,u}$, oder auch

$$3. \quad \partial\,\mathrm{tn}\,u = \frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}^2\,u}.\partial u.$$

Aus $\mathrm{dn}^2\,u = 1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u$ folgt $\mathrm{dn}\,u.\partial\,\mathrm{dn}\,u = -k^2\,\mathrm{sn}\,u.\partial\,\mathrm{sn}\,u$ und also

$$4. \quad \partial\,\mathrm{dn}\,u = -k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u.\partial u$$

Bei einer vorzunehmenden Umkehrung der Relation zwischen einer cyklischen Modular-Function und ihrem Argumente dient die folgende Bezeichnung:

Ist $t = \operatorname{sn} u$, so ist umgekehrt $u = \arg \operatorname{sn}(t)$.
Ist $t = \operatorname{cn} u$, so ist umgekehrt $u = \arg \operatorname{cn}(t)$.
Ist $t = \operatorname{tn} u$, so ist umgekehrt $u = \arg \operatorname{tn}(t)$.
Ist $t = \operatorname{dn} u$, so ist umgekehrt $u = \arg \operatorname{dn}(t)$.

Wenden wir diese Bezeichnung an, und kehren wir die vorhin erhaltenen Differenzial-Formeln um, so haben wir:

5. $$\arg \operatorname{sn}(t) = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1-t^2).\sqrt{(1-k^2t^2)}}} = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{[1-(1+k^2)t^2+k^2t^4]}},$$

6. $$\arg \operatorname{cn}(t) = \int_1 \frac{-\partial t}{\sqrt{(1-t^2).\sqrt{(k'^2+k^2t^2)}}} = \int_1 \frac{-\partial t}{\sqrt{[k'^2+(k^2-k'^2)t^2-k^2t^4]}},$$

7. $$\arg \operatorname{tn}(t) = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1+t^2).\sqrt{(1+k'^2t^2)}}} = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{[1+(1+k'^2)t^2+k'^2t^4]}},$$

8. $$\arg \operatorname{dn}(t) = \int_1 \frac{-\partial t}{\sqrt{(t^2-k'^2).\sqrt{(1-t^2)}}} = \int_1 \frac{-\partial t}{\sqrt{[-k'^2+(1+k'^2)t^2-t^4)}}.$$

§. 9.

Die Amplitude der cyklischen Modular-Functionen.

Obgleich die cyklischen Modular-Functionen verschieden sind von den cyklischen Potenzial-Functionen, so können sie dennoch leicht auf diese zurückgeführt werden in Anwendung einer vermittelnden Function; da nämlich $\operatorname{sn} u$ zwischen den Grenzen $\sin u$ und $\sin lu$ enthalten ist, so können wir $\operatorname{sn} u = \sin \Phi$ setzen, woraus folgt $\operatorname{cn} u = \cos \Phi$ und $\operatorname{tn} u = \operatorname{tang} \Phi$. Den durch diese einfachen Gleichungen bestimmten Arcus Φ nennen wir die *Amplitude des Argumentes* u *für den Modul* k, oder in Zeichen

$$\Phi = \operatorname{am} u \quad \text{und umgekehrt} \quad u = \arg \operatorname{am}(\Phi).$$

Hiernach ist also

1. $$\begin{cases} \operatorname{sn} u = \sin \operatorname{am} u, & \operatorname{tn} u = \operatorname{tang} \operatorname{am} u, \\ \operatorname{cn} u = \cos \operatorname{am} u, & \operatorname{dn} u = \sqrt{(1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} u)}. \end{cases}$$

Weil bekanntlich $\Phi = \frac{1}{i} \log \sqrt{\left(\frac{1+i \operatorname{tang} \varphi}{1-i \operatorname{tang} \varphi}\right)}$ ist, so ist also auch

2. $$\operatorname{am} u = \frac{1}{i} \log \sqrt{\left(\frac{1+i \operatorname{tn} u}{1-i \operatorname{tn} u}\right)}.$$

Da nach Theil I. §. 38. ist $\mathfrak{L}\Phi = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}(\sin \Phi) = \log \sqrt{\left(\frac{1+\sin \varphi}{1-\sin \varphi}\right)}$ $= \log \frac{\cos \varphi}{1-\sin \varphi} = \log \frac{1+\sin \varphi}{\cos \varphi} = \log \frac{1+\operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi}{1-\operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi} = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\Phi\right)$, so ist auch

3. $$\mathfrak{L} \operatorname{am} u = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}(\operatorname{sn} u) = \log \sqrt{\left(\frac{1+\operatorname{sn} u}{1-\operatorname{sn} u}\right)} = \log \frac{\operatorname{cn} u}{1-\operatorname{sn} u} = \log \frac{1+\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}$$
$$= \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{am} u\right).$$

Die Formel $\tang\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\left(\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\right)}$ verwandelt sich in

4. $$\tang\tfrac{1}{2}\am u = \sqrt{\left(\frac{1-\cn u}{1+\cn u}\right)} = \frac{1-\cn u}{\sn u} = \frac{\sn u}{1+\cn u}.$$

Die Formel $u = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1-t^2)}\sqrt{(1-k^2t^2)}}$ verwandelt sich, wenn $t = \sin\Phi$ gesetzt wird, also $\partial t = \cos\Phi.\partial\Phi$, in

5. $$\arg\am(\Phi) = \int_0 \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} = \int_0 \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(\cos^2\varphi+k'^2\sin^2\varphi)}}$$
$$= \int_0 \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(k'^2+k^2\cos^2\varphi)}}.$$

Da $\sin^2\Phi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$ ist, so ist $\sqrt{(1-k^2\sin^2\Phi)} = \sqrt{\left(\frac{2-k^2+k^2\cos 2\varphi}{2}\right)}$. Setzt man nun

$$k = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}, \quad \text{also } k^2 = \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2} \quad \text{und} \quad 2-k^2 = \frac{2(1+\lambda^2)}{(1+\lambda)^2},$$

so ist $\sqrt{(1-k^2\sin^2\Phi)} = \frac{\sqrt{(1+2\lambda\cos 2\varphi+\lambda^2)}}{1+\lambda}$, und also auch

6. $$\arg\am(\Phi) = \int_0 \frac{(1+\lambda).\partial\varphi}{\sqrt{(1+2\lambda\cos 2\varphi+\lambda^2)}} = \int_0 \frac{(1+\lambda).\partial\varphi}{\sqrt{[(1+\lambda e^{2\varphi i})(1+\lambda e^{-2\varphi i})]}}.$$

Die in dieser Formel vorkommende Constante λ hängt den Formeln

$$k = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}, \quad k' = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}, \quad \lambda = \frac{1-k'}{1+k'}, \quad \sqrt{(1-\lambda^2)} = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$$

gemäfs von dem Modul k ab. Es ist auch $\lambda = \left(\frac{\sqrt{(1+k)}-\sqrt{(1-k)}}{\sqrt{(1+k)}+\sqrt{(1-k)}}\right)^2$.

Differenziirt man die Gleichung $\sin\am u = \sn u$, so entsteht $\cos\am u.\partial\am u = \cn u\,\dn u\,\partial u$, und da $\cos\am u = \cn u$ ist, so hat man:

7. $$\partial\am u = \dn u.\partial u.$$

Da $\sin\am u$ zwischen den Grenzen $\sin u$ und $\sin lu$ enthalten ist, so ist auch $\am u$ zwischen den Grenzen u und lu enthalten, und da nach Theil I. §. 48. ist $lu < u$, so ist also

8. $$u > \am u > lu.$$

Läfst man also das Argument u ungeändert und vergröfsert man den Modul k, so nähert sich $\am u$ der Grenze lu und wird also kleiner.

Setzt man in der Formel (5.) zuerst $k = 0$, so hat man $\arg\am(\Phi) = \int_0 \partial\Phi = \Phi$; setzt man aber $k = 1$, so hat man $\arg\am(\Phi) = \int_0 \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi} = \mathfrak{L}\Phi$, nach Theil I. §. 46.; wenn also k zwischen den Grenzen 0 und 1 enthalten ist, so ist $\arg\am(\Phi)$ zwischen den Grenzen Φ und $\mathfrak{L}\Phi$ enthal-

ten, und weil $\mathfrak{L}\Phi > \Phi$ nach Theil I. §. 48. ist, so ist also

$$9. \quad \Phi < \arg\operatorname{am}(\Phi) < \mathfrak{L}\Phi.$$

Läfst man also die Amplitude ungeändert und vergröfsert man den Modul k, so nähert sich $\arg\operatorname{am}(\Phi)$ der Grenze $\mathfrak{L}\Phi$, und wird also ebenfalls gröfser.

§. 10.

Die beiden conjugirten Modular-Quadranten.

Der Modular-Sinus $\operatorname{sn} u$ wächst mit dem Argumente u zugleich von Null an, aber nur bis zu einer gewissen Grenze; er ist dann $= 1$, und wird das Argument u noch vergröfsert, so verkleinert sich sein Modular-Sinus wieder. Der kleinste Werth des Argumentes u, dessen Modular-Sinus $= 1$ ist, heifse der dem Modul k zugehörige *Modular-Quadrant,* und werde durch K bezeichnet. Es ist also

$$\operatorname{sn} K = 1, \quad \operatorname{cn} K = 0, \quad \operatorname{tn} K = \tfrac{1}{0}, \quad \operatorname{dn} K = \sqrt{(1-k^2)} = k' \quad \text{und}$$

$$\operatorname{am} K = \frac{\pi}{2}, \quad \text{oder} \quad \arg\operatorname{am}\left(\frac{\pi}{2}\right) = K.$$

Hiernach ist also

$$K = \int_0^1 \frac{\partial t}{\sqrt{(1-t^2)}\sqrt{(1-k^2 t^2)}}, \quad \text{oder} \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \varphi)}}.$$

Der Modular-Quadrant ist also eine Function des Moduls, und hängt von keiner zweiten Gröfse ab. Da nach §. 9. ist $\Phi < \arg\operatorname{am}(\Phi) < \mathfrak{L}\Phi$, so ist also auch, wenn $\Phi = \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird,

$$\frac{\pi}{2} < K < \mathfrak{L}\frac{\pi}{2}.$$

Es ist bekanntlich $\mathfrak{L}\frac{\pi}{2}$ unendlich, der Modular-Quadrant K wächst also ohne Ende mit seinem Modul k, und ist unendlich grofs, wenn der Modul $k = 1$ ist; der kleinste Werth des Modular-Quadranten ist nicht Null, sondern $\frac{\pi}{2}$, oder der cyklische Quadrant; hiernach ist also immer $\frac{\pi}{2K}$ ein ächter Bruch, welcher beim Wachsen des Moduls k von Eins an ohne Ende abnimmt und $= 0$ ist, wenn $k = 1$ wird.

Zum conjugirten Modul k' gehört auch ein Modular-Quadrant K', welcher eben so von k' abhängt, wie K vom Modul k, und die beiden Quadranten K und K' nennen wir *conjugirte* Quadranten. Der Quadrant K' ist gröfser als K, wenn der Modul k' gröfser als k ist. Es ist überhaupt, wenn wir wieder $\frac{k}{k'} = \operatorname{tang}\theta$ setzen,

$$\frac{K}{K'} = 0 \quad \text{für} \quad \frac{k}{k'} = 0, \quad \text{oder} \quad \theta = 0,$$
$$\frac{K}{K'} < 1 \quad \text{für} \quad \frac{k}{k'} < 1, \quad \text{oder} \quad \theta < 45^0,$$
$$\frac{K}{K'} = 1 \quad \text{für} \quad \frac{k}{k'} = 1, \quad \text{oder} \quad \theta = 45^0,$$
$$\frac{K}{K'} > 1 \quad \text{für} \quad \frac{k}{k'} > 1, \quad \text{oder} \quad \theta > 45^0,$$
$$\frac{K}{K'} = \tfrac{1}{0} \quad \text{für} \quad \frac{k}{k'} = \tfrac{1}{0}, \quad \text{oder} \quad \theta = 90^0.$$

Setzen wir $\frac{\pi}{2K} = \eta$ und $\frac{\pi}{2K'} = \eta'$, so ist $\frac{\pi}{2} = \eta K = \eta' K'$; die Gröfsen η und η' nennen wir die beiden *einfachen Quadranten-Verhältnisse*, und da $\frac{K}{K'} = \frac{\eta'}{\eta}$ ist, so nennen wir $\frac{K}{K'}$ das dem Modul k zugehörige *zusammengesetzte Quadranten-Verhältnifs.*

§. 11.

Ausdrücke für die cyklischen Modular-Functionen eines Binoms.

Nach §. 6. hat man in den Formeln des §. 4. und §. 5. nur $p = -1$ und $q = -k^2$ zu setzen, wenn x, y, z Modular-Sinus dreier Argumente a, b, $a+b$ vorstellen sollen, wovon die beiden ersten so grofs sind, als das dritte allein. Hiernach erhalten wir also die Formeln

$$1. \quad \begin{cases} \operatorname{sn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}, \\ \operatorname{sn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b - \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}, \end{cases}$$

wovon die zweite auch sogleich aus der ersten hergeleitet werden kann, indem man nur $-b$ für b setzt. Für die Modular-Cosinus erhält man eben so

$$2. \quad \begin{cases} \operatorname{cn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b - \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}, \\ \operatorname{cn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}. \end{cases}$$

Man kann jene und diese Formeln auch also darstellen

$$\operatorname{sn}(a \pm b) = \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b (\operatorname{tn} a \operatorname{dn} b \pm \operatorname{tn} b \operatorname{dn} a)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b},$$
$$\operatorname{cn}(a \pm b) = \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b (1 \mp \operatorname{tn} a \operatorname{dn} b \operatorname{tn} b \operatorname{dn} a)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b},$$

und erhält hieraus durch Division:

$$3.\quad \begin{cases} \operatorname{tn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} b + \operatorname{tn} b \operatorname{dn} a}{1 - \operatorname{tn} a \operatorname{dn} b \,.\, \operatorname{tn} b \operatorname{dn} a}, \\ \operatorname{tn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} b - \operatorname{tn} b \operatorname{dn} a}{1 + \operatorname{tn} a \operatorname{dn} b \,.\, \operatorname{tn} b \operatorname{dn} a}. \end{cases}$$

Für die Differenten hat man die Formeln

$$4.\quad \begin{cases} \operatorname{dn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} b - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}, \\ \operatorname{dn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} b + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}. \end{cases}$$

Auf ähnliche Art oder auch durch Zusammensetzung aus den vorstehenden erhält man

$$5.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn}(a+b)}{\operatorname{dn} b} = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn}(a+b) + \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a}, \\ \operatorname{sn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b - \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn}(a-b)}{\operatorname{dn} b} = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn}(a-b) - \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a}; \end{cases}$$

$$6.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{dn} a \operatorname{cn}(a+b)}{\operatorname{cn} b} = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} b \operatorname{cn}(a+b) + \operatorname{sn} b \operatorname{dn} a}{\operatorname{cn} a}, \\ \operatorname{sn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a - \operatorname{sn} b \operatorname{dn} a \operatorname{cn}(a-b)}{\operatorname{cn} b} = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} b \operatorname{cn}(a-b) - \operatorname{sn} b \operatorname{dn} a}{\operatorname{cn} a}; \end{cases}$$

$$7.\quad \begin{cases} \operatorname{cn}(a+b) = \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b - \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn}(a+b), \\ \operatorname{cn}(a-b) = \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn}(a-b); \end{cases}$$

$$8.\quad \begin{cases} \operatorname{dn}(a+b) = \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn}(a+b), \\ \operatorname{dn}(a-b) = \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn}(a-b); \end{cases}$$

$$9.\quad \begin{cases} \operatorname{dn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{dn} a - k^2 \operatorname{cn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a+b)}{\operatorname{dn} b} = \dfrac{\operatorname{dn} b - k^2 \operatorname{cn} b \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a+b)}{\operatorname{dn} a}, \\ \operatorname{dn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{dn} a + k^2 \operatorname{cn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a-b)}{\operatorname{dn} b} = \dfrac{\operatorname{dn} b - k^2 \operatorname{cn} b \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a-b)}{\operatorname{dn} a}; \end{cases}$$

$$10.\quad \begin{cases} \operatorname{cn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{cn} a - \operatorname{dn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a+b)}{\operatorname{cn} b} = \dfrac{\operatorname{cn} b - \operatorname{dn} b \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a+b)}{\operatorname{cn} a}, \\ \operatorname{cn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{cn} a + \operatorname{dn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a-b)}{\operatorname{cn} b} = \dfrac{\operatorname{cn} b - \operatorname{dn} b \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a-b)}{\operatorname{cn} a}. \end{cases}$$

Zu diesen Formeln fügen wir noch

$$11.\quad \begin{cases} \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn}(a+b) - \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b \operatorname{cn}(a+b) = k'^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b, \\ \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b \operatorname{cn}(a-b) - \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn}(a-b) = k'^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b. \end{cases}$$

$$12.\quad \begin{cases} \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b \operatorname{dn}(a+b) - k^2 \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b \operatorname{cn}(a+b) = k'^2, \\ \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b \operatorname{dn}(a-b) - k^2 \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b \operatorname{cn}(a-b) = k'^2. \end{cases}$$

Die Formeln (1.) bis (4.) können und müssen auch noch in anderen Formen dargestellt werden, welche weiter unten werden hergeleitet werden.

§. 12.

Ausdruck für die cyklische Amplitude eines Binoms.

Setzt man in den Formeln (3.) $\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,b = \mathrm{tang}\,\alpha$ und $\mathrm{tn}\,b\,\mathrm{dn}\,a = \mathrm{tang}\,\beta$, so erhält man $\mathrm{tn}\,(a+b) = \frac{\mathrm{tang}\,\alpha + \mathrm{tang}\,\beta}{1 - \mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\beta}$, oder $\mathrm{tn}\,(a+b) = \mathrm{tang}\,(\alpha+\beta)$, und da $\mathrm{tn}\,(a+b) = \mathrm{tang}\,\mathrm{am}\,(a+b)$ ist, so ist also $\mathrm{tang}\,\mathrm{am}\,(a+b) = \mathrm{tang}\,(\alpha+\beta)$ oder einfacher $\mathrm{am}\,(a+b) = \alpha+\beta$. Eben so findet man $\mathrm{am}\,(a-b) = \alpha-\beta$, und da $\alpha = \mathrm{arc\,tang}\,(\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,b)$, ferner $\beta = \mathrm{arc\,tang}\,(\mathrm{tn}\,b\,\mathrm{dn}\,a)$ ist, so hat man die Formeln

$$13.\quad \begin{cases} \mathrm{am}\,(a+b) = \mathrm{arc\,tang}\,(\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,b) + \mathrm{arc\,tang}\,(\mathrm{tn}\,b\,\mathrm{dn}\,a) \text{ und} \\ \mathrm{am}\,(a-b) = \mathrm{arc\,tang}\,(\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,b) - \mathrm{arc\,tang}\,(\mathrm{tn}\,b\,\mathrm{dn}\,a) \end{cases}$$

Da $\frac{\mathrm{am}\,(a+b)+\mathrm{am}\,(a-b)}{2} = \alpha$ und $\frac{\mathrm{am}\,(a+b)-\mathrm{am}\,(a-b)}{2} = \beta$ ist, so hat man noch

$$14.\quad \begin{cases} \mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,b = \mathrm{tang}\left[\frac{\mathrm{am}\,(a+b)+\mathrm{am}\,(a-b)}{2}\right] \text{ und} \\ \mathrm{tn}\,b\,\mathrm{dn}\,a = \mathrm{tang}\left[\frac{\mathrm{am}\,(a+b)-\mathrm{am}\,(a-b)}{2}\right], \end{cases}$$

Setzt man $b = a$, so erhält man noch die specielle Formel

$$\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{am}\,2a.$$

Aus der Formel $\mathrm{tang}\,\alpha = \mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,b = \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}{\mathrm{cn}\,a}$ folgt $\sin\alpha = \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}{\sqrt{(\mathrm{cn}^2\,a + \mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{dn}^2\,b)}}$ und $\cos\alpha = \frac{\mathrm{cn}\,a}{\sqrt{(\mathrm{cn}^2\,a+\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{dn}^2\,b)}}$; da aber $\mathrm{cn}^2\,a = 1-\mathrm{sn}^2\,a$ und $\mathrm{dn}^2\,b = 1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,b$ ist, so reducirt sich der Ausdruck $\mathrm{cn}^2\,a + \mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{dn}^2\,b$ auf $1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,b$ und es ist also

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}{\sqrt{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,b)}}, \qquad \cos\alpha = \frac{\mathrm{cn}\,a}{\sqrt{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,b)}}.$$

Ganz eben so, oder durch bloſse Vertauschung der Buchstaben a und b erhält man

$$\sin\beta = \frac{\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a}{\sqrt{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,b)}}, \qquad \cos\beta = \frac{\mathrm{cn}\,b}{\sqrt{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,b)}}.$$

Die zweite der Formeln (13.) giebt, wenn $b = a$ gesetzt wird,

$$\mathrm{am}\,0 = 0.$$

Ferner erhält man $\mathrm{am}\,(a-b) = -\mathrm{am}\,(b-a)$, oder, wenn man $a-b = u$ setzt,

$$\mathrm{am}\,(-u) = -\mathrm{am}\,u.$$

§. 13.

Die cyklischen Modular-Functionen und die Amplitude des Complements.
Zweite Art von Formeln für die Functionen eines Binoms.

Setzt man in den Formeln für $\mathrm{sn}(a-b)$, $\mathrm{cn}(a-b)$, $\mathrm{tn}(a-b)$ und $\mathrm{dn}(a-b)$ des §. 11. das Argument $a=K$ und $b=u$, so erhält man, weil nun $\mathrm{sn}\,a=1$, $\mathrm{cn}\,a=0$ und $\mathrm{dn}\,a=k'$ ist, auf der Stelle die Ausdrücke

$$15.\quad \begin{cases} \mathrm{sn}(K-u)=\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}, & \mathrm{tn}(K-u)=\frac{1}{k'\,\mathrm{tn}\,u}, \\ \mathrm{cn}(K-u)=\frac{k'\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}, & \mathrm{dn}(K-u)=\frac{k'}{\mathrm{dn}\,u}, \end{cases}$$

welche so häufig zur Anwendung kommen, dafs sie sich fast von selbst dem Gedächtnisse einprägen werden. Die Formel für $\mathrm{am}(a-b)$ im §. 12. giebt, da $\mathrm{arc\,tang}(\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,b)$ nun $\frac{\pi}{2}$ ist,

$$16.\quad \begin{cases} \mathrm{am}(K-u)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arc\,tang}(k'\,\mathrm{tn}\,u), & \text{oder} \\ \mathrm{am}(K-u)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arc\,sin}\left(\frac{k'\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right) & \text{oder} \\ \mathrm{am}(K-u)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arc\,cos}\left(\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right). \end{cases}$$

Das Argument $K-u$ nennen wir das *Complement* des Arcus u, und wegen des häufigen Gebrauches der Functionen des Complementes führen wir die folgende abkürzende Bezeichnung ein:

$$\begin{aligned} \mathrm{amc}\,u &= \mathrm{am}(K-u), \\ \mathrm{snc}\,u &= \sin\mathrm{amc}\,u = \mathrm{sn}(K-u), \\ \mathrm{cnc}\,u &= \cos\mathrm{amc}\,u = \mathrm{cn}(K-u), \\ \mathrm{tnc}\,u &= \mathrm{tang}\,\mathrm{amc}\,u = \mathrm{tn}(K-u), \\ \mathrm{dnc}\,u &= \mathrm{dn}(K-u). \end{aligned}$$

Da nun auch u das Complement von $K-u$ ist, so ist

$$17.\quad \begin{cases} \mathrm{snc}\,u=\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}, & \mathrm{sn}\,u=\frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{dnc}\,u}, & \text{folglich} & \mathrm{snc}(-u)=\mathrm{snc}\,u, \\ \mathrm{cnc}\,u=\frac{k'\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}, & \mathrm{cn}\,u=\frac{k'\,\mathrm{snc}\,u}{\mathrm{dnc}\,u}, & \text{folglich} & \mathrm{cnc}(-u)=-\mathrm{cnc}\,u, \\ \mathrm{tnc}\,u=\frac{1}{k'\,\mathrm{tn}\,u}, & \mathrm{tn}\,u=\frac{1}{k'\,\mathrm{tnc}\,u}, & \text{folglich} & \mathrm{tnc}(-u)=-\mathrm{tnc}\,u, \\ \mathrm{dnc}\,u=\frac{k'}{\mathrm{dn}\,u}, & \mathrm{dn}\,u=\frac{k'}{\mathrm{dnc}\,u}, & \text{folglich} & \mathrm{dnc}(-u)=\mathrm{dnc}\,u, \end{cases}$$

woraus wir noch zusammensetzen $\mathrm{tnc}\,u\,\mathrm{dnc}\,u=\frac{1}{\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}$. Wir machen von den vorstehenden Formeln schon jetzt Gebrauch. Setzt man in der Formel

$\mathrm{sn}(a-b) = \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b - \mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,b}$ für a an die Stelle $K-a$, so verwandelt sich $a-b$ in $K-(a+b)$, und es ist also zunächst $\mathrm{snc}(a+b) = \frac{\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b - \mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a}{1-k^2\,\mathrm{snc}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,b}$. Der Zähler dieses Bruches ist einerlei mit $\frac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b}{\mathrm{dn}\,a} - \frac{k'^2\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{dn}^2\,a}$, und der Nenner ist einerlei mit $\frac{\mathrm{dn}^2\,a - k^2\,\mathrm{cn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,b}{\mathrm{dn}^2\,a}$ $= \frac{\mathrm{dn}^2\,a\,\mathrm{dn}^2\,b + k^2k'^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,b}{\mathrm{dn}^2\,a}$, folglich ist

$$\textbf{18.}\quad \begin{cases} \mathrm{snc}(a+b) = \frac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b - k'^2\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{dn}^2\,a\,\mathrm{dn}^2\,b + k^2k'^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,b}, \\ \mathrm{snc}(a-b) = \frac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b + k'^2\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{dn}^2\,a\,\mathrm{dn}^2\,b + k^2k'^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,b}. \end{cases}$$

Für die Cosinus hat man die Formel $\mathrm{cnc}(a+b) = \frac{\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{cn}\,b + \mathrm{snc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,b}{1-k^2\,\mathrm{snc}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,b}$; der Zähler dieses Bruches reducirt sich auf $\frac{k'(\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,b + \mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,b)}{\mathrm{dn}^2\,a}$, folglich ist

$$\textbf{19.}\quad \begin{cases} \mathrm{cnc}(a+b) = k'.\frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,b + \mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}^2\,a\,\mathrm{dn}^2\,b + k^2k'^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,b} \quad \text{und} \\ \mathrm{cnc}(a-b) = k'.\frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,b - \mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}^2\,a\,\mathrm{dn}^2\,b + k^2k'^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,b}. \end{cases}$$

Aus diesen und den vorigen Formeln erhält man durch Division

$$\textbf{20.}\quad \begin{cases} \mathrm{tnc}(a+b) = \frac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b - k'^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b}{k'(\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,b + \mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{cn}\,a)}, \\ \mathrm{tnc}(a-b) = \frac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b + k'^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b}{k'(\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,b - \mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{cn}\,a)}. \end{cases}$$

Für die Differenten haben wir zunächst

$$\mathrm{dnc}(a+b) = \frac{\mathrm{dnc}\,a\,\mathrm{dn}\,b + k^2\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,b}{1-k^2\,\mathrm{snc}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,b},$$

und da sich der Zähler reducirt auf $\frac{k'(\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b + k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,b)}{\mathrm{dn}^2\,a}$, so erhält man

$$\textbf{21.}\quad \begin{cases} \mathrm{dnc}(a+b) = \frac{k'(\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b + k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,b)}{\mathrm{dn}^2\,a\,\mathrm{dn}^2\,b + k^2k'^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,b}, \\ \mathrm{dnc}(a-b) = \frac{k'(\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b - k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,b)}{\mathrm{dn}^2\,a\,\mathrm{dn}^2\,b + k^2k'^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,b}. \end{cases}$$

Da $\mathrm{sn}\,u = \frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{dnc}\,u}$ ist, so erhalten wir noch, indem wir $a+b$ für u setzen und die gefundenen Ausdrücke substituiren,

$$22.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{sn}a\operatorname{dn}a\operatorname{cn}b + \operatorname{sn}b\operatorname{dn}b\operatorname{cn}a}{\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b + k^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b} = \dfrac{\operatorname{sn}a\operatorname{snc}b + \operatorname{sn}b\operatorname{snc}a}{1 + k^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b\operatorname{snc}a\operatorname{snc}b}, \\ \operatorname{sn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{sn}a\operatorname{dn}a\operatorname{cn}b - \operatorname{sn}b\operatorname{dn}b\operatorname{cn}a}{\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b - k^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b} = \dfrac{\operatorname{sn}a\operatorname{snc}b - \operatorname{sn}b\operatorname{snc}a}{1 - k^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b\operatorname{snc}a\operatorname{snc}b}, \end{cases}$$

Da $\operatorname{cn}(a+b) = \dfrac{k'\operatorname{snc}(a+b)}{\operatorname{dnc}(a+b)}$ ist, so erhalten wir

$$23.\quad \begin{cases} \operatorname{cn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\operatorname{cn}b\operatorname{dn}b - k'^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b}{\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b + k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{sn}b\operatorname{cn}b} = \dfrac{\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b - \operatorname{cnc}a\operatorname{cnc}b}{1 + \dfrac{k^2}{k'^2}\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b\operatorname{cnc}a\operatorname{cnc}b}, \\ \operatorname{cn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\operatorname{cn}b\operatorname{dn}b + k'^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b}{\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b - k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{sn}b\operatorname{cn}b} = \dfrac{\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b + \operatorname{cnc}a\operatorname{cnc}b}{1 - \dfrac{k^2}{k'^2}\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b\operatorname{cnc}a\operatorname{cnc}b}. \end{cases}$$

Weiter ist für die Tangenten

$$24.\quad \begin{cases} \operatorname{tn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{sn}a\operatorname{dn}a\operatorname{cn}b + \operatorname{sn}b\operatorname{dn}b\operatorname{cn}a}{\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\operatorname{cn}b\operatorname{dn}b - k'^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b} = \dfrac{\operatorname{tn}a\operatorname{dn}a + \operatorname{tn}b\operatorname{dn}b}{\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b - k'^2\operatorname{tn}a\operatorname{tn}b}, \\ \operatorname{tn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{sn}a\operatorname{dn}a\operatorname{cn}b - \operatorname{sn}b\operatorname{dn}b\operatorname{cn}a}{\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\operatorname{cn}b\operatorname{dn}b + k'^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b} = \dfrac{\operatorname{tn}a\operatorname{dn}a - \operatorname{tn}b\operatorname{dn}b}{\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b + k'^2\operatorname{tn}a\operatorname{tn}b}. \end{cases}$$

Die Formeln (21.) können endlich auch also dargestellt werden:

$$25.\quad \begin{cases} \operatorname{dn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{dn}^2a\operatorname{dn}^2b + k^2k'^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}{\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b + k^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b}, \\ \operatorname{dn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{dn}^2a\operatorname{dn}^2b + k^2k'^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}{\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b - k^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b}. \end{cases}$$

Dafs die Formeln (22.)—(25.) mit den Formeln (1.)—(4.) übereinstimmen, davon kann man sich auch leicht durch ihre wirkliche Umformung überzeugen.

§. 14.

Die Formeln (17.) können, wenn man darin $\dfrac{K}{2} - u$ für u setzt, auch also dargesellt werden:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{K}{2}+u\right) = \frac{\operatorname{cn}\left(\frac{K}{2}-u\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{K}{2}-u\right)}, \qquad \operatorname{tn}\left(\frac{K}{2}+u\right) = \frac{1}{k'\operatorname{tn}\left(\frac{K}{2}-u\right)},$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{K}{2}+u\right) = \frac{k'\operatorname{sn}\left(\frac{K}{2}-u\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{K}{2}-u\right)}, \qquad \operatorname{dn}\left(\frac{K}{2}+u\right) = \frac{k'}{\operatorname{dn}\left(\frac{K}{2}-u\right)}.$$

Ist also ein Argument gröfser als $\dfrac{K}{2}$ und kleiner als K, so können die Functionen jenes Argumentes den vorstehenden Formeln gemäfs, leicht aus den Functionen eines Argumentes berechnet werden, welches

um eben soviel kleiner ist als $\frac{K}{2}$, wie das gegebene Argument gröfser ist als $\frac{K}{2}$. Wir werden bald sehen, dafs überhaupt, wenn die Functionen aller Argumente, welche nicht gröfser als $\frac{K}{2}$ sind, für einen gegebenen Modul k bereits berechnet worden sind, daraus die Functionen beliebig grofser Argumente für denselben Modul k sehr leicht hergeleitet werden können, und es also eigentlich nur auf die Berechnung der Werthe der Modular-Functionen solcher Argumente ankommt, welche nicht gröfser sind, als die Hälfte des dem Modul zugehörigen Modular-Quadranten.

Setzt man in den beiden letzten Formeln $u=0$, so erhält man $tn^2\frac{K}{2}=\frac{1}{k'}$ und $dn^2\frac{K}{2}=k'$, und hieraus folgt

$$26.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}\frac{K}{2}=\sqrt{\frac{1}{1+k'}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1+k}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1-k}{2}\right)}}=\frac{\sqrt{\left(\frac{1+k}{2}\right)}-\sqrt{\left(\frac{1-k}{2}\right)}}{k}, \\ \operatorname{cn}\frac{K}{2}=\sqrt{\frac{k'}{1+k'}}, \\ \operatorname{tn}\frac{K}{2}=\sqrt{\frac{1}{k'}}, \\ \operatorname{dn}\frac{K}{2}=\sqrt{k'}. \end{cases}$$

§. 15.

Die Amplituden und Modular-Functionen eines reellen Argumentes überhaupt zurückgeführt auf solche, deren Argument nicht $>\frac{K}{2}$ ist.

Setzt man in den Formeln (16.) für u an die Stelle $-u$, so erhält man:

$$\operatorname{am}(K+u)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tang}(k'\operatorname{tn}u),$$

oder

$$\operatorname{am}(K+u)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{k'\operatorname{sn}u}{\operatorname{dn}u}\right),$$

$$\operatorname{am}(K+u)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u}\right),$$

Addirt man diese Formeln zu den Formeln (16.), so erhält man

27. $\operatorname{am}(K+u)+\operatorname{am}(K-u)=\pi$, oder $\operatorname{am}(K+u)=\pi-\operatorname{am}(K-u)$.

Setzt man hierin $K-u$ für u, so entsteht

$$\operatorname{am}(2K-u)=\pi-\operatorname{am}u;$$

wird hierin $-u$ für u gesetzt, so erhält man

$$\operatorname{am}(2K+u) = \pi + \operatorname{am} u;$$

so oft also das Argument u um $2K$ vergrößert wird, eben so oft vergrößert sich auch $\operatorname{am} u$ um π; daher ist überhaupt, wenn m eine ganze Zahl bedeutet,

$$28. \quad \operatorname{am}(u+2mK) = m\pi + \operatorname{am} u.$$

Setzt man in dieser Formel noch $u \pm K$ für u, so verwandelt sie sich in

$$29. \quad \begin{cases} \operatorname{am}[u+(2m\pm 1)K] = (2m\pm 1)\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tang}(k' \operatorname{tn} u) & \text{und} \\ \operatorname{am}[(2m\pm 1)K - u] = (2m\pm 1)\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang}(k' \operatorname{tn} u). \end{cases}$$

Der Gleichung (28.) gemäfs ist auch $\sin \operatorname{am}(u+2mK) = \sin(m\pi + \operatorname{am} u) = (-1)^m \sin \operatorname{am} u$, oder auch

$$30. \quad \operatorname{sn}(u+2mK) = (-1)^m . \operatorname{sn} u.$$

Ferner ist $\cos \operatorname{am}(u+2mK) = \cos(m\pi + \operatorname{am} u) = (-1)^m \cos \operatorname{am} u$, oder auch

$$31. \quad \operatorname{cn}(u+2mK) = (-1)^m . \operatorname{cn} u.$$

Dividirt man (30.) durch (31.), so erhält man

$$32. \quad \operatorname{tn}(u+2mK) = \operatorname{tn} u.$$

Differenziirt man endlich die Formel (28.) und wendet man dabei die Formel (7.) des §. 9. an, so erhält man auf der Stelle:

$$33. \quad \operatorname{dn}(u+2mK) = \operatorname{dn} u.$$

Die Differente eines reellen Argumentes ist überhaupt immer positiv, sie nimmt beim Wachsen des Argumentes anfangs ab von Eins bis k' und dann wieder zu von k' bis Eins, und dieses Abwechseln im Ab- und Zunehmen geht ohne Ende fort. Zu den Formeln (30.)—(33.) führen auch die schon oben gefundenen Formeln

$$\operatorname{sn}(K+u) = \operatorname{sn}(K-u), \qquad \operatorname{dn}(K+u) = \operatorname{dn}(K-u),$$
$$\operatorname{cn}(K+u) = -\operatorname{cn}(K-u), \qquad \operatorname{tn}(K+u) = -\operatorname{tn}(K-u).$$

Setzt man hierin $K-u$ für u, so werden sie

$$\operatorname{sn}(2K-u) = \operatorname{sn} u, \quad \operatorname{cn}(2K-u) = -\operatorname{cn} u, \quad \operatorname{dn}(2K-u) = \operatorname{dn} u,$$
$$\operatorname{tn}(2K-u) = -\operatorname{tn} u,$$

und wird hierin noch $-u$ für u gesetzt, so erhält man

$$\operatorname{sn}(2K+u) = -\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{cn}(2K+u) = -\operatorname{cn} u, \quad \operatorname{tn}(2K+u) = \operatorname{tn} u,$$
$$\operatorname{dn}(2K+u) = \operatorname{dn} u.$$

Hieraus schliefst man aber ohne Weiteres die Formeln (30.)—(33.). Es ist also auch

$$34.\begin{cases} \operatorname{sn}(2K)=0, & \operatorname{cn}(2K)=-1, & \operatorname{tn}(2K)=0, & \operatorname{dn}(2K)=1, \\ \operatorname{sn}(3K)=-1, & \operatorname{cn}(3K)=0, & \operatorname{tn}(3K)=\frac{1}{0}, & \operatorname{dn}(3K)=k', \\ \operatorname{sn}(4K)=0, & \operatorname{cn}(4K)=+1, & \operatorname{tn}(4K)=0, & \operatorname{dn}(4K)=1, \\ \operatorname{sn}(2mK)=0, & \operatorname{cn}(2mK)=(-1)^m, & \operatorname{tn}(2mK)=0, & \operatorname{dn}(2mK)=1, \\ \operatorname{sn}((2m+1)K)=(-1)^m, & \operatorname{cn}((2m+1)K)=0, & \operatorname{tn}((2m+1)K)=\frac{1}{0}, & \\ & \operatorname{dn}((2m+1)K)=k'. & & \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln (30.)—(33.) noch $K-u$ für u, so erhält man

$$35.\begin{cases} \operatorname{sn}((2m+1)K-u)=(-1)^m.\operatorname{snc}u; & \operatorname{sn}((2m+1)K+u)=(-1)^m.\operatorname{snc}u, \\ \operatorname{cn}((2m+1)K-u)=(-1)^m.\operatorname{cnc}u; & \operatorname{cn}((2m+1)K+u)=(-1)^{m+1}.\operatorname{cnc}u, \\ \operatorname{tn}((2m+1)K-u)=\operatorname{tnc}u; & \operatorname{tn}((2m+1)K+u)=-\operatorname{tnc}u, \\ \operatorname{dn}((2m+1)K-u)=\operatorname{dnc}u; & \operatorname{dn}((2m+1)K+u)=\operatorname{dnc}u. \end{cases}$$

Wenn man in den Formeln (30.)—(33.) setzt $2m$ für m, so hat man

$$\operatorname{sn}(u+4mK)=\operatorname{sn}u, \qquad \operatorname{tn}(u+4mK)=\operatorname{tn}u,$$
$$\operatorname{cn}(u+4mK)=\operatorname{cn}u, \qquad \operatorname{dn}(u+4mK)=\operatorname{dn}u.$$

So oft sich also das gemeinschaftliche Argument u der vier cyklischen Modular-Functionen um $4K$ vergrößert, eben so oft kehren auch gleichzeitig dieselben Werthe dieser Functionen wieder; daher sind die cyklischen Modular-Functionen *periodisch*, wie es auch die cyklischen Potenzial-Functionen sind; der *Umfang* einer jeden solchen reellen Periode ist $4K$, und aus diesem Grunde ist K ein Modular-Quadrant genannt worden.

Zusatz. Dividirt man ein Argument u durch K und multiplicirt man wieder mit $\frac{\pi}{2}$, so hat, wenn $\frac{\pi u}{2K}=\eta u$, wie im §. 10. gesetzt wird,

$\operatorname{sn}u$ einerlei Vorzeichen mit $\sin\eta u$,
$\operatorname{cn}u$ einerlei Vorzeichen mit $\cos\eta u$,
$\operatorname{tn}u$ einerlei Vorzeichen mit $\operatorname{tang}\eta u$,
$\operatorname{dn}u$ einerlei Vorzeichen mit $\sqrt{(1-k^2\sin^2\eta u)}$,

aufserdem nehmen auch die hier einander gegenüber gestellten Functionen gleichzeitig zu und gleichzeitig ab, und wenn u einen von den Werthen $0, K, 2K, 3K, 4K, 5K$ etc. hat, so haben die einander gegenüber gestellten Functionen gleiche Werthe. Es ist also

$\operatorname{sn}u$ gleichartig mit $\sin\eta u$,
$\operatorname{cn}u$ gleichartig mit $\cos\eta u$,
$\operatorname{tn}u$ gleichartig mit $\operatorname{tang}\eta u$,
$\operatorname{dn}u$ gleichartig mit $\sqrt{(1-k^2\sin^2\eta u)}$,

wenn man hier unter Gleichartigkeit versteht die Uebereinstimmung nicht

nur in den Vorzeichen, sondern auch in den Werthen, wenn u irgend ein Vielfaches von K ist.

§. 16.

Die hyperbolischen Modular-Functionen überhaupt.

Setzen wir in den Integralen (1.) des §. 4. $p=+1$, $q=+k^2$, $g=1$, so haben wir die Grundformeln für die hyperbolischen Modular-Functionen. Ein solches Integral ist dann

$$u=\int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1+t^2).\sqrt{(1+k^2t^2)}}},$$

und in ihm ist wieder k zwischen den Grenzen Null und Eins enthalten. Wäre $k=0$, so wäre $u=\int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1+t^2)}}=\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Sin}\,(t)$, und also rückwärts $t=\mathfrak{Sin}\,u$; wäre aber $k=1$, so wäre $u=\int_0 \frac{\partial t}{1+t^2}=\text{arc tang}\,(t)$, und also rückwärts $t=\text{tang}\,u$ oder auch $t=\mathfrak{Sin}\mathfrak{L}\,u$; ist demnach k zwischen den Grenzen Null und Eins enthalten, so ist t zwischen den Grenzen $\mathfrak{Sin}\,u$ und $\mathfrak{Sin}\mathfrak{L}\,u$ und also überhaupt zwischen zwei hyperbolischen Sinus enthalten. Aus dem so eben angeführten Grunde nennen wir t den *hyperbolischen Modular-Sinus* des Argumentes u für den Modul k, $\sqrt{(1+t^2)}$ den *hyperbolischen Modular-Cosinus*, $\frac{t}{\sqrt{(1+t^2)}}$ die *hyperbolische Modular-Tangente* und $\sqrt{(1+k^2t^2)}$ die *hyperbolische Differente* des Argumentes u für den Modul k.

Die folgende Bezeichnung werde angewandt:

$$t=\mathfrak{Sn}\,u,\quad \sqrt{(1+t^2)}=\mathfrak{Cn}\,u,\quad \frac{t}{\sqrt{(1+t^2)}}=\mathfrak{Tn}\,u,\quad \sqrt{(1+k^2t^2)}=\mathfrak{Dn}\,u.$$

Den Zusammenhang unter diesen vier hyperbolischen Modular-Functionen, welche auf dasselbe Argument u und denselben Modul k bezogen sind, drücken aus die Formeln:

$$\mathfrak{Cn}^2u-\mathfrak{Sn}^2u=1,\qquad \mathfrak{Tn}\,u=\frac{\mathfrak{Sn}\,u}{\mathfrak{Cn}\,u},$$

$$\mathfrak{Cn}\,u=\sqrt{(1+\mathfrak{Sn}^2u)},\qquad 1-\mathfrak{Tn}^2u=\frac{1}{\mathfrak{Cn}^2\,u},$$

$$\mathfrak{Sn}\,u=\sqrt{(\mathfrak{Cn}^2\,u-1)},\qquad \frac{1-\mathfrak{Tn}^2\,u}{\mathfrak{Tn}^2\,u}=\frac{1}{\mathfrak{Sn}^2\,u},$$

$$\mathfrak{Dn}\,u=\sqrt{(1+k^2\,\mathfrak{Sn}^2u)}=\sqrt{(k'^2+k^2\,\mathfrak{Cn}^2u)}=\sqrt{(\mathfrak{Cn}^2u-k'^2\,\mathfrak{Sn}^2u)},$$

$$\mathfrak{Dn}\,u=\sqrt{\frac{1-k'^2\,\mathfrak{Tn}^2\,u}{1-\mathfrak{Tn}^2\,u}},$$

$$\mathfrak{Tn}\,u=\sqrt{\frac{\mathfrak{Dn}^2\,u-1}{\mathfrak{Dn}^2\,u-k'^2}}.$$

Nach §. 4. ist ferner

$$\mathfrak{Sn}(-u) = -\mathfrak{Sn}u, \text{ also } \mathfrak{Cn}(-u) = \mathfrak{Cn}u, \quad \mathfrak{Tn}(-u) = -\mathfrak{Tn}u \text{ und}$$
$$\mathfrak{Dn}(-u) = \mathfrak{Dn}u;$$

wird das Argument $u = 0$ gesetzt, so ist

$$\mathfrak{Sn}0 = 0, \quad \mathfrak{Cn}0 = 1, \quad \mathfrak{Tn}0 = 0, \quad \mathfrak{Dn}0 = 1.$$

Nach dem Obigen ist $\mathfrak{Sn}u$ zwischen den Grenzen $\mathfrak{Sin}u$ und $\mathfrak{Sin}\mathfrak{L}u$ enthalten, und da $\mathfrak{L}u > u$, also auch $\mathfrak{Sin}\mathfrak{L}u > \mathfrak{Sin}u$ ist, so ist also

$$\mathfrak{Sin}u < \mathfrak{Sn}u < \mathfrak{Sin}\mathfrak{L}u,$$

folglich

$$\mathfrak{Cos}u < \mathfrak{Cn}u < \mathfrak{Cos}\mathfrak{L}u, \quad \mathfrak{Tang}u < \mathfrak{Tn}u < \mathfrak{Tang}\mathfrak{L}u.$$

Bleibt also das Argument u ungeändert und vergrößert man den Modul k, so vergrößern sich alle vier hyperbolische Modular-Functionen.

§. 17.

Erste Differenziale der hyperbolischen Modular-Functionen.

Wenn man in der Formel $\partial u = \frac{\partial t}{\sqrt{(1+t^2)}\sqrt{(1+k^2t^2)}}$ für t den Werth $\mathfrak{Sn}u$ substituirt, so hat man $\partial u = \frac{\partial \mathfrak{Sn}u}{\mathfrak{Cn}u\,\mathfrak{Dn}u}$, und also rückwärts

$$1. \quad \partial \mathfrak{Sn}u = \mathfrak{Cn}u \,.\, \mathfrak{Dn}u \,.\, \partial u.$$

Differenziirt man die Gleichung $\mathfrak{Cn}^2u - \mathfrak{Sn}^2u = 1$, so erhält man $\mathfrak{Cn}u \,.\, \partial\,\mathfrak{Cn}u = \mathfrak{Sn}u \,.\, \partial\,\mathfrak{Sn}u$ und also

$$2. \quad \partial\,\mathfrak{Cn}u = \mathfrak{Sn}u \,.\, \mathfrak{Dn}u \,.\, \partial u.$$

Differenziirt man den Bruch $\mathfrak{Tn}u = \frac{\mathfrak{Sn}u}{\mathfrak{Cn}u}$, und substituirt man die vorhin gefundenen Werthe, so erhält man

$$3. \quad \partial\,\mathfrak{Tn}u = \frac{\mathfrak{Dn}u}{\mathfrak{Cn}^2u} \,.\, \partial u.$$

Aus der Gleichung $\mathfrak{Dn}^2u = 1 + k^2\mathfrak{Sn}^2u$ folgt $\mathfrak{Dn}u \,.\, \partial\,\mathfrak{Dn}u = k^2\,\mathfrak{Sn}u \,.\, \partial\,\mathfrak{Sn}u$, und also

$$4. \quad \partial\,\mathfrak{Dn}u = k^2\,\mathfrak{Sn}u\,\mathfrak{Cn}u \,.\, \partial u.$$

Wird der Zusammenhang zwischen einer Modular-Function und ihrem Argumente umgekehrt, so dient folgende Bezeichnung:

Ist $t = \mathfrak{Sn}u$, so ist $u = \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Sn}(t)$.
Ist $t = \mathfrak{Cn}u$, so ist $u = \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Cn}(t)$.
Ist $t = \mathfrak{Tn}u$, so ist $u = \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Tn}(t)$.
Ist $t = \mathfrak{Dn}u$, so ist $u = \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Dn}(t)$.

Hiernach können die vorigen Formeln auch also dargestellt werden:

5. $\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Sn}(t) = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1+t^2).\sqrt{(1+k^2t^2)}}} = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{[1+(1+k^2)t^2+k^2t^4]}}$,

6. $\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Cn}(t) = \int_1 \frac{\partial t}{\sqrt{(t^2-1).\sqrt{(k'^2+k^2t^2)}}} = \int_1 \frac{\partial t}{\sqrt{[-k'^2+(k'^2-k^2)t^2+k^2t^4]}}$,

7. $\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Tn}(t) = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1-t^2).\sqrt{(1-k'^2t^2)}}} = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{[1-(1+k'^2)t^2+k'^4t^4]}}$,

8. $\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Dn}(t) = \int_1 \frac{\partial t}{\sqrt{(t^2-1).\sqrt{(t^2-k'^2)}}} = \int_1 \frac{\partial t}{\sqrt{[k'^2-(1+k'^2)t^2+t^4]}}$.

§. 18.

Die Amplitude der hyperbolischen Modular-Functionen.

Die hyperbolischen Modular-Functionen können in Anwendung einer vermittelnden Function auf hyperbolische Potenzial-Functionen zurückgeführt werden. Da nämlich $\mathfrak{Sn}u$ zwischen den Grenzen $\mathfrak{Sin}u$ und $\mathfrak{Sin}\mathfrak{L}u$ enthalten ist, so können wir setzen $\mathfrak{Sn}u = \mathfrak{Sin}\psi$, dann ist aber $\mathfrak{Cn}u = \mathfrak{Cos}\psi$, $\mathfrak{Tn}u = \mathfrak{Tang}\psi$. Der Arcus ψ heifst die *Amplitude* (hyperbolische) des Argumentes u für den Modul k; in Zeichen ist $\psi = \mathfrak{Am}u$, und umgekehrt $u = \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Am}(\psi)$. Hiernach ist also

1. $$\begin{cases} \mathfrak{Sn}u = \mathfrak{Sin}\,\mathfrak{Am}u, & \mathfrak{Tn}u = \mathfrak{Tang}\,\mathfrak{Am}u, \\ \mathfrak{Cn}u = \mathfrak{Cos}\,\mathfrak{Am}u, & \mathfrak{Dn}u = \sqrt{(1+k^2\,\mathfrak{Sin}^2\,\mathfrak{Am}u)}. \end{cases}$$

Weil nach Theil I. §. 5. $\psi = \log\sqrt{\frac{1+\mathfrak{Tang}\psi}{1-\mathfrak{Tang}\psi}} = \log(\mathfrak{Cos}\psi+\mathfrak{Sin}\psi) = \log\frac{1}{\mathfrak{Cos}\psi-\mathfrak{Sin}\psi}$ ist, so ist

2. $$\mathfrak{Am}u = \log\sqrt{\frac{1+\mathfrak{Tn}u}{1-\mathfrak{Tn}u}} = \log(\mathfrak{Cn}u+\mathfrak{Sn}u) = \log\frac{1}{\mathfrak{Cn}u-\mathfrak{Sn}u}.$$

Weil $\mathfrak{Sin}\psi = \text{tang}\,l\psi$, also $l\psi = \text{arc tang}(\mathfrak{Sin}\psi) = \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1+i\,\mathfrak{Sin}\psi}{1-i\,\mathfrak{Sin}\psi}}$ nach Theil I. §. 37. ist, so ist also auch

3. $$l\,\mathfrak{Am}u = \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1+i\,\mathfrak{Sn}u}{1-i\,\mathfrak{Sn}u}}.$$

Da $\mathfrak{Tang}\frac{1}{2}\psi = \sqrt{\frac{\mathfrak{Cos}\psi-1}{\mathfrak{Cos}\psi+1}}$ ist, so ist auch

4. $$\mathfrak{Tang}\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Am}u = \sqrt{\frac{\mathfrak{Cn}u-1}{\mathfrak{Cn}u+1}} = \frac{\mathfrak{Cn}u-1}{\mathfrak{Sn}u} = \frac{\mathfrak{Sn}u}{\mathfrak{Cn}u+1}.$$

Setzt man in der Formel $u = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1+t^2)\sqrt{(1+k^2t^2)}}}$ wirklich $t = \mathfrak{Sin}\psi$, so ist $\partial t = \mathfrak{Cos}\psi.\partial\psi$, und also

5. $$\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Am}(\psi) =$$

$$\int_0 \frac{\partial\psi}{\sqrt{(1+k^2\,\mathfrak{Sin}^2\psi)}} = \int_0 \frac{\partial\psi}{\sqrt{(k'^2+k^2\,\mathfrak{Cos}^2\psi)}} = \int_0 \frac{\partial\psi}{\sqrt{(\mathfrak{Cos}^2\psi-k'^2\,\mathfrak{Sin}^2\psi)}}.$$

Wenn man, wie in §. 9., setzt

$$k=\frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda},\quad k'=\frac{1-\lambda}{1+\lambda},\quad \lambda=\frac{1-k'}{1+k'}=\left(\frac{\sqrt{(1+k)}-\sqrt{(1-k)}}{\sqrt{(1+k)}+\sqrt{(1-k)}}\right)^2,$$

so findet man auch den Ausdruck

$$6.\quad \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Am}(\psi)=\int_0 \frac{(1+\lambda)\,\partial\psi}{\sqrt{(1+2\lambda\,\mathfrak{Cos}\,2\psi+\lambda^2)}}=\int_0 \frac{(1+\lambda)\,\partial\psi}{\sqrt{[(1+\lambda.e^{2\psi})(1+\lambda.e^{-2\psi})]}}.$$

Da $\mathfrak{Sn}(-u)=\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{Am}(-u)=-\mathfrak{Sn}\,u$ ist, so ist $\mathfrak{Sn}\,u=\mathfrak{Sin}(-\mathfrak{Am}(-u))=\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{Am}\,u$, und also $\mathfrak{Am}\,u=-\mathfrak{Am}(-u)$ oder $\mathfrak{Am}(-u)=-\mathfrak{Am}\,u$; ferner ist

$$\mathfrak{Am}\,0=0.$$

Da $\mathfrak{Sn}\,u$ oder $\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{Am}\,u$ zwischen den Grenzen $\mathfrak{Sin}\,u$ und $\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}\,u$ enthalten ist, so ist also $\mathfrak{Am}\,u$ zwischen u und $\mathfrak{L}\,u$ enthalten, und da $\mathfrak{L}\,u>u$ ist, so ist

$$7.\quad u<\mathfrak{Am}\,u<\mathfrak{L}\,u;$$

vergröfsert man also den Modul k, während das Argument u unverändert bleibt, so nähert sich $\mathfrak{Am}\,u$ der Grenze $\mathfrak{L}\,u$, d. h. es wird auch $\mathfrak{Am}\,u$ gröfser.

Setzt man in der Formel (5.) zuerst $k=0$, so hat man $\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Am}(\psi)=\int_0 \partial\psi=\psi$; setzt man aber $k=1$, so hat man $\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Am}(\psi)=\int_0 \frac{\partial\psi}{\mathfrak{Cos}\,\psi}=l\psi$; ist also k zwischen den Grenzen Null und Eins enthalten, so ist $\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Am}(\psi)$ zwischen den Grenzen ψ und $l\psi$ enthalten, und da $l\psi<\psi$ ist, so ist

$$8.\quad \psi>\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Am}(\psi)>l\psi;$$

wird also der Modul vergröfsert, während die Amplitude ψ unverändert bleibt, so verkleinert sich $\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Am}(\psi)$.

Differenziirt man die Gleichung $\mathfrak{Sn}\,u=\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{Am}\,u$, so erhält man $\mathfrak{Cos}\,\mathfrak{Am}\,u.\partial\,\mathfrak{Am}\,u=\mathfrak{Cn}\,u.\mathfrak{Dn}\,u.\partial u$, und da $\mathfrak{Cos}\,\mathfrak{Am}\,u=\mathfrak{Cn}\,u$ ist, so ist

$$9.\quad \partial\,\mathfrak{Am}\,u=\mathfrak{Dn}\,u.\partial u.$$

§. 19.

Ausdrücke für die hyperbolischen Modular-Functionen eines Binoms.

Setzt man auch in den Formeln des §. 4. und §. 5. jetzt $p=+1$ und $q=k^2$, ferner $x=\mathfrak{Sn}\,a$ und $y=\mathfrak{Sn}\,b$, so ist $z=\mathfrak{Sn}(a+b)$, und also

$$1.\quad \begin{cases} \mathfrak{Sn}(a+b)=\dfrac{\mathfrak{Sn}\,a\,\mathfrak{Cn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,b+\mathfrak{Sn}\,b\,\mathfrak{Cn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,a}{1-k^2\,\mathfrak{Sn}^2\,a\,\mathfrak{Sn}^2\,b}, \\ \mathfrak{Sn}(a-b)=\dfrac{\mathfrak{Sn}\,a\,\mathfrak{Cn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,b-\mathfrak{Sn}\,b\,\mathfrak{Cn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,a}{1-k^2\,\mathfrak{Sn}^2\,a\,\mathfrak{Sn}^2\,b}. \end{cases}$$

Für die Cosinus erhält man die Formeln

$$2.\quad \begin{cases} \mathfrak{Cn}(a+b) = \dfrac{\mathfrak{Cn}a\,\mathfrak{Cn}b + \mathfrak{Sn}a\,\mathfrak{Sn}b\,\mathfrak{Dn}a\,\mathfrak{Dn}b}{1-k^2\,\mathfrak{Sn}^2a\,\mathfrak{Sn}^2b}, \\ \mathfrak{Cn}(a-b) = \dfrac{\mathfrak{Cn}a\,\mathfrak{Cn}b - \mathfrak{Sn}a\,\mathfrak{Sn}b\,\mathfrak{Dn}a\,\mathfrak{Dn}b}{1-k^2\,\mathfrak{Sn}^2a\,\mathfrak{Sn}^2b}. \end{cases}$$

Werden die Formeln (1.) durch (2.) dividirt, so erhält man

$$3.\quad \begin{cases} \mathfrak{Tn}(a+b) = \dfrac{\mathfrak{Tn}a\,\mathfrak{Dn}b + \mathfrak{Tn}b\,\mathfrak{Dn}a}{1+\mathfrak{Tn}a\,\mathfrak{Tn}b\,\mathfrak{Dn}a\,\mathfrak{Dn}b}, \\ \mathfrak{Tn}(a-b) = \dfrac{\mathfrak{Tn}a\,\mathfrak{Dn}b - \mathfrak{Tn}b\,\mathfrak{Dn}a}{1-\mathfrak{Tn}a\,\mathfrak{Tn}b\,\mathfrak{Dn}a\,\mathfrak{Dn}b}. \end{cases}$$

Die allgemeinen Formeln für die Differenten sind

$$4.\quad \begin{cases} \mathfrak{Dn}(a+b) = \dfrac{\mathfrak{Dn}a\,\mathfrak{Dn}b + k^2\,\mathfrak{Sn}a\,\mathfrak{Sn}b\,\mathfrak{Cn}a\,\mathfrak{Cn}b}{1-k^2\,\mathfrak{Sn}^2a\,\mathfrak{Sn}^2b}, \\ \mathfrak{Dn}(a-b) = \dfrac{\mathfrak{Dn}a\,\mathfrak{Dn}b - k^2\,\mathfrak{Sn}a\,\mathfrak{Sn}b\,\mathfrak{Cn}a\,\mathfrak{Cn}b}{1-k^2\,\mathfrak{Sn}^2a\,\mathfrak{Sn}^2b}. \end{cases}$$

Setzt man $\mathfrak{Tang}\alpha = \mathfrak{Tn}a\,\mathfrak{Dn}b$ und $\mathfrak{Tang}\beta = \mathfrak{Tn}b\,\mathfrak{Dn}a$, so ist $\mathfrak{Tn}(a+b) = \dfrac{\mathfrak{Tang}\alpha + \mathfrak{Tang}\beta}{1+\mathfrak{Tang}\alpha\,.\,\mathfrak{Tang}\beta}$, und also $\mathfrak{Tang}\,\mathfrak{Am}(a+b) = \mathfrak{Tang}(\alpha+\beta)$, oder $\mathfrak{Am}(a+b) = \alpha+\beta$. Ganz eben so findet man $\mathfrak{Am}(a-b) = \alpha-\beta$, und es ist also

$$5.\quad \begin{cases} \mathfrak{Am}(a+b) = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}(\mathfrak{Tn}a\,\mathfrak{Dn}b) + \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}(\mathfrak{Tn}b\,\mathfrak{Dn}a), \\ \mathfrak{Am}(a-b) = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}(\mathfrak{Tn}a\,\mathfrak{Dn}b) - \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}(\mathfrak{Tn}b\,\mathfrak{Dn}a). \end{cases}$$

Es können diese beiden Formeln auch also dargestellt werden:

$$6.\quad \begin{cases} \mathfrak{Tang}\left(\dfrac{\mathfrak{Am}(a+b)+\mathfrak{Am}(a-b)}{2}\right) = \mathfrak{Tn}a\,\mathfrak{Dn}b, \\ \mathfrak{Tang}\left(\dfrac{\mathfrak{Am}(a+b)-\mathfrak{Am}(a-b)}{2}\right) = \mathfrak{Tn}b\,\mathfrak{Dn}a. \end{cases}$$

Setzt man $b = a$, so erhält man die specielle Formel

$$\mathfrak{Tang}\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Am}\,2a = \mathfrak{Tn}a\,\mathfrak{Dn}a.$$

Diese Relationen mögen hier hinreichen; wir werden bald sehen, dafs man die noch fehlenden auch sehr leicht aus den analogen Formeln herleiten kann, welche für die cyklischen Modular-Functionen gelten.

§. 20.

Imaginäre Relationen zwischen den cyklischen und hyperbolischen Modular-Functionen.

Es sei $z = \mathrm{sn}\,u$ oder $u = \int_0 \dfrac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}\sqrt{(1-k^2z^2)}}$, dann ist $ui = \int_0 \dfrac{i\,\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}\sqrt{(1-k^2z^2)}}$; wird nun $iz = t$, also $i\,\partial z = \partial t$ gesetzt, so ist $-z^2 = t^2$, und da für $z = 0$ auch $t = 0$ ist, so ist

$$ui = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1+t^2)}\sqrt{(1+k^2t^2)}}, \text{ oder } t = \mathfrak{Sn}(ui),$$

und da $t = iz = i.\operatorname{sn} u$ ist, so ist

$$1. \quad \begin{cases} \mathfrak{Sn}(ui) = i.\operatorname{sn} u, \text{ hieraus folgt} \\ \mathfrak{Cn}(ui) = \operatorname{cn} u, \quad \mathfrak{Tn}(ui) = i.\operatorname{tn} u, \quad \mathfrak{Dn}(ui) = \operatorname{dn} u. \end{cases}$$

Diesen Formeln gemäfs können die hyperbolischen Modular-Functionen des imaginären Argumentes ui sehr leicht auf cyklische Modular-Functionen des reellen Argumentes u, ohne den Modul zu verändern, zurückgeführt werden.

Setzt man in der Gleichung $\mathfrak{Sn}(ui) = i\operatorname{sn} u$ für u an die Stelle ui, so hat man, da $i^2 = -1$ ist, $\mathfrak{Sn}(-u) = i\operatorname{sn}(ui)$, also $-\mathfrak{Sn}\,u = i\operatorname{sn}(ui)$, oder

$$2. \quad \begin{cases} \operatorname{sn}(ui) = i.\mathfrak{Sn}\,u, \text{ und also} \\ \operatorname{cn}(ui) = \mathfrak{Cn}\,u, \quad \operatorname{tn}(ui) = i.\mathfrak{Tn}\,u, \quad \operatorname{dn}(ui) = \mathfrak{Dn}\,u. \end{cases}$$

Die cyklischen Modular-Functionen werden also eben so auf die hyperbolischen, wie umgekehrt diese auf jene zurückgeführt, wenn das Argument imaginär ist, und die Form ui hat.

Da $\mathfrak{Sn}(ui) = \mathfrak{Sin}\,\mathfrak{Am}(ui)$ ist, so ist $\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{Am}(ui) = i\sin\operatorname{am} u = \mathfrak{Sin}(i\operatorname{am} u)$ und also

$$3. \quad \mathfrak{Am}(ui) = i.\operatorname{am} u; \text{ eben so findet man } \operatorname{am}(ui) = i.\mathfrak{Am}\,u.$$

Setzt man jedes Glied der Gleichung $\mathfrak{Sn}(ui) = i.\operatorname{sn} u = ti$, so ist $ui = \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Sn}(ti)$ und $u = \arg\operatorname{sn}(t)$, daher ist

$$4. \quad \begin{cases} \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Sn}(ti) = i.\arg\operatorname{sn}(t); \text{ eben so findet man} \\ \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Cn}(t) = i.\arg\operatorname{cn}(t), \text{ wenn } t<1; \text{ ferner} \\ \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Tn}(ti) = i.\arg\operatorname{tn}(t), \\ \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Dn}(t) = i.\arg\operatorname{dn}(t), \text{ wenn } t<1 \text{ ist} \\ \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Am}(ti) = i.\arg\operatorname{am}(t). \end{cases}$$

In ähnlicher Weise findet man auch umgekehrt

$$5. \quad \begin{cases} \arg\operatorname{sn}(ti) = i.\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Sn}(t), \\ \arg\operatorname{cn}(t) = i.\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Cn}(t) \text{ für } t>1, \\ \arg\operatorname{tn}(ti) = i.\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Tn}(t), \\ \arg\operatorname{dn}(t) = i.\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Dn}(t) \text{ für } t>1, \\ \arg\operatorname{am}(ti) = i.\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Am}(t). \end{cases}$$

§. 21.

Hyperbolische Modular-Functionen der Argumente von der Form $u+niK$ und $a\pm bi$.

Nach §. 20. ist $\mathfrak{Sn}(iK)=i\,\mathrm{sn}K$, und da $\mathrm{sn}K=1$ ist, so ist

$$1.\quad \begin{cases} \mathfrak{Sn}(iK)=i, & \mathfrak{Tn}(iK)=\frac{1}{0}, \\ \mathfrak{Cn}(iK)=0, & \mathfrak{Dn}(iK)=k'. \end{cases}$$

Setzt man nun in den Formeln des §. 19. für $\mathfrak{Sn}(a\pm b)$, $\mathfrak{Cn}(a\pm b)$, $\mathfrak{Tn}(a\pm b)$ und $\mathfrak{Dn}(a\pm b)$ jetzt $a=iK$ und $b=u$, so hat man

$$2.\quad \begin{cases} \mathfrak{Sn}(iK-u)=\frac{i\,\mathfrak{Cn}u}{\mathfrak{Dn}u}, & \mathfrak{Sn}(iK+u)=\frac{i\,\mathfrak{Cn}u}{\mathfrak{Dn}u}, \\ \mathfrak{Cn}(iK-u)=\frac{k'.\mathfrak{Sn}u}{i.\mathfrak{Dn}u}, & \mathfrak{Cn}(iK+u)=\frac{ik'.\mathfrak{Sn}u}{\mathfrak{Dn}u}, \\ \mathfrak{Tn}(iK-u)=-\frac{1}{k'\,\mathfrak{Tn}u}, & \mathfrak{Tn}(iK+u)=\frac{1}{k'\,\mathfrak{Tn}u}, \\ \mathfrak{Dn}(iK-u)=\frac{k'}{\mathfrak{Dn}u}, & \mathfrak{Dn}(iK+u)=\frac{k'}{\mathfrak{Dn}u}. \end{cases}$$

Multiplicirt man die Gleichung $\mathrm{sn}(u+2mK)=(-1)^m\,\mathrm{sn}u$ mit i, so erhält man $\mathfrak{Sn}(ui+2miK)=(-1)^m.\mathfrak{Sn}(ui)$, und wird hierin $\frac{u}{i}$ für u gesetzt, so entsteht

$$3.\quad \mathfrak{Sn}(u+2miK)=(-1)^m.\mathfrak{Sn}u.$$

Da $\mathrm{cn}(u+2mK)=(-1)^m\,\mathrm{cn}u$, ferner $\mathfrak{Cn}(ui+2miK)=\mathrm{cn}(u+2mK)$ und $\mathfrak{Cn}(ui)=\mathrm{cn}u$ ist, so ist also $\mathfrak{Cn}(ui+2miK)=(-1)^m.\mathfrak{Cn}(ui)$, und diese Formel verwandelt sich, wenn $\frac{u}{i}$ für u gesetzt wird, in

$$4.\quad \mathfrak{Cn}(u+2miK)=(-1)^m.\mathfrak{Cn}u.$$

Ferner erhält man für die Tangenten

$$5.\quad \mathfrak{Tn}(u+2miK)=\mathfrak{Tn}u,$$

und für die Differenten hat man

$$6.\quad \mathfrak{Dn}(u+2miK)=\mathfrak{Dn}u.$$

Da diesen Formeln gemäfs $\mathfrak{Sn}(u+4miK)=\mathfrak{Sn}u$, $\mathfrak{Cn}(u+4miK)=\mathfrak{Cn}u$, $\mathfrak{Tn}(u+4miK)=\mathfrak{Tn}u$ und $\mathfrak{Dn}(u+4miK)=\mathfrak{Dn}u$ ist, so sind die hyperbolischen Modular-Functionen periodisch, *der Umfang einer jeden Periode ist imaginär* und $=4iK$.

Multiplicirt man die Gleichung $\mathrm{am}(K+u)=\frac{\pi}{2}+\mathrm{arc\,tang}(k'\,\mathrm{tn}u)$ mit i, so erhält man sofort $\mathfrak{Am}(iK+ui)=\frac{\pi i}{2}+\mathfrak{Arc\,Tang}(k'\,\mathfrak{Tn}(ui))$ und also auch

$$7.\quad \begin{cases} \mathfrak{Am}(iK+u) = \frac{\pi i}{2} + \mathfrak{Arc\,Tang}(k'\,\mathfrak{Tn}\,u), \text{ wie auch} \\ \mathfrak{Am}(iK-u) = \frac{\pi i}{2} - \mathfrak{Arc\,Tang}(k'\,\mathfrak{Tn}\,u), \\ \mathfrak{Am}(u-iK) = -\frac{\pi i}{2} + \mathfrak{Arc\,Tang}(k'\,\mathfrak{Tn}\,u). \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$8.\quad \begin{cases} \mathfrak{Am}(iK+u) + \mathfrak{Am}(iK-u) = \pi i \text{ und} \\ \mathfrak{Am}(u+iK) + \mathfrak{Am}(u-iK) = 2.\mathfrak{Arc\,Tang}(k'\,\mathfrak{Tn}\,u). \end{cases}$$

Aus der Formel (28.) des §. 15. erhält man sofort

$$9.\quad \mathfrak{Am}(u+2miK) = m\pi i + \mathfrak{Am}\,u.$$

Setzt man in den Formeln des §. 11. nur ai für a und bi für b, so erhält man ohne Weiteres die Formeln des §. 19.; läfst man aber a reell, und setzt man blofs bi für b, so erhält man

$$10.\quad \begin{cases} \mathrm{sn}(a+bi) = \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathfrak{Cn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,b + i\,\mathfrak{Sn}\,b.\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{1+k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathfrak{Sn}^2\,b}, \\ \mathrm{sn}(a-bi) = \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathfrak{Cn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,b - i\,\mathfrak{Sn}\,b.\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{1+k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathfrak{Sn}^2\,b}; \end{cases}$$

$$11.\quad \begin{cases} \mathrm{cn}(a+bi) = \frac{\mathrm{cn}\,a\,\mathfrak{Cn}\,b - i.\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathfrak{Sn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,b}{1+k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathfrak{Sn}^2\,b}, \\ \mathrm{cn}(a-bi) = \frac{\mathrm{cn}\,a\,\mathfrak{Cn}\,b + i.\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathfrak{Sn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,b}{1+k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathfrak{Sn}^2\,b}; \end{cases}$$

$$12.\quad \begin{cases} \mathrm{dn}(a+bi) = \frac{\mathrm{dn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,b - ik^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathfrak{Sn}\,b\,\mathfrak{Cn}\,b}{1+k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathfrak{Sn}^2\,b}, \\ \mathrm{dn}(a-bi) = \frac{\mathrm{dn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,b + ik^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathfrak{Sn}\,b\,\mathfrak{Cn}\,b}{1+k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathfrak{Sn}^2\,b}. \end{cases}$$

Für die Amplituden hat man die Formeln

$$13.\quad \begin{cases} \mathrm{am}(a+bi) = \mathrm{arc\,tang}(\mathrm{tn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,b) + i\,\mathfrak{Arc\,Tng}(\mathfrak{Tn}\,b.\,\mathrm{dn}\,a), \\ \mathrm{am}(a-bi) = \mathrm{arc\,tang}(\mathrm{tn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,b) - i\,\mathfrak{Arc\,Tng}(\mathfrak{Tn}\,b.\,\mathrm{dn}\,a), \end{cases}$$

und da überhaupt $\mathfrak{Arc\,Tang}(t) = \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}(t)$ ist, so können diese beiden Formeln auch also dargestellt werden:

$$\mathrm{am}(a+bi) = \mathrm{arc\,tang}(\mathrm{tn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,b) + i\,\mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}(\mathfrak{Tn}\,b\,\mathrm{dn}\,a),$$
$$\mathrm{am}(a-bi) = \mathrm{arc\,tang}(\mathrm{tn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,b) - i\,\mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}(\mathfrak{Tn}\,b\,\mathrm{dn}\,a).$$

Zweiter Abschnitt.

§. 22.

Einfache Relationen unter den cyklischen und hyperbolischen Modular-Functionen in reellen Formen.

So wie die cyklischen und hyperbolischen Potenzial-Functionen ohne alle imaginären Ausdrücke auf einander zurückgeführt werden können, so können auch die cyklischen und hyperbolischen Modular-Functionen mit gänzlicher Vermeidung imaginärer Formen auf einander zurückgeführt werden; und wie sich bei jener Zurückführung (Theil I. §. 37.) eine Reciprocität zu erkennen gab, so stellt sich auch bei dieser eine nicht minder einfache Reciprocität ein.

Nach §. 8. ist $\arg \mathrm{tn}(t) = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1+t^2)}\sqrt{(1+k'^2 t^2)}}$, und wird in dieser Gleichung der Modul k mit dem conjugirten k' vertauscht, so ist:

$$\arg \mathrm{tn}'(t) = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1+t^2)}\sqrt{(1+k^2 t^2)}},$$

und da nach §. 17. auch

$$\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Sn}(t) = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1+t^2)}\sqrt{(1+k^2 t^2)}}$$

ist, so ist also $\arg \mathrm{tn}'(t) = \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Sn}(t)$. Setzt man jedes dieser beiden gleichen Argumente $= u$, so ist $t = tn' u$ und auch $t = \mathfrak{Sn}\, u$, folglich haben wir die einfache Relation:

$$\mathfrak{Sn}\, u = \mathrm{tn}' u,$$

wodurch der hyperbolische Sinus des Argumentes u für einen Modul k auf die cyklische Tangente desselben Argumentes mit dem conjugirten Modul k' zurückgeführt wird. Aus dieser Gleichung folgt $\sqrt{(1+\mathfrak{Sn}^2 u)} = \sqrt{(1+\mathrm{tn}'^2 u)}$, oder auch

$$\mathfrak{Cn}\, u = \frac{1}{\mathrm{cn}' u}.$$

Wird hierdurch die vorige Gleichung dividirt, so erhält man $\mathfrak{Tn}\, u = \mathrm{sn}'.u$. Endlich ist $\sqrt{(1+k^2\,\mathfrak{Sn}^2 u)} = \sqrt{(1+k^2\,\mathrm{tn}'^2 u)}$, oder auch

$$\mathfrak{Dn}\, u = \frac{\mathrm{dn}' u}{\mathrm{cn}' u} = \frac{1}{\mathrm{snc}' u}.$$

Sollen sich die hyperbolischen Functionen $\mathfrak{Sn}\, u$, $\mathfrak{Cn}\, u$, $\mathfrak{Dn}\, u$, $\mathfrak{Tn}\, u$ und $\mathfrak{Am}\, u$ nicht mehr auf den Modul k, sondern auf den conjugirten Modul k' beziehen, so ändern wir ihre Bezeichnung auf ähnliche Art, wie bei den cyklischen Functionen, ab in $\mathfrak{Sn}'u$, $\mathfrak{Cn}'u$, $\mathfrak{Dn}'u$, $\mathfrak{Tn}'u$ und $\mathfrak{Am}'u$. Machen

wir von dieser Bezeichnung Gebrauch, und vertauschen wir in den vorhin entwickelten vier Formeln die beiden conjugirten Modul k und k' mit einander, so erhalten wir auf der Stelle noch vier neue Formeln, und wenn wir dieselben den vorigen in folgender Weise gegenüberstellen:

$$1.\quad \begin{cases} \mathfrak{Sn}\,u = \mathrm{tn}'u & \text{und} \quad \mathrm{sn}\,u = \mathfrak{Tn}'u, \\ \mathfrak{Cn}\,u = \dfrac{1}{\mathrm{cn}'u} & \text{und} \quad \mathrm{cn}\,u = \dfrac{1}{\mathfrak{Cn}'u}, \\ \mathfrak{Tn}\,u = \mathrm{sn}'u & \text{und} \quad \mathrm{tn}\,u = \mathfrak{Sn}'u, \\ \mathfrak{Dn}\,u = \dfrac{\mathrm{dn}'u}{\mathrm{cn}'u} & \text{und} \quad \mathrm{dn}\,u = \dfrac{\mathfrak{Dn}'u}{\mathfrak{Cn}'u}, \end{cases}$$

so sehen wir, dafs die hyperbolischen Modular-Functionen durch diese Formeln ohne alle imaginäre Formeln gerade eben so auf die cyklischen Modular-Functionen zurückgeführt werden, wie umgekehrt diese auf jene. Auch wird man die Aehnlichkeit nicht übersehen, welche zwischen diesen Formeln und denjenigen Statt findet, wodurch (in Theil I. §. 37.) die hyperbolischen Potenzial-Functionen auf die cyklischen, und umgekehrt, in reellen Formen zurückgeführt werden.

Aus den vorigen Formeln folgt noch

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{Cn}\,u-1}{\mathfrak{Cn}\,u+1}} = \sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}'u}{1+\mathrm{cn}'u}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{Cn}'u-1}{\mathfrak{Cn}'u+1}},$$

oder, was einerlei damit ist

$$2.\quad \mathfrak{Tang}\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Am}\,u = \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\,\mathrm{am}'u \quad \text{und} \quad \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\,\mathrm{am}\,u = \mathfrak{Tang}\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Am}'u.$$

Diese Formeln lassen sich auch kurz also herleiten. Aus den Formeln (1.) folgt

$$\mathfrak{Tn}\,u\,\mathfrak{Dn}\,u = \mathrm{tn}'u\,\mathrm{dn}'u \quad \text{und} \quad \mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u = \mathfrak{Tn}'u\,\mathfrak{Dn}'u,$$

und da nach §. 12. ist $\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u = \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\,\mathrm{am}\,2u$, also $\mathrm{tn}'u\,\mathrm{dn}'u = \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\,\mathrm{am}'2u$, ferner nach §. 19. ist $\mathfrak{Tn}\,u\,\mathfrak{Dn}\,u = \mathfrak{Tang}\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Am}\,2u$, also $\mathfrak{Tn}'u\,\mathfrak{Dn}'u = \mathfrak{Tang}\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Am}'2u$, so ist

$$\mathfrak{Tang}\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Am}\,2u = \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\,\mathrm{am}'2u \quad \text{und} \quad \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\,\mathrm{am}\,2u = \mathfrak{Tang}\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Am}'2u,$$

und diese Formeln fallen mit (2.) zusammen, wenn man darin nur noch $\frac{u}{2}$ für u setzt. Auch unter den cyklischen und hyperbolischen Amplituden desselben Arguments giebt es sehr einfache Relationen, wodurch sie auf einander zurückgeführt werden. Setzt man für den Augenblick $\mathrm{am}'u = \Phi'$, dann ist $\mathrm{tn}'u = \mathrm{tang}\,\mathrm{am}'u = \mathrm{tang}\,\Phi' = \mathfrak{Sin}\,\mathfrak{l}\,\Phi'$ und da auch $\mathfrak{Sn}\,u = \mathrm{tn}'u$ ist, so ist also $\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{Am}\,u = \mathfrak{Sin}\,\mathfrak{l}\,\Phi'$, oder einfacher $\mathfrak{Am}\,u = \mathfrak{l}\,\Phi'$, und folglich

$$3.\quad \mathfrak{Am}\,u = \mathfrak{l}\,\mathrm{am}'u, \quad \text{eben so findet man} \quad \mathrm{am}\,u = l\,\mathfrak{Am}'u.$$

Vertauscht man noch die beiden conjugirten Modul, so hat man

$$\mathfrak{Am}'u = \mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u \quad \text{und} \quad \mathrm{am}'u = l\,\mathfrak{Am}\,u.$$

Anmerkung. Setzt man den Modul $k=0$, so wird $\mathrm{am}\,u = u$, also ist $\mathfrak{L}u = \mathfrak{Am}\,u$ für den Modul $=1$ und $lu = \mathrm{am}\,u$ für den Modul $=1$.

§. 23.

Wir machen von diesen letzten Formeln sogleich Gebrauch. Vertauscht man in den Formeln (5.) des §. 19. die beiden conjugirten Modul, so sind sie

$$\mathfrak{Am}'(a \pm b) = \mathfrak{Arc\,Tang}(\mathfrak{Tn}'a\,\mathfrak{Dn}'b) \pm \mathfrak{Arc\,Tang}(\mathfrak{Tn}'b\,\mathfrak{Dn}'a).$$

Es ist aber $\mathfrak{Tn}'a.\mathfrak{Dn}'b = \mathrm{sn}\,a.\frac{\mathrm{dn}\,b}{\mathrm{cn}\,b} = \frac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{snc}\,b}$ und $\mathfrak{Tn}'b.\mathfrak{Dn}'a = \frac{\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{snc}\,a}$, $\mathfrak{Am}'(a \pm b) = \mathfrak{L}\,\mathrm{am}(a \pm b)$, und $\mathfrak{Arc\,Tang}(t) = \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}(t)$, folglich haben wir

$$1.\quad \begin{cases} \mathfrak{L}\,\mathrm{am}(a+b) = \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\frac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{snc}\,b}\right) + \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\frac{\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{snc}\,a}\right), \\ \mathfrak{L}\,\mathrm{am}(a-b) = \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\frac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{snc}\,b}\right) - \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\frac{\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{snc}\,a}\right). \end{cases}$$

Damit der erste Theil dieser Formel reell sei, mufs $\frac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{snc}\,b}$ als cyklischer Sinus nicht >1, und auch nicht $=1$ sein, weil $\mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}(1) = \mathfrak{L}\frac{\pi}{2}$ unendlich ist; setzen wir aber $\mathrm{snc}\,b > \mathrm{sn}\,a$, so mufs $K-b>a$ und also sein

$$a+b<K.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so ist auch $K-a>b$, also $\mathrm{snc}\,a > \mathrm{sn}\,b$, folglich $\frac{\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{snc}\,a}<1$, und also auch der zweite Theil der Formeln (1.) reell. Beide Formeln (1.) sind also reell, wenn $a+b<K$ ist. Setzt man in den Formeln (1.) noch $K-a$ für a, so verwandelt sich $a+b$ in $K-(a-b)$ und $a-b$ in $K-(a+b)$, und es ist also auch

$$2.\quad \begin{cases} \mathfrak{L}\,\mathrm{amc}(a+b) = \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\frac{\mathrm{snc}\,a}{\mathrm{snc}\,b}\right) - \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\frac{\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{sn}\,a}\right), \\ \mathfrak{L}\,\mathrm{amc}(a-b) = \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\frac{\mathrm{snc}\,a}{\mathrm{snc}\,b}\right) + \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\frac{\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{sn}\,a}\right). \end{cases}$$

Diese Formeln sind reell, wenn $a>b$, und keines dieser Argumente $>K$ ist.

Die Anwendung der Formeln (1.) unter der Voraussetzung, dafs $a+b>K$ sei, setzt die Kenntnifs des Verhaltens der Function $\mathfrak{L}\Phi$ unter der Voraussetzung, dafs $\Phi > \frac{\pi}{2}$ ist, voraus. Stellt man die Formeln (1.) wieder in der Gestalt

$$\text{Lam}(a \pm b) = \text{Arc Tang}\left(\frac{\text{sn}\,a\,\text{dn}\,b}{\text{cn}\,b}\right) \pm \text{Arc Tang}\left(\frac{\text{sn}\,b\,\text{dn}\,a}{\text{cn}\,a}\right)$$

dar, und setzt man ai für a, wie auch bi für b, so hat man nach §. 20. (und Theil I. §. 48. Zusatz) auf der Stelle die neuen Formeln

$$3.\quad \begin{cases} l\,\text{Am}(a+b) = \text{arc tang}\left(\frac{\text{Sn}\,a\,\text{Dn}\,b}{\text{Cn}\,b}\right) + \text{arc tang}\left(\frac{\text{Sn}\,b\,\text{Dn}\,a}{\text{Cn}\,a}\right), \\ l\,\text{Am}(a-b) = \text{arc tang}\left(\frac{\text{Sn}\,a\,\text{Dn}\,b}{\text{Cn}\,b}\right) - \text{arc tang}\left(\frac{\text{Sn}\,b\,\text{Dn}\,a}{\text{Cn}\,a}\right). \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln (1.) blofs bi für b, so werden sie

$$4.\quad \begin{cases} \text{Lam}(a+bi) = \text{Larc sin}\left(\frac{\text{sn}\,a\,\text{Dn}\,b}{\text{Cn}\,b}\right) + i\,\text{arc tang}\left(\frac{\text{Sn}\,b}{\text{snc}\,a}\right), \\ \text{Lam}(a-bi) = \text{Larc sin}\left(\frac{\text{sn}\,a\,\text{Dn}\,b}{\text{Cn}\,b}\right) - i\,\text{arc tang}\left(\frac{\text{Sn}\,b}{\text{snc}\,a}\right), \end{cases}$$

und verwandeln sich also, wenn man die cyklischen Functionen statt der hyperbolischen einführt, in

$$5.\quad \begin{cases} \text{Lam}(a+bi) = \text{Larc sin}\,(\text{sn}\,a\,\text{dn}'b) + i.\,\text{arc tang}\left(\frac{\text{tn}'b}{\text{snc}\,a}\right), \\ \text{Lam}(a-bi) = \text{Larc sin}\,(\text{sn}\,a\,\text{dn}'b) - i.\,\text{arc tang}\left(\frac{\text{tn}'b}{\text{snc}\,a}\right). \end{cases}$$

Zusatz. Setzt man in den Formeln (1.), (3.) und (4.) den Modul $k = 0$, so wird $\text{am}(a+b) = \text{Am}(a+b) = a+b$, $\text{sn}\,a$ verwandelt sich nun in $\sin a$, $\text{sn}\,b$ in $\sin b$, $\text{snc}\,a$ in $\cos a$, $\text{snc}\,b$ in $\cos b$, $\text{Sn}\,a$ in $\text{Sin}\,a$, $\text{Cn}\,b$ in $\text{Cos}\,b$, $\text{Dn}\,b$ in 1 und $\text{Dn}\,a$ in 1, daher hat man nun

$$6.\quad \begin{cases} \text{L}(a+b) = \text{Larc sin}\left(\frac{\sin a}{\cos b}\right) + \text{Larc sin}\left(\frac{\sin b}{\cos a}\right), \\ \text{L}(a-b) = \text{Larc sin}\left(\frac{\sin a}{\cos b}\right) - \text{Larc sin}\left(\frac{\sin b}{\cos a}\right); \end{cases}$$

$$7.\quad \begin{cases} l(a+b) = \text{arc tang}\left(\frac{\text{Sin}\,a}{\text{Cos}\,b}\right) + \text{arc tang}\left(\frac{\text{Sin}\,b}{\text{Cos}\,a}\right), \\ l(a-b) = \text{arc tang}\left(\frac{\text{Sin}\,a}{\text{Cos}\,b}\right) - \text{arc tang}\left(\frac{\text{Sin}\,b}{\text{Cos}\,a}\right); \end{cases}$$

$$8.\quad \begin{cases} \text{L}(a+bi) = \text{Larc sin}\left(\frac{\sin a}{\text{Cos}\,b}\right) + i\,\text{arc tang}\left(\frac{\text{Sin}\,b}{\cos a}\right), \\ \text{L}(a-bi) = \text{Larc sin}\left(\frac{\sin a}{\text{Cos}\,b}\right) - i\,\text{arc tang}\left(\frac{\text{Sin}\,b}{\cos a}\right); \end{cases}$$

$$9.\quad \begin{cases} l(a+bi) = \text{arc tang}\left(\frac{\text{Sin}\,a}{\cos b}\right) + i\,\text{L}\,\text{arc sin}\left(\frac{\sin b}{\text{Cos}\,a}\right), \\ l(a-bi) = \text{arc tang}\left(\frac{\text{Sin}\,a}{\cos b}\right) - i\,\text{L}\,\text{arc sin}\left(\frac{\sin b}{\text{Cos}\,a}\right). \end{cases}$$

Diese im ersten Theile übergangenen Formeln, welche wir hier nachtragen mufsten, lassen sich auch leicht auf eine ganz elementare Weise herleiten.

§. 24.

Die Werthe von $\mathfrak{Am}(u \pm 2mK')$ und $\mathfrak{am}(u \pm 2miK')$.

Der uneingeschränkte Gebrauch, welchen wir in der Theorie der Modular-Functionen von den schon im ersten Theile behandelten vermittelnden Functionen $\mathfrak{L}\Phi$ und $l\Phi$ zu machen haben, erfordert eine nachträgliche Betrachtung des Verhaltens der Function $\mathfrak{L}\Phi$ für den Fall, in welchem $\Phi > \frac{\pi}{2}$ und also $\mathfrak{L}\Phi$ imaginär wird.

Da $\cos(\Phi \pm m\pi) = (-1)^m \cos\Phi$ ist, so ist auch

$$\frac{\partial\varphi}{\cos(\varphi \pm m\pi)} = (-1)^m . \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist nach Theil I. §. 46.

$$\mathfrak{L}(\Phi \pm m\pi) = (-1)^m \mathfrak{L}\Phi + a;$$

wenn man mit a die unbekannte Constante bezeichnet, welche bei der Integration hinzukommt. Setzt man $\Phi = 0$, so hat man

$$a = \mathfrak{L}(\pm m\pi) = \pm \mathfrak{L}(m\pi).$$

Da nun also $\mathfrak{Sin}\, a = \pm \mathfrak{Sin}\, \mathfrak{L}(m\pi) = \pm \operatorname{tang} m\pi = 0,$

$$\mathfrak{Cos}\, a = \mathfrak{Cos}\, \mathfrak{L}(m\pi) = \frac{1}{\cos m\pi} = (-1)^m$$

ist, so ist nach Theil I. §. 16. der Arcus $a = \pm m\pi i$, und also

$$1. \quad \mathfrak{L}(\Phi \pm m\pi) = (-1)^m . \mathfrak{L}\Phi \pm m\pi i.$$

Die in dieser Formel vorkommenden Vorzeichen $\pm$ können auch einzeln in $\mp$ abgeändert werden. Setzt man $m = 1$, so hat man

$$2. \quad \begin{cases} \mathfrak{L}(\pi + \Phi) = -\mathfrak{L}\Phi \pm \pi i & \text{und} \\ \mathfrak{L}(\pi - \Phi) = +\mathfrak{L}\Phi \pm \pi i. \end{cases}$$

Setzt man in dieser Formel $\frac{\pi}{2} - \Phi$ für Φ, so erhält man

$$3. \quad \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} + \Phi\right) = \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) \pm \pi i.$$

Wir prüfen auch diese Formel, indem wir auf beiden Seiten die hyperbolischen Sinus und Cosinus nehmen; dann ist nach Theil I. §. 16.

$$\mathfrak{Sin}\, \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} + \Phi\right) = -\mathfrak{Sin}\, \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right);$$

$$\mathfrak{Cos}\, \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} + \Phi\right) = -\mathfrak{Cos}\, \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right).$$

Die erste dieser Gleichungen ist einerlei mit

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} + \Phi\right) = -\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right),$$

und die zweite ist einerlei mit

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right);$$

aus der Richtigkeit dieser beiden Gleichungen folgt auch die der Gleichung (3.).

Multipliciren wir die Gleichung (1.) noch mit i, so erhalten wir $l(\Phi i \pm m\pi i) = (-1)^m . l(\Phi i) \pm m\pi$, und wird hier $\frac{\varphi}{i}$ für Φ gesetzt, so entsteht

$$4. \quad l(\Phi \pm m\pi i) = (-1)^m . l\Phi \pm m\pi.$$

Setzt man hierin $m = 1$, so hat man

$$5. \quad \begin{cases} l(\Phi+\pi i) = -l\Phi+\pi, \text{ und wenn man } \Phi-\frac{\pi i}{2} \text{ für } \Phi \text{ setzt} \\ l\left(\Phi+\frac{\pi i}{2}\right) = -l\left(\Phi-\frac{\pi i}{2}\right)+\pi, \text{ oder} \\ l\left(\frac{\pi i}{2}+\Phi\right) = \quad l\left(\frac{\pi i}{2}-\Phi\right)+\pi. \end{cases}$$

In den Gleichungen (1.) — (3.) kann noch auf der rechten Seite ein beliebiges Vielfaches von $2\pi i$, und in den Gleichungen (4.) und (5.) noch ein beliebiges Vielfaches von 2π auf der rechten Seite hinzugefügt werden.

Setzt man nun in der Gleichung (1.) den Arcus $\Phi = \mathrm{am}' u$, so ist auch

$$\mathfrak{L}(\mathrm{am}' u \pm m\pi) = (-1)^m \mathfrak{L}\,\mathrm{am}' u \pm m\pi i,$$

Da aber $\mathrm{am}' u \pm m\pi = \mathrm{am}'(u \pm 2mK')$ nach §. 15. ist, so ist

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{am}'(u \pm 2mK') = (-1)^m \mathfrak{L}\,\mathrm{am}' u \pm m\pi i,$$

und nach §. 22. Formel (3.) ist diese Gleichung einerlei mit

$$6. \quad \mathfrak{Am}(u \pm 2mK') = (-1)^m . \mathfrak{Am}\, u \pm m\pi i.$$

In dieser Gleichung darf auch $\pm$ mit $\mp$ zusammengestellt werden; multiplicirt man dieselbe mit i, so hat man $\mathrm{am}(ui \pm 2miK') = (-1)^m . \mathrm{am}(ui) \pm m\pi$, und setzt man hierin $\frac{u}{i}$ für u an die Stelle, so hat man

$$7. \quad \mathrm{am}(u \pm 2miK') = (-1)^m . \mathrm{am}\, u \pm m\pi.$$

§. 25.

Die cyklischen Modular-Functionen und Amplituden der Argumente von der Form $u+2mK+2niK'$.

Da nach §. 24. ist $\mathrm{am}(u+2niK') = (-1)^n . \mathrm{am}\, u \pm n\pi$, so erhält man, wenn $u+2mK$ für u gesetzt wird, $\mathrm{am}(u+2mK+2niK') = (-1)^n \mathrm{am}(u+2mK) \pm n\pi$, und da nach §. 15. ist $\mathrm{am}(u+2mK) = m\pi + \mathrm{am}\, u$,

so erhält man

$$\operatorname{am}(u+2mK+2niK') = (-1)^n.\operatorname{am}u+(m\pm n)\pi.$$

Setzt man umgekehrt in der Formel $\operatorname{am}(u+2mK) = \operatorname{am}u+m\pi$ für u an die Stelle $u+2niK'$, so hat man $\operatorname{am}(u+2mK+2niK') = \operatorname{am}(u+2niK')+m\pi$, und also, wie vorhin,

$$1.\quad \operatorname{am}(u+2mK+2niK') = (m\pm n)\pi+(-1)^n.\operatorname{am}u.$$

Nimmt man die cyklischen Sinus der beiden gleichen Ausdrücke, so erhält man mittelst der Formel $\sin(a+b) = \sin a\cos b+\cos a\sin b$:

$$\operatorname{sin\,am}(u+2mK+2niK') = (-1)^{m+n}.\sin((-1)^n.\operatorname{am}u) = (-1)^{m+2n}.\operatorname{sin\,am}u,$$

und da $(-1)^{m+2n} = (-1)^m$ ist, so ist

$$2.\quad \operatorname{sn}(u+2mK+2niK') = (-1)^m.\operatorname{sn}u.$$

Nimmt man die cyklischen Cosinus, so hat man $\cos\operatorname{am}(u+2mK+2niK') = (-1)^{m+n}.\cos((-1)^n\operatorname{am}u) = (-1)^{m+n}.\cos\operatorname{am}u$, und also

$$3.\quad \operatorname{cn}(u+2mK+2niK') = (-1)^{m+n}.\operatorname{cn}u.$$

Wird (2.) durch (3.) dividirt, so entsteht

$$4.\quad \operatorname{tn}(u+2mK+2niK') = (-1)^n.\operatorname{tn}u.$$

Differenziirt man die Gleichung (1.), so erhält man auf der Stelle

$$5.\quad \operatorname{dn}(u+2mK+2niK') = (-1)^n.\operatorname{dn}u.$$

Da

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}(u+4mK+4niK') &= \operatorname{sn}u,\\ \operatorname{cn}(u+4mK+4niK') &= \operatorname{cn}u,\\ \operatorname{dn}(u+4mK+4niK') &= \operatorname{dn}u,\\ \operatorname{tn}(u+4mK+4niK') &= \operatorname{tn}u\end{aligned}$$

ist, so sieht man, *dafs die cyklischen Modular-Functionen doppelt periodisch sind, reell und imaginär periodisch zugleich; der Umfang einer reellen Periode ist* $4K$ *und der Umfang einer imaginären Periode ist* $4iK'$.

§. 26.

Die hyperbolischen Modular-Functionen und Amplituden der Argumente von der Form $u\pm mK'$.

Die hyperbolischen Modular-Sinus und Modular-Cosinus $\mathfrak{Sn}u$ und $\mathfrak{Cn}u$ sind vorzüglich darin von den gewöhnlichen hyperbolischen Sinus und Cosinus verschieden, dafs sie viel rascher wachsen, wenn das Argument u zunimmt, und schon unendlich grofs sind, ehe das Argument u unendlich grofs geworden ist; die Functionen $\mathfrak{Sin}u$ und $\mathfrak{Cos}u$ hingegen sind erst dann unendlich, wenn auch u unendlich grofs geworden ist. Setzen wir

$u = K'$, so ist, weil nach §. 22. überhaupt $\mathfrak{Sn}u = \mathrm{tn}'u$ ist, auch $\mathfrak{Sn}K' = \mathrm{tn}'K'$, und da $\mathrm{tn}K = \mathrm{tn}'K' = \frac{1}{0}$ ist, so ist auch

$$\mathfrak{Sn}K' = \tfrac{1}{0}.$$

Ferner ist $\mathfrak{Cn}K' = \frac{1}{\mathrm{cn}'K'}$, und also auch $\mathfrak{Cn}K' = \frac{1}{0}$. Da $\mathfrak{Tn}K' = \mathrm{sn}'K'$ ist, so ist $\mathfrak{Tn}K' = 1$; weil endlich $\mathfrak{Dn}K' = \frac{\mathrm{dn}'K'}{\mathrm{cn}'K'} = \frac{k'}{0}$ ist, so stellen wir also zusammen:

1. $\mathfrak{Sn}K' = \frac{1}{0}$, $\mathfrak{Cn}K' = \frac{1}{0}$, $\mathfrak{Tn}K' = 1$, $\mathfrak{Dn}K' = \frac{1}{0}$.

Da $\mathfrak{Sn}K' = \mathfrak{Sin}\,\mathfrak{Am}K' = \frac{1}{0}$ ist, so ist auch noch

2. $\mathfrak{Am}K' = \frac{1}{0}$.

Ferner ist $\mathfrak{Sn}(K'-u) = \mathrm{tn}'(K'-u) = \frac{1}{k\,\mathrm{tn}'u}$, und da $\mathrm{tn}'u = \mathfrak{Sn}u$ ist, so ist

3.
$$\begin{cases} \mathfrak{Sn}(K'-u) = \dfrac{1}{k\,\mathfrak{Sn}u}, & \text{eben so findet man} \\ \mathfrak{Cn}(K'-u) = \dfrac{\mathfrak{Dn}u}{k\,\mathfrak{Sn}u}, \\ \mathfrak{Tn}(K'-u) = \dfrac{1}{\mathfrak{Dn}u}, \\ \mathfrak{Dn}(K'-u) = \dfrac{1}{\mathfrak{Tn}u}. \end{cases}$$

Uebrigens können auch die drei letzten Formeln eben so leicht aus der ersten hergeleitet werden.

Setzen wir der Kürze wegen $\mathfrak{Sn}(K'-u) = \mathfrak{Snc}u$, $\mathfrak{Cn}(K'-u) = \mathfrak{Cnc}u$, $\mathfrak{Tn}(K'-u) = \mathfrak{Tnc}u$, $\mathfrak{Dn}(K'-u) = \mathfrak{Dnc}u$ und $\mathfrak{Am}(K'-u) = \mathfrak{Amc}u$, so ist also

4.
$$\begin{cases} \mathfrak{Snc}u = \dfrac{1}{k\,\mathfrak{Sn}u}, & \mathfrak{Sn}u = \dfrac{1}{k\,\mathfrak{Snc}u}, \\ \mathfrak{Cnc}u = \dfrac{\mathfrak{Dn}u}{k\,\mathfrak{Sn}u}, & \mathfrak{Cn}u = \dfrac{\mathfrak{Dnc}u}{k\,\mathfrak{Snc}u}, \\ \mathfrak{Tnc}u = \dfrac{1}{\mathfrak{Dn}u}, & \mathfrak{Tn}u = \dfrac{1}{\mathfrak{Dnc}u}, \\ \mathfrak{Dnc}u = \dfrac{1}{\mathfrak{Tn}u}, & \mathfrak{Dn}u = \dfrac{1}{\mathfrak{Tnc}u}, \\ \mathfrak{Amc}u = \mathrm{Arc\,Tang}\left(\dfrac{1}{\mathfrak{Dn}u}\right). \end{cases}$$

Die Function $\mathfrak{Am}u$ ist also nur reell zwischen den Grenzen $u = 0$ und $u = K'$; wird $u > K'$, so ist $\mathfrak{Am}u$ imaginär. Da $\mathfrak{Dn}u = \frac{\mathrm{dn}'u}{\mathrm{cn}'u} = \frac{1}{\mathrm{suc}'u}$ ist, so ist auch

$$\mathfrak{Amc}\,u = \mathfrak{Arc\,Tang}\,(\mathfrak{snc}'\,u) = \mathfrak{L\,arc\sin}\,(\mathfrak{snc}'\,u),$$

und also

$$\mathfrak{Amc}\,u = \mathfrak{L\,amc}'\,u,$$

was auch unmittelbar aus Formel (3.) des §. 22. folgt.

Setzt man in den Formeln (3.) $-u$ für u, so hat man

$$\mathfrak{Sn}(K'+u) = -\mathfrak{Sn}(K'-u), \quad \mathfrak{Cn}(K'+u) = -\mathfrak{Cn}(K'-u),$$
$$\mathfrak{Tn}(K'+u) = \mathfrak{Tn}(K'-u), \quad \mathfrak{Dn}(K'+u) = -\mathfrak{Dn}(K'-u).$$

Setzt man hierin $K'-u$ für u, so hat man

$$\mathfrak{Sn}(2K'-u) = -\mathfrak{Sn}\,u, \quad \mathfrak{Cn}(2K'-u) = -\mathfrak{Cn}\,u, \quad \mathfrak{Tn}(2K'-u) = \mathfrak{Tn}\,u,$$
$$\mathfrak{Dn}(2K'-u) = -\mathfrak{Dn}\,u,$$

und setzt man $-u$ für u, so hat man

$$\mathfrak{Sn}(2K'+u) = \mathfrak{Sn}\,u, \quad \mathfrak{Cn}(2K'+u) = -\mathfrak{Cn}\,u, \quad \mathfrak{Tn}(2K'+u) = -\mathfrak{Tn}\,u,$$
$$\mathfrak{Dn}(2K'+u) = -\mathfrak{Dn}\,u.$$

Hieraus schliefst man überhaupt

$$5.\quad \begin{cases} \mathfrak{Sn}(u+2mK') = \mathfrak{Sn}\,u, & \mathfrak{Cn}(u+2mK') = (-1)^m.\mathfrak{Cn}\,u, \\ \mathfrak{Tn}(u+2mK') = (-1)^m.\mathfrak{Tn}\,u, & \mathfrak{Dn}(u+2mK') = (-1)^m.\mathfrak{Dn}\,u. \end{cases}$$

Setzt man $2m$ für m, so verwandelt sich $(-1)^m$ in $+1$, woraus zu ersehen ist, dafs die hyperbolischen Modular-Functionen in einer zweiten Hinsicht periodisch sind; diese Perioden sind reell, und der Umfang einer jeden ist $= 4K'$.

Verbindet man die Formeln (3.) — (6.) des §. 21. mit den vorstehenden, so erhält man die allgemeineren

$$6.\quad \begin{cases} \mathfrak{Sn}(u+2mK'+2niK) = (-1)^n\,\mathfrak{Sn}\,u, \\ \mathfrak{Cn}(u+2mK'+2niK) = (-1)^{m+n}.\mathfrak{Cn}\,u, \\ \mathfrak{Tn}(u+2mK'+2niK) = (-1)^m.\mathfrak{Tn}\,u, \\ \mathfrak{Dn}(u+2mK'+2niK) = (-1)^m.\mathfrak{Dn}\,u. \end{cases}$$

Eine weitere Ausführung scheint hier überflüssig zu sein.

§. 27.

Cyklische Functionen imaginärer Argumente zurückgeführt auf cyklische Functionen mit reellem Argumente.

Es ist $\mathrm{sn}(ui) = i.\mathfrak{Sn}\,u$, und da $\mathfrak{Sn}\,u = \mathrm{tn}'\,u$ ist, so ist

$$1.\quad \begin{cases} \mathrm{sn}(ui) = i\,\mathrm{tn}'\,u, \text{ eben so findet man} \\ \mathrm{cn}(ui) = \dfrac{1}{\mathrm{cn}'\,u}, \\ \mathrm{tn}(ui) = i\,\mathrm{sn}'\,u, \\ \mathrm{dn}(ui) = \dfrac{\mathrm{dn}'\,u}{\mathrm{cn}'\,u} = \dfrac{1}{\mathrm{snc}'\,u}. \end{cases}$$

Benutzt man die Formeln (17.) des §. 13., so setzt man aus den vorstehenden Formeln sogleich zusammen:

$$2.\quad \begin{cases} \operatorname{snc}(ui) = \dfrac{1}{\operatorname{dn}' u} = \dfrac{\operatorname{dnc}' u}{k}, \\ \operatorname{cnc}(ui) = \dfrac{ik'.\operatorname{sn}' u}{\operatorname{dn}' u} = \dfrac{ik'}{k}\operatorname{cnc}' u, \\ \operatorname{tnc}(ui) = \dfrac{1}{ik'.\operatorname{sn}' u} = \dfrac{1}{ik'}.\dfrac{\operatorname{dnc}' u}{\operatorname{cnc}' u}, \\ \operatorname{dnc}(ui) = \dfrac{k'\operatorname{cn}' u}{\operatorname{dn}' u} = k'.\operatorname{snc}' u. \end{cases}$$

Vertauscht man in diesen Formeln die beiden conjugirten Modul mit einander, so können sie auch also dargestellt werden:

$$3.\quad \begin{cases} \operatorname{sn} u = \dfrac{\operatorname{tn}'(ui)}{i}, \quad \operatorname{cn} u = \dfrac{1}{\operatorname{cn}'(ui)}, \\ \operatorname{tn} u = \dfrac{\operatorname{sn}'(ui)}{i}, \quad \operatorname{dn} u = \dfrac{\operatorname{dn}'(ui)}{\operatorname{cn}'(ui)} = \dfrac{1}{\operatorname{snc}'(ui)}, \end{cases}$$

und für die Functionen des Complementes erhält man

$$4.\quad \begin{cases} \operatorname{snc} u = \dfrac{1}{\operatorname{dn}'(ui)} = \dfrac{\operatorname{dnc}'(ui)}{k}, \quad \operatorname{cnc} u = \dfrac{k'}{ik}\operatorname{cnc}'(ui), \\ \operatorname{tnc} u = \dfrac{i}{k'\operatorname{sn}'(ui)}, \quad \operatorname{dnc} u = k'.\operatorname{snc}'(ui). \end{cases}$$

Zusatz. Es ist $\operatorname{am} u = \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1+i\operatorname{tn} u}{1-i\operatorname{tn} u}}$, also $\frac{\pi}{2} - \operatorname{am} u = \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\operatorname{tn} u + i}{\operatorname{tn} u - i}}$; setzt man hierin $K - u$ für u, so verwandelt sich $\operatorname{tn} u$ in $\frac{1}{k'\operatorname{tn} u}$ und es ist also

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{amc} u = \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1+ik'\operatorname{tn} u}{1-ik'\operatorname{tn} u}},$$ oder, weil $i\operatorname{tn} u = \operatorname{sn}'(ui)$ ist

$$5.\quad \frac{\pi}{2} - \operatorname{amc} u = \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1+k'\operatorname{sn}'(ui)}{1-k'\operatorname{sn}'(ui)}},$$

und

$$6.\quad \operatorname{am} u = \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1+\operatorname{sn}'(ui)}{1-\operatorname{sn}'(ui)}}.$$

Setzt man in der Formel für $\frac{\pi}{2} - \operatorname{amc} u$ noch ui statt u, so hat man

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{amc}(ui) = \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1-k'\operatorname{sn}' u}{1+k'\operatorname{sn}' u}} = i\log\sqrt{\frac{1+k'\operatorname{sn}' u}{1-k'\operatorname{sn}' u}},$$

und also

$$\frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{amc}(ui)}{i} = \log\sqrt{\frac{1+k'\operatorname{sn}' u}{1-k'\operatorname{sn}' u}},$$

oder

$$7. \quad \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{amc}'(ui)}{i} = \log \sqrt{\frac{1+k\,\mathrm{sn}\,u}{1-k\,\mathrm{sn}\,u}}.$$

Es ist $\mathfrak{L}\operatorname{am} u = \log \sqrt{\frac{1+\mathrm{sn}\,u}{1-\mathrm{sn}\,u}}$; setzt man hierin $\frac{\pi}{2} - \operatorname{am} u$ für $\operatorname{am} u$, so hat man $\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{am} u\right) = \log \sqrt{\frac{1+\mathrm{cn}\,u}{1-\mathrm{cn}\,u}}$; wird noch $K-u$ für u gesetzt, so entsteht $\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{amc} u\right) = \log \sqrt{\frac{1+\mathrm{cnc}\,u}{1-\mathrm{cnc}\,u}}$, also auch

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{amc}(ui)\right) = \log \sqrt{\frac{1+\mathrm{cnc}(ui)}{1-\mathrm{cnc}(ui)}};$$

multiplicirt man diese Gleichung mit $-i$, so entsteht, wenn die beiden Modul k und k' vertauscht werden:

$$l\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{amc}'(ui)}{i}\right) = \frac{1}{i} \log \sqrt{\frac{1+\mathrm{cnc}'(ui)}{1-\mathrm{cnc}'(ui)}};$$

da aber $\mathrm{cnc}'(ui) = \frac{ik}{k'}\,\mathrm{cnc}\,u$ ist, so kann diese Formel auch also dargestellt werden

$$8. \quad l\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{amc}'(ui)}{i}\right) = \frac{1}{i} \log \sqrt{\frac{1+\frac{ik}{k'}\,\mathrm{cnc}\,u}{1-\frac{ik}{k'}\,\mathrm{cnc}\,u}}.$$

Die höhere Wichtigkeit der Formeln (7.) und (8.) wird bald nachher einleuchten.

Anmerkung. Nach Theil I. §. 38. ist $\mathfrak{L}\Phi = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\Phi\right)$, oder auch $\Phi = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} l\Phi\right)$; daher ist $e^{\varphi} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} l\Phi\right)$ und $e^{-\varphi} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} l\Phi\right)$; also auch

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} l\Phi = \operatorname{arc\,tang}(e^{\varphi}), \qquad \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} l\Phi = \operatorname{arc\,tang}(e^{-\varphi}).$$

Werden diese beiden Gleichungen durch Addition und Subtraction mit einander verbunden, so erhält man

$$9. \quad \frac{\pi}{2} = \operatorname{arc\,tang}(e^{\varphi}) + \operatorname{arc\,tang}(e^{-\varphi}) \quad \text{und}$$

$$10. \quad l\Phi = \operatorname{arc\,tang}(e^{\varphi}) - \operatorname{arc\,tang}(e^{-\varphi}).$$

Die Richtigkeit der ersten Gleichung erhellet von selbst, weil $e^{\varphi}.e^{-\varphi} = 1$ ist. Entwickeln wir die Glieder auf der rechten Seite in Reihen, so ist

$$\text{arc tang}(e^{\varphi}) = e^{\varphi} - \frac{e^{3\varphi}}{3} + \frac{e^{5\varphi}}{5} - \frac{e^{7\varphi}}{7} + \frac{e^{9\varphi}}{9} - + \ldots.$$

$$\text{arc tang}(e^{-\varphi}) = e^{-\varphi} - \frac{e^{-3\varphi}}{3} + \frac{e^{-5\varphi}}{5} - \frac{e^{-7\varphi}}{7} + \frac{e^{-9\varphi}}{9} - + \ldots.$$

Hieraus erhält man durch Addition und Subtraction

$$\frac{\pi}{2} = 2\left(\mathfrak{Cos}\,\Phi - \frac{\mathfrak{Cos}\,3\varphi}{3} + \frac{\mathfrak{Cos}\,5\varphi}{5} - \frac{\mathfrak{Cos}\,7\varphi}{7} + \frac{\mathfrak{Cos}\,9\varphi}{9} - + \text{etc.}\right),$$

$$l\Phi = 2\left(\mathfrak{Sin}\,\Phi - \frac{\mathfrak{Sin}\,3\varphi}{3} + \frac{\mathfrak{Sin}\,5\varphi}{5} - \frac{\mathfrak{Sin}\,7\varphi}{7} + \frac{\mathfrak{Sin}\,9\varphi}{9} - + \text{etc.}\right),$$

oder, wenn man Φi für Φ setzt,

$$\frac{\pi}{2} = 2\left(\cos\Phi - \frac{\cos 3\varphi}{3} + \frac{\cos 5\varphi}{5} - \frac{\cos 7\varphi}{7} + \frac{\cos 9\varphi}{9} - + \text{etc.}\right),$$

$$\mathfrak{l}\Phi = 2\left(\sin\Phi - \frac{\sin 3\varphi}{3} + \frac{\sin 5\varphi}{5} - \frac{\sin 7\varphi}{7} + \frac{\sin 9\varphi}{9} - + \text{etc.}\right).$$

Setzt man in den Reihen für $\frac{\pi}{2}$ den beliebigen Arcus $\Phi = 0$, so erhält man die bekannte von Leibnitz gefundene Reihe. Die beiden Reihen für $l\Phi$ und $\mathfrak{l}\Phi$ wurden im ersten Theile, und zwar im Zusatze zu §. 57. auf eine minder einfache Weise hergeleitet.

Setzt man in der Formel (10.) $\Phi = \mathfrak{Am}'u$, so ist $l\Phi = \text{am}\,u$, und also

$$\textbf{11.} \quad \text{am}\,u = \text{arc tang}(e^{\mathfrak{Am}'u}) - \text{arc tang}(e^{-\mathfrak{Am}'u}).$$

Setzt man in dieser Gleichung ui für u, so verwandelt sie sich in

$$\textbf{12.} \quad \mathfrak{Am}\,u = \frac{\text{arc tang}(e^{i\,\text{am}'u}) - \text{arc tang}(e^{-i\,\text{am}'u})}{i}.$$

§. 28.

Nach §. 21. Formel 10. ist $\text{sn}(a \pm bi) = \frac{\text{sn}\,a\,\mathfrak{Cn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,b \pm i\,\mathfrak{Sn}\,b\,\text{cn}\,a\,\text{dn}\,a}{1 + k^2\,\text{sn}^2\,a\,\mathfrak{Sn}^2\,b}$; führt man durchweg die cyklischen Functionen ein, so wird der Nenner $1 + k^2\,\text{sn}^2\,a\,\text{tn}'^2\,b = \frac{\text{cn}'^2\,b + k^2\,\text{sn}^2\,a\,\text{sn}'^2\,b}{\text{cn}'^2\,b} = \frac{1 - \text{dn}^2\,a\,\text{sn}'^2\,b}{\text{cn}'^2\,b}$, der Zähler aber wird $\frac{\text{sn}\,a\,\text{dn}'\,b \pm i\,\text{sn}'\,b\,\text{cn}'\,b\,\text{cn}\,a\,\text{dn}\,a}{\text{cn}'^2\,b}$, also ist

$$\textbf{1.} \quad \begin{cases} \text{sn}(a + bi) = \dfrac{\text{sn}\,a\,\text{dn}'\,b + i\,\text{sn}'\,b\,\text{cn}'\,b\,\text{cn}\,a\,\text{dn}\,a}{1 - \text{dn}^2\,a\,\text{sn}'^2\,b}, \\ \text{sn}(a - bi) = \dfrac{\text{sn}\,a\,\text{dn}'\,b - i\,\text{sn}'\,b\,\text{cn}'\,b\,\text{cn}\,a\,\text{dn}\,a}{1 - \text{dn}^2\,a\,\text{sn}'^2\,b}. \end{cases}$$

Der Zähler des Ausdrucks von $\text{cn}(a \pm bi)$ im §. 21. ist $\text{cn}\,a\,\mathfrak{Cn}\,b \mp i\,\text{sn}\,a\,\text{dn}\,a\,\mathfrak{Sn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,b = \frac{\text{cn}\,a\,\text{cn}'\,b \mp i\,\text{sn}\,a\,\text{dn}\,a\,\text{sn}'\,b\,\text{dn}'\,b}{\text{cn}'^2\,b}$, also ist

$$2.\quad \begin{cases} \operatorname{cn}(a+bi) = \dfrac{\operatorname{cn}a\,\operatorname{cn}'b - i\,\operatorname{sn}a\,\operatorname{dn}a\,\operatorname{sn}'b\,\operatorname{dn}'b}{1-\operatorname{dn}^2 a\,\operatorname{sn}'^2 b}, \\ \operatorname{cn}(a-bi) = \dfrac{\operatorname{cn}a\,\operatorname{cn}'b + i\,\operatorname{sn}a\,\operatorname{dn}a\,\operatorname{sn}'b\,\operatorname{dn}'b}{1-\operatorname{dn}^2 a\,\operatorname{sn}'^2 b}. \end{cases}$$

Wenn man die Formeln (1.) durch (2.) dividirt, so erhält man Ausdrücke für $\operatorname{tn}(a\pm bi)$, welche aber der Form nach ungehörig sind, weil Zähler und Nenner zugleich imaginär werden. Man erhält bessere Ausdrücke auf folgende Art. Es ist $i(b-ai)=a+bi$, also ist $\operatorname{tn}(a+bi)=i\operatorname{sn}'(b-ai)$, und da $\operatorname{sn}'(b-ai)=\dfrac{\operatorname{sn}'b\,\operatorname{dn}a - i\,\operatorname{sn}a\,\operatorname{cn}a\,\operatorname{cn}'b\,\operatorname{dn}'b}{1-\operatorname{dn}'^2 b\,\operatorname{sn}^2 a}$ ist, so erhält man

$$3.\quad \begin{cases} \operatorname{tn}(a+bi) = \dfrac{\operatorname{sn}a\,\operatorname{cn}a\,\operatorname{cn}'b\,\operatorname{dn}'b + i\,\operatorname{dn}a\,\operatorname{sn}'b}{1-\operatorname{sn}^2 a\,\operatorname{dn}'^2 b}, \\ \operatorname{tn}(a-bi) = \dfrac{\operatorname{sn}a\,\operatorname{cn}a\,\operatorname{cn}'b\,\operatorname{dn}'b - i\,\operatorname{dn}a\,\operatorname{sn}'b}{1-\operatorname{sn}^2 a\,\operatorname{dn}'^2 b}. \end{cases}$$

Der Zähler des Ausdrucks von $\operatorname{dn}(a\pm bi)$ in §. 21. ist

$$\operatorname{dn}a\,\mathfrak{Dn}b \mp ik^2\operatorname{sn}a\,\operatorname{cn}a\,\mathfrak{Sn}b\,\mathfrak{Cn}b,$$

und verwandelt sich in $\dfrac{\operatorname{dn}a\,\operatorname{dn}'b\,\operatorname{cn}'b \mp ik^2\operatorname{sn}a\,\operatorname{cn}a\,\operatorname{sn}'b}{\operatorname{cn}'^2 b}$, daher ist

$$4.\quad \begin{cases} \operatorname{dn}(a+bi) = \dfrac{\operatorname{dn}a\,\operatorname{dn}'b\,\operatorname{cn}'b - ik^2\operatorname{sn}a\,\operatorname{cn}a\,\operatorname{sn}'b}{1-\operatorname{dn}^2 a\,\operatorname{sn}'^2 b}, \\ \operatorname{dn}(a-bi) = \dfrac{\operatorname{dn}a\,\operatorname{dn}'b\,\operatorname{cn}'b + ik^2\operatorname{sn}a\,\operatorname{cn}a\,\operatorname{sn}'b}{1-\operatorname{dn}^2 a\,\operatorname{sn}'^2 b}. \end{cases}$$

Die Formeln (13.) im §. 21. werden

$$5.\quad \begin{cases} \operatorname{am}(a+bi) = \operatorname{arc\,tang}\left(\dfrac{\operatorname{tn}a\,\operatorname{dn}'b}{\operatorname{cn}'b}\right) + i\,\mathfrak{Arc\,Tang}(\operatorname{sn}'b\,\operatorname{dn}a), \\ \operatorname{am}(a-bi) = \operatorname{arc\,tang}\left(\dfrac{\operatorname{tn}a\,\operatorname{dn}'b}{\operatorname{cn}'b}\right) - i\,\mathfrak{Arc\,Tang}(\operatorname{sn}'b\,\operatorname{dn}a). \end{cases}$$

Setzt man in den vorstehenden Formeln $b=K'$, also $\operatorname{sn}'b=1$, $\operatorname{cn}'b=0$, $\operatorname{dn}'b=k$ und $a=u$, so erhält man

$$6.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+iK') = \dfrac{1}{k\operatorname{sn}u} \quad \text{und} \quad \operatorname{sn}(u-iK') = \dfrac{1}{k\operatorname{sn}u}, \\ \operatorname{cn}(u+iK') = \dfrac{-i\operatorname{dn}u}{k\operatorname{sn}u} \quad \text{und} \quad \operatorname{cn}(u-iK') = \dfrac{i\operatorname{dn}u}{k\operatorname{sn}u}, \\ \operatorname{tn}(u+iK') = \dfrac{i}{\operatorname{dn}u} \quad \text{und} \quad \operatorname{tn}(u-iK') = \dfrac{-i}{\operatorname{dn}u}, \\ \operatorname{dn}(u+iK') = \dfrac{-i}{\operatorname{tn}u} \quad \text{und} \quad \operatorname{dn}(u-iK') = \dfrac{i}{\operatorname{tn}u}, \\ \operatorname{am}(u+iK') = \dfrac{\pi}{2} + i\,\mathfrak{Arc\,Tang}(\operatorname{dn}u); \\ \operatorname{am}(u-iK') = \dfrac{\pi}{2} - i\,\mathfrak{Arc\,Tang}(\operatorname{dn}u). \end{cases}$$

Werden die gegenüberstehenden Werthe mit einander verglichen, so hat man

$$7.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+iK') = \operatorname{sn}(u-iK'); & \operatorname{tn}(u+iK') = -\operatorname{tn}(u-iK'); \\ \operatorname{cn}(u+iK') = -\operatorname{cn}(u-iK'); & \operatorname{dn}(u+iK') = -\operatorname{dn}(u-iK'). \end{cases}$$

Die Relationen unter den Amplituden sind

$$8.\quad \begin{cases} \operatorname{am}(u+iK') + \operatorname{am}(u-iK') = \pi, \\ \mathfrak{Tang}\left(\frac{\operatorname{am}(u+iK') - \operatorname{am}(u-iK')}{2i}\right) = \operatorname{dn} u. \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln (7.) $u+iK'$ für u, so werden sie

$$9.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+2iK') = \operatorname{sn} u, & \operatorname{tn}(u+2iK') = -\operatorname{tn} u, \\ \operatorname{cn}(u+2iK') = -\operatorname{cn} u, & \operatorname{dn}(u+2iK') = -\operatorname{dn} u \quad \text{und} \\ & \operatorname{am}(u+2iK') = \pi - \operatorname{am} u. \end{cases}$$

Aus den vorstehenden Formeln folgt ohne Weiteres

$$10.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+2niK') = \operatorname{sn} u, & \operatorname{cn}(u+2niK') = (-1)^n.\operatorname{cn} u, \\ \operatorname{tn}(u+2niK') = (-1)^n.\operatorname{cn} u, & \operatorname{dn}(u+2niK') = (-1)^n.\operatorname{dn} u, \end{cases}$$

und für die Amplituden erhält man

$$11.\quad \operatorname{am}(u+2niK') = n\pi + (-1)^n.\operatorname{am} u.$$

Die Formeln (6.)—(11.) hätte man auch leicht aus denen des §. 26. herleiten können. Setzt man in den Formeln (6.) $u=0$, so erhält man

$$12.\quad \operatorname{sn}(iK') = \tfrac{1}{0}, \quad \operatorname{cn}(iK') = \frac{i}{0}, \quad \operatorname{tn}(iK') = i, \quad \operatorname{dn}(iK') = \frac{-i}{0}.$$

Setzt man in den Formeln (9.) $u=0$, so hat man

$$13.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(2iK') = 0, & \operatorname{tn}(2iK') = 0, \\ \operatorname{cn}(2iK') = -1, & \operatorname{dn}(2iK') = -1. \end{cases}$$

Wird aber $u=iK'$ gesetzt, so findet man

$$14.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(3iK') = \tfrac{1}{0}, & \operatorname{tn}(3iK') = -i, \\ \operatorname{cn}(3iK') = -\frac{i}{0}, & \operatorname{dn}(3iK') = \frac{i}{0}. \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln (6.) $u+K$ für u, so werden sie

$$15.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+K+iK') = \frac{1}{k \operatorname{snc} u}, \\ \operatorname{cn}(u+K+iK') = -\frac{i}{k}.\frac{\operatorname{dnc} u}{\operatorname{snc} u} = \frac{k'}{ik}.\frac{1}{\operatorname{cn} u}, \\ \operatorname{tn}(u+K+iK') = \frac{i}{\operatorname{dnc} u}, \\ \operatorname{dn}(u+K+iK') = \frac{i}{\operatorname{tnc} u} = ik' \operatorname{tn} u, \\ \operatorname{am}(u+K+iK') = \frac{\pi}{2} + i\,\mathfrak{L}\arcsin(\operatorname{dnc} u). \end{cases}$$

Setzt man hierin $u=0$, so entstehen die Formeln

$$16.\quad \begin{cases} \mathrm{sn}(K+iK') = \frac{1}{k}, & \mathrm{tn}(K+iK') = \frac{i}{k'}, \\ \mathrm{cn}(K+iK') = \frac{k'}{ik}, & \mathrm{dn}(K+iK') = 0, \\ \mathrm{am}(K+iK') = \frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{Lgarc\,sin}(k'). \end{cases}$$

§. 29.

Setzt man in den Formeln (10.) noch $u+2mK$ für u, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathrm{sn}(u+2mK+2niK') &= (-1)^m.\mathrm{sn}\,u, \\ \mathrm{cn}(u+2mK+2niK') &= (-1)^{m+n}.\mathrm{cn}\,u, \\ \mathrm{tn}(u+2mK+2niK') &= (-1)^n.\mathrm{tn}\,u, \\ \mathrm{dn}(u+2mK+2niK') &= (-1)^n.\mathrm{dn}\,u\ ^*), \end{aligned}$$

wie im §. 25. auf andere Art gefunden worden ist. Setzt man hierin entweder $u=0$, oder $u=K$, oder $u=iK'$, oder $u=K+iK'$, so erhält man eine Reihe von particulären Bestimmungen, welche wir auf folgende Weise zusammen gruppiren.

Functionen, welche $=0$ sind:

$$\mathrm{sn}(2mK+2niK') = 0, \qquad \mathrm{cn}((2m+1)K+2niK') = 0,$$
$$\mathrm{tn}(2mK+2niK') = 0, \qquad \mathrm{dn}((2m+1)K+(2n+1)iK') = 0.$$

Functionen, welche $=\frac{1}{0}$ sind:

$$\mathrm{sn}(2mK+(2n+1)iK') = \tfrac{1}{0}, \qquad \mathrm{dn}(2mK+(2n+1)iK') = \tfrac{1}{0},$$
$$\mathrm{cn}(2mK+(2n+1)iK') = \tfrac{1}{0}, \qquad \mathrm{tn}((2m+1)K+2niK') = \tfrac{1}{0}.$$

Functionen, welche $=\pm 1$ oder $=\pm i$ sind:

$$\mathrm{sn}((2m+1)K+2niK') = (-1)^m, \qquad \mathrm{tn}(2mK+(2n+1)iK') = (-1)^n.i,$$
$$\mathrm{cn}(2mK+2niK') = (-1)^{m+n}, \qquad \mathrm{dn}(2mK+2niK') = (-1)^n.$$

Functionen, deren Werthe vom Modul abhangen:

$$\mathrm{sn}((2m+1)K+(2n+1)iK') = (-1)^m.\frac{1}{k},$$
$$\mathrm{cn}((2m+1)K+(2n+1)iK') = (-1)^{m+n}.\frac{k'}{ik},$$
$$\mathrm{tn}((2m+1)K+(2n+1)iK') = (-1)^n.\frac{i}{k'},$$
$$\mathrm{dn}((2m+1)K+2niK') = (-1)^n.k'.$$

---

*) Setzt man der Kürze wegen $u+2mK+2niK'=u'$, so findet man die Formeln

$$\mathrm{snc}\,u' = (-1)^m.\mathrm{snc}\,u, \qquad \mathrm{tnc}\,u' = (-1)^n.\mathrm{tnc}\,u,$$
$$\mathrm{cnc}\,u' = (-1)^{m+n}.\mathrm{cnc}\,u, \qquad \mathrm{dnc}\,u' = (-1)^n.\mathrm{dnc}\,u.$$

§. 30.

Cyklische Modular-Functionen mit dem Modul $\frac{1}{k}$ zurückgeführt auf ähnliche mit dem Modul k.

Wenn statt des Moduls k oder k' ein anderer, z. B. der Modul $\frac{1}{k}$, verstanden werden soll, so kann man diesen Modul hinter das Argument, und durch ein Komma davon getrennt setzen; die cyklischen Functionen des Argumentes u mit dem Modul $\frac{1}{k}$ sind demnach bezeichnet durch $\mathrm{sn}\left(u, \frac{1}{k}\right)$, $\mathrm{cn}\left(u, \frac{1}{k}\right)$, $\mathrm{tn}\left(u, \frac{1}{k}\right)$, $\mathrm{dn}\left(u, \frac{1}{k}\right)$, und die Amplitude ist mit $\mathrm{am}\left(u, \frac{1}{k}\right)$ zu bezeichnen. Mit den auf den Modul k bezogenen Functionen stehen die auf den reciproken Modul $\frac{1}{k}$ bezogenen Functionen in einem einfachen Zusammenhange, welcher nun aufzuklären ist.

Es sei $u = \int_0 \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}\sqrt{(k^2-z^2)}}$ und, wie früher, k eine zwischen den Grenzen 0 und 1 enthaltene Zahl; so ist ∂u und also auch u imaginär, wenn $z > k$ genommen wird, und es ist u nur reell zwischen den Grenzen $z = 0$ und $z = k$.

Stellen wir die Formel also dar: $ku = \int_0 \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}\sqrt{\left(1-\frac{1}{k^2}.z^2\right)}}$, so ist ihr gemäfs $z = \mathrm{sn}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$, $\sqrt{(1-z^2)} = \mathrm{cn}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$ und $\sqrt{\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)} = \mathrm{dn}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$. Wollen wir diese Functionen auf solche mit dem Modul k zurückführen, so haben wir nur $\frac{z}{k} = t$, also $z = kt$ und $\partial z = k\partial t$ zu setzen, wodurch, weil für $z = 0$ auch $t = 0$ ist, das Integral umgeformt wird in $u = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1-t^2)}\sqrt{(1-k^2t^2)}}$. Dieser Formel gemäfs ist aber t der Modular-Sinus des Argumentes u für den Modul k, und also in Zeichen $t = \mathrm{sn}\, u$; da nun aber $z = kt$ ist, so haben wir die Formel

$$\mathrm{sn}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = k\,\mathrm{sn}\, u;$$

hieraus folgt aber

$$\mathrm{cn}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{dn}\, u,$$

$$\mathrm{tn}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \frac{k\,\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{dn}\, u} = \frac{k}{k'}\,\mathrm{cnc}\, u,$$

$$\mathrm{dn}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{cn}\, u.$$

Conjugirt mit dem Modul $\frac{1}{k}$ ist derjenige, dessen Quadrat das Quadrat von $\frac{1}{k}$ zu Eins ergänzt, oder $\sqrt{\left(1-\frac{1}{k^2}\right)}$, und dieser Modul ist, wenn wir wieder k zwischen den Grenzen 0 und 1 enthalten ansehen, imaginär; derselbe ist entweder $\sqrt{\frac{-(1-k^2)}{k^2}} = \frac{ik'}{k}$ oder $\sqrt{\frac{1-k^2}{-k^2}} = \frac{k'}{ik}$. Nach der gewöhnlichsten Art zu rechnen sehen wir

$$\frac{ik'}{k} \text{ als conjugirt mit } \frac{1}{k}$$

an, und beachten dann mit strenger Consequenz die Vorschrift, dafs, wenn $\frac{1}{k}$ für k gesetzt wird, $\frac{ik'}{k}$ für k' zu setzen sei.

Unter der Voraussetzung, dafs $\frac{ik'}{k}$ der mit $\frac{1}{k}$ conjugirte Modul sei, bestimmen wir jetzt schon den zum Modul $\frac{1}{k}$ gehörigen Modular-Quadranten, welchen wir für den Augenblick mit $k.\mathfrak{K}$ bezeichnen. So wie $\mathrm{dn}\,K = k'$ ist, so mufs auch $\mathrm{dn}\left(k.\mathfrak{K}, \frac{1}{k}\right) = \frac{ik'}{k}$ sein.

Da den vorigen Formeln gemäfs $\mathrm{dn}\left(k.\mathfrak{K}, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{cn}\,\mathfrak{K}$ ist, so soll also auch $\mathrm{cn}\,\mathfrak{K} = \frac{ik'}{k}$ sein. Den Formeln (16.) im §. 28. gemäfs ist $\mathrm{cn}(K+iK') = \frac{k'}{ik}$, und $\mathrm{cn}(K-iK') = \frac{ik'}{k}$; daher schliefsen wir, dafs $\mathfrak{K} = K-iK'$, und also

$$k(K-iK') \text{ der zum Modul } \frac{1}{k}$$

gehörige Modular-Quadrant sei; wir hätten $k(K+iK')$ als Modular-Quadranten gefunden, wenn wir $\frac{k'}{ik}$ als mit dem Modul $\frac{1}{k}$ conjugirt betrachtet hätten. Da wir aber $\frac{ik'}{k}$ als den conjugirten Modul ansehen, so haben wir den Lehrsatz:

Wird $\frac{1}{\mathrm{k}}$ *statt des Moduls* k *gesetzt, so verwandelt sich der Modular-Quadrant* K *in* $\mathrm{k}(\mathrm{K}-\mathrm{iK}')$.

Wenden wir die Formeln (17.) des §. 13. auf die Functionen mit dem Modul $\frac{1}{k}$ an, so entstehen die Formeln

$$\mathrm{snc}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u} = \frac{1}{\mathrm{snc}\,u},$$

$$\operatorname{cnc}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \frac{ik'.\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} = ik' \operatorname{tn} u = \frac{i}{\operatorname{tnc} u},$$

$$\operatorname{tnc}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{i \operatorname{cnc} u},$$

$$\operatorname{dnc}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \frac{ik'}{k} \cdot \frac{1}{\operatorname{cn} u}.$$

Hiernach haben wir also die folgenden Lehrsätze: *Setzt man* k u *für* u *und* $\frac{1}{\mathrm{k}}$ *statt des Moduls* k, *so verwandelt sich* k′ *in* $\frac{\mathrm{i k'}}{\mathrm{k}}$, ferner

1. $\operatorname{sn} u$ in $k \operatorname{sn} u$,
2. $\operatorname{cn} u$ in $\operatorname{dn} u$,
3. $\operatorname{tn} u$ in $\frac{k}{k'} \operatorname{cnc} u$,
4. $\operatorname{dn} u$ in $\operatorname{cn} u$,
5. $\operatorname{snc} u$ in $\frac{1}{\operatorname{snc} u}$,
6. $\operatorname{cnc} u$ in $\frac{i}{\operatorname{tnc} u}$,
7. $\operatorname{tnc} u$ in $\frac{1}{i \operatorname{cnc} u}$,
8. $\operatorname{dnc} u$ in $\frac{ik'}{k} \cdot \frac{1}{\operatorname{cn} u}$,
9. $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \operatorname{am} 2u$ in $k \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u$.

Es ist $\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{i} \log \sqrt{\frac{1 + i \operatorname{tn}\left(ku, \frac{1}{k}\right)}{1 - i \operatorname{tn}\left(ku, \frac{1}{k}\right)}} = \frac{1}{i} \log \sqrt{\frac{1 + \frac{ik}{k'} \operatorname{cnc} u}{1 - \frac{ik}{k'} \operatorname{cnc} u}}$; erinnern wir uns also der Formel (8.) im Zusatze zu §. 27., so haben wir

$$\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k}{k'} \operatorname{cnc} u\right) = l\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{amc}'(ui)}{i}\right);$$

daher ist

$$\text{ℓ}\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \text{ℓ}\operatorname{arc\,sin}(k \operatorname{sn} u) = \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{amc}'(ui)}{i},$$

weil den obigen Formeln gemäfs $\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k}{k'} \operatorname{cnc} u\right) = \operatorname{arc\,sin}(k \operatorname{sn} u)$ ist.

Zusatz. Es ist

$$\operatorname{sn} u = \sin \operatorname{am} u, \qquad \operatorname{cn} u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{am} u\right) \text{ und}$$

$$\operatorname{snc} u = \sin \operatorname{amc} u, \qquad \operatorname{cnc} u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{amc} u\right);$$

also ist auch

$$k \operatorname{sn} u = \sin \operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right),$$

$$\operatorname{dn} u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)\right),$$

$$k \operatorname{snc} u = \sin \operatorname{am}\left(k(K - u), \frac{1}{k}\right),$$

$$\operatorname{dnc} u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{am}\left(k(K - u), \frac{1}{k}\right)\right).$$

Da nun überhaupt $\mathfrak{L}\phi = \log\sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}}$ ist, so ist

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u = \log\sqrt{\frac{1+\mathrm{sn}\,u}{1-\mathrm{sn}\,u}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}\,\mathrm{amc}\,u = \log\sqrt{\frac{1+\mathrm{snc}\,u}{1-\mathrm{snc}\,u}},$$

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{am}\,u\right) = \log\sqrt{\frac{1+\mathrm{cn}\,u}{1-\mathrm{cn}\,u}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{amc}\,u\right) = \log\sqrt{\frac{1+\mathrm{cnc}\,u}{1-\mathrm{cnc}\,u}},$$

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\left(ku,\frac{1}{k}\right) = \log\sqrt{\frac{1+k\,\mathrm{sn}\,u}{1-k\,\mathrm{sn}\,u}}, \qquad \mathfrak{L}\,\mathrm{am}\left(k(K-u),\frac{1}{k}\right) = \log\sqrt{\frac{1+k\,\mathrm{snc}\,u}{1-k\,\mathrm{snc}\,u}},$$

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{am}\left(ku,\frac{1}{k}\right)\right) = \log\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}\,u}{1-\mathrm{dn}\,u}},$$

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{am}\left(k(K-u),\frac{1}{k}\right)\right) = \log\sqrt{\frac{1+\mathrm{dnc}\,u}{1-\mathrm{dnc}\,u}}.$$

§. 31.

Cyklische Functionen mit dem Modul $\frac{ik}{k'}$ zurückgeführt auf cyklische Functionen mit dem Modul k.

Auch die Modular-Functionen mit dem Modul $\frac{ik}{k'}$ können leicht auf Modular-Functionen mit dem Modul k zurückgeführt werden; so wie der Modul $\frac{ik'}{k}$ mit $\frac{1}{k}$ conjugirt ist, so ist auch $\frac{ik}{k'}$ mit $\frac{1}{k'}$ conjugirt, und diese Bemerkung reicht schon hin, die gesuchten Formeln sogleich aus denen des §. 30. herzuleiten. Da nach §. 30. ist $\mathrm{tn}\left(ku,\frac{1}{k}\right) = \frac{k\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}$, so ist auch $\mathrm{tn}\left(k'u,\frac{1}{k'}\right) = \frac{k'\,\mathrm{sn}'\,u}{\mathrm{dn}'\,u}$, und folglich $\mathrm{tn}\left(k'ui,\frac{1}{k'}\right) = \frac{k'\,\mathrm{sn}'(ui)}{\mathrm{dn}'(ui)}$. Da aber nach §. 27. ist $\mathrm{sn}'(ui) = i.\mathrm{tn}\,u = i.\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}$, ferner $\mathrm{dn}'(ui) = \frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}$ und $\mathrm{tn}\left(k'ui,\frac{1}{k'}\right) = i\,\mathrm{sn}\left(k'u,\frac{ik}{k'}\right)$, so entsteht, wenn diese Werthe substituirt werden, die Formel

$$\mathrm{sn}\left(k'u,\frac{ik}{k'}\right) = \frac{k'\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u} = \mathrm{cnc}\,u, \quad \text{also}$$

$$\mathrm{cn}\left(k'u,\frac{ik}{k'}\right) = \mathrm{snc}\,u,$$

$$\mathrm{tn}\left(k'u,\frac{ik}{k'}\right) = \frac{1}{\mathrm{tnc}\,u},$$

$$\mathrm{dn}\left(k'u,\frac{ik}{k'}\right) = \sqrt{\left(1+\frac{k^2}{k'^2}\,\mathrm{cnc}^2\,u\right)} = \frac{\mathrm{dnc}\,u}{k'} = \frac{1}{\mathrm{dn}\,u},$$

$$\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{am}\left(2k'u,\frac{ik}{k'}\right) = k'.\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u} = \frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cn}\,u}.$$

Bezeichnen wir den Modular-Quadranten für den Modul $\frac{ik}{k'}$ für den Augenblick mit $k'.\mathfrak{K}$, so mufs also, weil $\mathrm{dn}K = k'$ ist, auch $\mathrm{dn}\left(k'\mathfrak{K}, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{1}{k'}$ sein, da $\frac{1}{k'}$ der mit $\frac{ik}{k'}$ conjugirte Modul ist. Da aber den vorigen Formeln gemäfs $\mathrm{dn}\left(k'.\mathfrak{K}, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{1}{\mathrm{dn}\,\mathfrak{K}}$ ist, so mufs auch $\frac{1}{\mathrm{dn}\,\mathfrak{K}} = \frac{1}{k'}$, also $\mathrm{dn}\,\mathfrak{K} = k'$, und daher $\mathfrak{K} = K$ sein. *Der zum Modul* $\frac{ik}{k'}$ *gehörige Modular-Quadrant ist folglich* k'.K.

Nach den Formeln (17.) des §. 13. leiten wir aus den vorstehenden Formeln noch her

$$\mathrm{snc}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \mathrm{cn}\,u,$$

$$\mathrm{cnc}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \mathrm{sn}\,u,$$

$$\mathrm{tnc}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{1}{\mathrm{tn}\,u},$$

$$\mathrm{dnc}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \sqrt{\left(1 + \frac{k^2}{k'^2}\,\mathrm{cn}^2 u\right)} = \frac{\mathrm{dn}\,u}{k'} = \frac{1}{\mathrm{dnc}\,u}.$$

Da sowohl $\mathrm{tang\,am}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right).\mathrm{tang\,amc}\,u = 1$, als auch

$$\mathrm{tang\,amc}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right).\mathrm{tang\,am}\,u = 1 \text{ ist, so ist}$$

$$\mathrm{am}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{amc}\,u,$$

$$\mathrm{amc}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{am}\,u.$$

Fassen wir die entwickelten Formeln zusammen, so haben wir die folgenden Lehrsätze:

Wird $\frac{ik}{k'}$ statt des Moduls k (also $\frac{1}{k'}$ für k') und $k'u$ für u gesetzt, so verwandelt sich

1.	$\mathrm{sn}\,u$	in	$\mathrm{cnc}\,u$,	5.	$\mathrm{snc}\,u$	in	$\mathrm{cn}\,u$,
2.	$\mathrm{cn}\,u$	in	$\mathrm{snc}\,u$,	6.	$\mathrm{cnc}\,u$	in	$\mathrm{sn}\,u$,
3.	$\mathrm{tn}\,u$	in	$\frac{1}{\mathrm{tnc}\,u}$,	7.	$\mathrm{tnc}\,u$	in	$\frac{1}{\mathrm{tn}\,u}$,
4.	$\mathrm{dn}\,u$	in	$\frac{1}{\mathrm{dn}\,u} = \frac{\mathrm{dnc}\,u}{k'}$,	8.	$\mathrm{dnc}\,u$	in	$\frac{1}{\mathrm{dnc}\,u} = \frac{\mathrm{dn}\,u}{k'}$,

9. $\mathrm{am}\,u$ in $\frac{\pi}{2} - \mathrm{amc}\,u$,

10. $\mathrm{amc}\,u$ in $\frac{\pi}{2} - \mathrm{am}\,u$,

11. $\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\mathrm{am}\,2u$ in $\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dnc}\,u = \frac{1}{\mathrm{tnc}\,u\,\mathrm{dn}\,u} = \frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cn}\,u}$.

Zusatz 1. So wie zum Modul $\frac{ik}{k'}$ der Modular-Quadrant $k'.K$ gehört, so gehört auch zum Modul $\frac{ik'}{k}$, welcher mit $\frac{1}{k}$ conjugirt ist, der Modular-Quadrant $k.K'$; daher vervollständigen wir den im §. 30. bewiesenen Lehrsatz, wie folgt:

Setzt man $\frac{1}{\mathrm{k}}$ *statt des Moduls* k *und* $\frac{\mathrm{ik}'}{\mathrm{k}}$ *statt* k′, *so verwandelt sich* K *in* $\mathrm{k}(\mathrm{K}-\mathrm{iK}')$ *und* K′ *in* $\mathrm{k}.\mathrm{K}'$, *also das Verhältniſs*

$$\frac{K}{K'} \text{ in } \frac{K}{K'} - i.$$

Zusatz 2. So wie zum Modul $\frac{1}{k}$ der Modular-Quadrant $k(K-iK')$ gehört, so gehört auch zum Modul $\frac{1}{k'}$, welcher mit $\frac{ik}{k'}$ conjugirt ist, der Modular-Quadrant $k'(K'-iK)$, und wir haben also den Lehrsatz:

Setzt man $\frac{\mathrm{ik}}{\mathrm{k}'}$ *statt des Moduls* k *und* $\frac{1}{\mathrm{k}'}$ *statt* k′, *so verwandelt sich* K *in* $\mathrm{k}'.\mathrm{K}$ *und* K′ *in* $\mathrm{k}'(\mathrm{K}'-i\mathrm{K})$, *also das Verhältniſs*

$$\frac{K'}{K} \text{ in } \frac{K'}{K} - i.$$

Anmerkung. Die im Vorstehenden entwickelten Sätze, wodurch die Functionen mit den Moduln k, k', $\frac{1}{k}$ und $\frac{ik}{k'}$ auf einander zurückgeführt werden, gestatten nicht bloſs die zahlreichsten Anwendungen, sondern sie bieten auch die Möglichkeit dar, aus einigen wenigen Relationen eine groſse Menge ähnlicher, welche andere und andere Functionen betreffen, ohne groſse Weitläufigkeiten herzuleiten. Auch der Zusammenhang unter bereits gefundenen Relationen läſst sich dadurch auf mannigfaltige Arten nachweisen.

(Die Fortsetzung folgt im nächsten Hefte.)

2.

Mémoire sur quelques intégrales définies.

(Par Mr. *A. F. Svanberg* à Stockholm.)

I.

Si l'on a deux équations différentielles du second ordre, dont aucune ne soit intégrable en termes finis, il n'en est pas moins très souvent possible de les combiner entr'elles de manière, qu'on en puisse tirer une intégrale première et quelquefois même une intégrale seconde. Or si l'on peut satisfaire à chacune de ces équations par une intégrale définie, leur substitution dans l'équation primitive, qu'on a trouvée, donnera des rélations intéressantes, qui lient entr'elles ces quantités. C'est la recherche de ces rélations, qui fera le principal objet de ce mémoire. Dans le tome second du *Journal des Mathématiques* de Mr. *Crelle* *), *Abel* a donné un mémoire sur le même sujet, où il a trouvé plusieurs rélations entre quelques intégrales définies. Mais comme il ne traitoit que le cas spécial, où les deux équations différentielles du second ordre étaient les mêmes, il n'a pu obtenir toutes les rélations, ni même les plus remarquables, qui existent effectivement entre les intégrales, qu'il considéroit.

Les formules, que je traiterai dans ce mémoire, se déduisent des équations suivantes

$$a. \quad \frac{d^2z}{du^2} + P\frac{dz}{du} + Qz = 0,$$

$$b. \quad \frac{d^2y}{du^2} + (P+2R)\frac{dy}{du} + \left[Q + R(P+R) + \frac{dR}{du}\right] y = 0,$$

où P, Q et R sont des fonctions de u. On en tire

$$\frac{z\,d^2y - y\,d^2z}{du^2} + (P+2R)z\frac{dy}{du} - Py\frac{dz}{du} + \left[PR + R^2 + \frac{dR}{du}\right] yz = 0,$$

laquelle équation multiplié par $e^{\int (P+R)\,du}.du$ dévient intégrable et donne

$$1. \quad e^{\int (P+R)\,du}.\left(\frac{z\,dy - y\,dz}{du} + Rzy\right) = A,$$

où A désigne la fonction indépendante de u, introduite par l'intégration, laquelle devra être déterminée après quelque valeur spéciale de u, qui ne rendra aucune des quantités y, z, $\frac{dy}{du}$, $\frac{dz}{du}$ infinie. S'il arrivoit dans quel-

*) Ueber einige bestimmte Integrale von *N. H. Abel.*

que cas spécial, qu'on obtiendroit $A = 0$, l'équation (1.) donneroit

$$2. \qquad y = Bz.e^{-\int R\,du},$$

où B désigne une autre quantité indépendante de u.

II.

Pour appliquer maintenant les formules précédentes, nous considérerons d'abord les mêmes intégrales définies, traitées par *Abel* dans son mémoire. Supposons pour cet effet

$$z = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}(x+u)^{\gamma+1}.\,dx,$$

ce qui donne

$$\frac{dz}{du} = (\gamma+1)\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}(x+u)^{\gamma}\,dx,$$

$$\frac{d^2z}{du^2} = \gamma(\gamma+1)\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}(x+u)^{\gamma-1}\,dx.$$

De plus on obtient par la différentiation

$$d.[x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}.(x+u)^{\gamma}] =$$

$$x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx\begin{Bmatrix}-(\alpha+\beta+\gamma)(x+u)^{\gamma+1}+((\alpha+\gamma)(1+u)+(\beta+\gamma)u)(x+u)^{\gamma}\\ -\gamma u(1+u)(x+u)^{\gamma-1}\end{Bmatrix},$$

d'où l'on tire ensuite en intégrant entre les limites $x=0$ et $x=1$, après avoir substitué les valeurs des intégrales en z,

$$3. \qquad \frac{d^2z}{du^2} - \left(\frac{\alpha+\gamma}{u} + \frac{\beta+\gamma}{1+u}\right)\frac{dz}{du} + \frac{(\gamma+1)(\alpha+\beta+\gamma)}{u(1+u)}z = 0,$$

laquelle équation comparée à $(a.)$ donne

$$P = -\frac{\alpha+\gamma}{u} - \frac{\beta+\gamma}{1+u}, \qquad Q = \frac{(\gamma+1)(\alpha+\beta+\gamma)}{u(1+u)}.$$

Faisons maintenant dans l'équation $(b.)$

$$R = \frac{1+\alpha+\gamma}{u} + \frac{1+\beta+\gamma}{1+u};$$

il en résultera

$$4. \qquad \frac{d^2y}{du^2} + \left(\frac{2+\alpha+\gamma}{u} + \frac{2+\beta+\gamma}{1+u}\right)\frac{dy}{du} + \frac{(\gamma+2)(\alpha+\beta+\gamma+1)}{u(1+u)}y = 0.$$

Or l'équation (3.) se changeant dans celle en y de deux manières différentes, savoir ou en remplaçant α par β, β par α et γ par $-(2+\alpha+\beta+\gamma)$, ou aussi en remplaçant α par $1-\alpha$, β par $1-\beta$ et γ par $-(3+\gamma)$, on satisfera à l'équation (4.) par les deux valeurs suivantes

$$y_1 = \int_0^1 \frac{x^{\beta-1}(1-x)^{\alpha-1}\,dx}{(x+u)^{\alpha+\beta+\gamma+1}}, \qquad y_2 = \int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}(1-x)^{\beta}(x+u)^{\gamma+2}}\ *).$$

*) Il y a bien aussi une valeur de z, autre que celle, que nous employons ici, qui satisfait à l'équation (3.), mais comme elle ne nous apprend rien de nouveau, nous n'en faisons mention ici.

Comme on a de plus

$$e^{\int (P+R)\,du} = u(1+u),$$

l'équation (1.) donnera

$$5.\quad u(1+u)\left(z\frac{dy_1}{du} - y_1\frac{dz}{du}\right) + (1+\alpha+\gamma+(2+\alpha+\beta+2\gamma)u)y_1 z = A,$$

$$6.\quad u(1+u)\left(z\frac{dy_1}{du} - y_2\frac{dz}{du}\right) + (1+\alpha+\gamma+(2+\alpha+\beta+2\gamma)u)y_2 z = A'.$$

Pour déterminer les constantes A et A', substituons les valeurs de z, y_1 et y_2 et faisons puis $u=\infty$; on en conclura aisément que $A=0$ et

$$A' = (\alpha+\beta-1)\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx \int_0^1 x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}\,dx.$$

Mais on a suivant une formule connue

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-z)^{n-1}\,dx = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)},$$

où $\Gamma(m)$ représente, suivant la notation de *Legendre*, l'intégrale *Eulerienne* de seconde espèce $\int_0^\infty e^{-x}.x^{m-1}\,dx$, qui jouit de plus des propriétés suivantes

$$\Gamma(m+1) = m\,\Gamma(m), \qquad \Gamma(m)\,\Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\sin m\pi}.$$

Donc, substitution faite, il vient

$$A' = -\pi.\frac{\sin(\alpha+\beta)\pi}{\sin\alpha\pi\,\sin\beta\pi},$$

et par là l'équation (6.) donne

$$7.\quad \begin{cases} (\gamma+2)u(u+1)\int_0^1 \frac{(x+u)^{\gamma+1}\,dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}\int_0^1 \frac{x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}\,dx}{(x+u)^{\gamma+3}} \\ +(\gamma+1)u(u+1)\int_0^1 \frac{(x+u)^{\gamma}\,dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}\int_0^1 \frac{x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}\,dx}{(x+u)^{\gamma+2}} \\ -(1+\alpha+\gamma+u(2+\alpha+\beta+2\gamma))\int_0^1 \frac{(x+u)^{\gamma+1}\,dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}\int_0^1 \frac{x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}\,dx}{(x+u)^{\gamma+2}} \\ = \frac{\sin(\alpha+\beta)\pi}{\sin\alpha\pi\,\sin\beta\pi}, \end{cases}$$

Comme nous avons trouvé $A=0$, il résultera de la formule (2.)

$$8.\quad \int_0^1 \frac{x^{\beta-1}(1-x)^{\alpha-1}\,dx}{(x+u)^{\alpha+\beta+\gamma+1}} = \frac{\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}(x+u)^{\gamma+1}\,dx}{u^{1+\alpha+\gamma+1}(1+u)^{1+\beta+\gamma}},$$

où la constante B a été déterminée par la suppositions de $u=\infty$. Si dans cette formule on fait $\gamma=-1$, on trouve

$$\int_0^1 \frac{x^{\beta-1}(1-x)^{\alpha-1}\,dx}{(x+u)^{\alpha+\beta}} = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\cdot\frac{1}{u^\alpha(1+u)^\beta},$$

formule donnée par *Abel* dans le mémoire cité. En faisant $\gamma=-\alpha-\beta$,

il vient

$$\int_0^1 \frac{x^{\beta-1}(1-x)^{\alpha-1}\,dx}{x+u} = u^{\beta-1}(1+u)^{\alpha-1}\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx}{(x+u)^{\alpha+\beta-1}},$$

ou bien, à cause de la formule précédente,

$$\int_0^1 \frac{x^{\beta-1}(1-x)^{\alpha-1}\,dx}{x+u} = -u^{\beta-1}(1+u)^{\alpha-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta-1)}\int \frac{du}{u^{\beta}(1+u)^{\alpha}}.$$

Posons encore en dernier lieu $\beta = 1-\alpha$ et remplaçons γ par $\gamma-2$, la formule (8.) déviendra

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}(1-x)^{1-\alpha}(x+a)^{\gamma}} = u^{1-\alpha-\gamma}(1+u)^{\alpha-\gamma}\int_0^1 \frac{(x+u)^{\gamma-1}\,dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}},$$

d'où, en faisant $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\gamma = n+\frac{1}{2}$, on obtient

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+u)^n\sqrt{[x(1-z)(x+u)]}} = \frac{1}{u^n(1+u)^n}\int_0^1 \frac{(x+u)^{n'}\,dx}{\sqrt{[x(1-x)(x+u)]}},$$

ou bien en changeant x en x^2

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+u)^n\sqrt{[1-x^2)(x^2+u)]}} = \frac{1}{u^n(1+u)^n}\int_0^1 \frac{(x^2+u)^n\,dx}{\sqrt{[(1-x^2)(x^2+u)]}}.$$

Cette dernière formule est très commode pour quelques transformations, dont on peut avoir besoin dans la théorie des fonctions elliptiques.

III.

Nous continuerons ici de conserver les valeurs de P, Q et z du numéro précédent, mais nous ferons

$$R = \frac{1+\alpha+\gamma}{u}.$$

Cela change l'équation (*b.*) en

$$\frac{d^2y}{du^2} + \left(\frac{2+\alpha+\gamma}{u} - \frac{\beta+\gamma}{1+u}\right)\frac{dy}{du} + \frac{\alpha(1-\beta)}{u(1+u)}\cdot y = 0$$

à laquelle on satisfera en prenant ou $y = y_1$ ou $y = y_2$, ayant fait

$$y_1 = \int_0^1 \frac{(1-x)^{\gamma+1}\,dx}{x^{\alpha+\beta+\gamma+1}(x+u)^{1-\beta}}, \qquad y_2 = \frac{(1-x)^{\alpha+\beta+\gamma}.\,dx}{x^{\gamma+2}(x+u)^{\alpha}}.$$

Or à cause de

$$e^{\int(P+R)\,du} = u(1+u)^{-\beta-\gamma},$$

l'équation (1.) donnera

$$9.\quad \frac{u}{(1+u)^{\beta+\gamma}}\left(z\frac{dy_1}{du} - y_1\frac{dz}{du}\right) + \frac{1+\alpha+\gamma}{(1+u)^{\beta+\gamma}}\cdot y_1 z = A,$$

$$10.\quad \frac{u}{(1+u)^{\beta+\gamma}}\left(z\frac{dy_2}{du} - y_2\frac{dz}{du}\right) + \frac{1+\alpha+\gamma}{(1+u)^{\beta+\gamma}}\cdot y_2 z = A'.$$

Les valeurs des constantes A et A' s'obtiendront en faisant $u = \infty$, ce

qui donne $A' = 0$ et

$$A = -\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(2+\gamma)\,\Gamma(-\alpha-\beta-\gamma)\sin(\alpha+\beta)\,\pi}{\pi}.$$

En substituant la valeur de A dans l'équation (9.), nous avons, après avoir changé γ en $\gamma-2$,

$$\text{11.}\quad \left\{\begin{aligned} &(1-\beta)\,u\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx}{(x+u)^{1-\gamma}}\int_0^1 \frac{(x+u)^{\beta-2}\,.\,dx}{x^{\alpha+\beta+\gamma-1}(1-x)^{1-\gamma}}\\ &+(\gamma-1)\,u\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx}{(x+u)^{2-\gamma}}\int_0^1 \frac{(x+u)^{\beta-1}\,.\,dx}{x^{\alpha+\beta+\gamma-1}(1-x)^{1-\gamma}}\\ &+(1-\alpha-\gamma)\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx}{(x+u)^{1-\gamma}}\int_0^1 \frac{(x+u)^{\beta-1}\,.\,dx}{x^{\alpha+\beta+\gamma-1}(1-x)^{1-\gamma}}\\ &=\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma)\,\Gamma(2-\alpha-\beta-\gamma)\sin(\alpha+\beta)\,\pi}{\pi(1+u)^{2-\beta-\gamma}}. \end{aligned}\right.$$

A' étant $=0$, l'équation (2.) donne, si l'on remplace γ par $-1-\gamma$,

$$\text{12.}\quad \int_0^2 \frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma-1}\,dx}{(x+u)^{\alpha}} = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,u^{\alpha-\gamma}}\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx}{(x+u)^{\gamma}},$$

la constante B ayant été déterminée par la supposition $u=\infty$. Si p. e. on fait $\beta = 1-\alpha$, il vient

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma}(x+u)^{\alpha}} = \frac{\sin\alpha\pi}{\sin\gamma\pi}\,.\,u^{\gamma-\alpha}\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}(x+u)^{\gamma}},$$

et si l'on fait

$$\alpha = \tfrac{1}{2}, \qquad \beta = \tfrac{3}{2}-\gamma,$$

à cause de l'égalité connue

$$\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(2-2\gamma)}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{3}{2}-\gamma)} = \frac{2^{1-2\gamma}}{\sin\gamma\pi},$$

la formule (12.) donnera

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\gamma}(1-x)^{2\gamma-1}(x+u)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{1-2\gamma}}{\sin\gamma\pi}\cdot u^{\gamma-\frac{1}{2}}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{x}\,(1-x)^{\gamma-\frac{1}{2}}(x+u)^{\gamma}}.$$

IV.

Conservons encore les valeurs de P, Q et z du numéro (11.), mais faisons

$$R = \frac{1+\beta+\gamma}{1+u}.$$

Cela posé, l'équation (*b*.) déviendra

$$\frac{d^2y}{du^2} - \left(\frac{\alpha+\gamma}{u} - \frac{2+\beta+\gamma}{1+u}\right)\frac{dy}{du} + \frac{\beta(1-\alpha)}{1(1+u)}\cdot y = 0,$$

à laquelle on satisfera par les deux valeurs suivantes de y:

$$y_1 = \int_0^1 \frac{x^{\gamma+1}\,dx}{(1-x)^{\alpha+\beta+\gamma+1}(x+u)^{1-\alpha}}, \qquad y_2 = \int_0^1 \frac{x^{\alpha+\beta+\gamma}\,dx}{(1-x)^{\gamma+2}(x+u)^{\beta}}.$$

Comme on a aussi

$$e^{\int (P+R)\,du} = \frac{1+u}{u^{\alpha+\gamma}},$$

l'équation (1.) donnera

$$13.\quad \frac{1+u}{u^{\alpha+\gamma}}\left(z\frac{dy_1}{du} - y_1\frac{dz}{du}\right) + \frac{1+\beta+\gamma}{u^{\alpha+\gamma}}.y_1 z = A,$$

$$14.\quad \frac{1+u}{u^{\alpha+\gamma}}\left(z\frac{dy_2}{d\eta} - y_2\frac{dz}{du}\right) + \frac{1+\beta+\gamma}{u^{\alpha+\gamma}}.y_2 z = A'.$$

Si l'on fait $u=\infty$, après avoir substitué les valeurs de x, y_1 et y_2, on obtient $A'=0$ et

$$A = -\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(2+\gamma)\,\Gamma(-\alpha-\beta-\gamma)\sin(\alpha+\beta)\pi}{\pi},$$

moyennant quoi l'équation (13.) dévient, après avoir changé γ en $\gamma-2$,

$$15.\quad \left\{\begin{array}{l} (1-\alpha)(1+u)\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx}{(x+u)^{1-\gamma}}\int_0^1 \frac{(x+u)^{2-\alpha}\,dx}{x^{1-\gamma}(1-x)^{\alpha+\beta+\gamma-1}} \\ -(1-\gamma)(1+u)\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx}{(x+u)^{2-\gamma}}\int_0^1 \frac{(x+u)^{1-\alpha}\,dx}{x^{1-\gamma}(1-x)^{\alpha+\beta+\gamma-1}} \\ +(1+\beta-\gamma)\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx}{(x+u)^{1-\gamma}}\int_0^1 \frac{(x+u)^{1-\alpha}\,dx}{x^{1-\gamma}(1-x)^{\alpha+\beta+\gamma-1}} \\ \qquad = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma)\,\Gamma(2-\alpha-\beta-\gamma)\sin(\alpha+\beta)\pi}{\pi.u^{2-\alpha-\gamma}}. \end{array}\right.$$

Comme nous avons trouvé $A'=0$, l'équation (2.) donnera après avoir changé γ en $-\gamma-1$

$$16.\quad \int_0^1 \frac{x^{\alpha+\beta-\gamma-1}(1-x)^{\gamma-1}\,dx}{(x+u)^{\beta}} = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)(1+u)^{\beta-1}}\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx}{(x+u)^{\gamma}}.$$

Les formules (8.), (12.) et (16.) en effet ne sont pas toutes les trois indépendantes entr'elles; car deux quelconques étant connues, la troisième s'en déduit aisément. Si dans la dernière on fait $\beta=1-\alpha$, on obtiendra

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\gamma}(1-x)^{1-\gamma}(x+u)^{1-\alpha}} = \frac{\sin\alpha\pi}{\sin\gamma\pi}.(1+u)^{\alpha+\gamma-1}\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}(x+u)^{\gamma}}.$$

Les formules (7.), (8.), (11.), (12.), (15.) et (16.) conjointement avec celle qu'a donnée Mr. *Abel* dans le mémoire cité, constituent des proprietés remarquables, dont joint la transcendante

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}(x+u)^{\gamma+1}\,dx.$$

V.

Puisque suivant une formule donnée par Mr. *Liouville* on a

$$\int^1 \Phi\left(\frac{x}{u}\right)(1-x)^{p-1}\,dx = (-1)^p\,\Gamma(p).u\int^{p'} \frac{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)du^p}{u^{p+1}},$$

toutes les intégrales définies, que nous avons considérés jusqu'ici, pourront être transformées en intégrales indéfinies. Les équations (8.), (12.) et (16.) donnent

$$\int^\alpha \frac{u^\gamma\,du^\alpha}{(1+u)^{\alpha+\beta+\gamma}} = (-1)^{\beta-\alpha}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{u^{\alpha+\gamma}}{(1+u)^{\beta+\gamma}}\int^\beta \frac{(1+u)^\gamma\,du^\beta}{u^{\alpha+\beta+\gamma}},$$

$$\int^{\alpha+\beta-\gamma} \frac{dx^{\alpha+\beta-\gamma}}{u^\beta(1+u)^\alpha} = \frac{(-1)^{\gamma-\alpha}}{u^{\gamma-\alpha}}\cdot\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\int^\beta \frac{dx^\beta}{u^{\alpha+\beta-\gamma}(1+u)^\gamma},$$

$$\int^\gamma \frac{du^\gamma}{u^\alpha(1+u)^\beta} = \frac{(-1)^{\beta-\gamma}}{(1+u)^{\beta-\gamma}}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\int^\beta \frac{du^\beta}{u^{\alpha+\beta-\gamma}(1+u)^\gamma},$$

formules dignes d'être remarquées, parcequ'elles montrent, qu'il n'est pas impossible de transformer des intégrales à indices fractionnaires en intégrales multiples. Si l'on pouvoit trouver un moyen de faire toujours de transformations de cette sorte, le calcul différentiel à indices quelconques en tireroit les plus grands avantages. Ces trois dernières formules supposent, comme on sait d'ailleurs, que toutes les intégrales soient prises de manière à s'évanouir avec $x = \infty$.

VI.

Supposons en second lieu

$$17. \quad z = \int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)^\beta(x+u)^\gamma},$$

ce qui donne, pour déterminer z, l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^2z}{du^2} + \left(\frac{\alpha+\gamma}{u} - \frac{\beta+\gamma}{1-u}\right)\frac{dz}{du} + \frac{\gamma(1-\alpha-\beta-\gamma)}{u(1-u)}z = 0,$$

laquelle comparée à (*a.*) donne

$$P = \frac{\alpha+\gamma}{u} - \frac{\beta+\gamma}{1-u}, \qquad Q = \frac{\gamma(1-\alpha-\beta-\gamma)}{u(1-u)}.$$

Faisons de plus dans l'équation (*b.*)

$$R = \frac{1-\alpha-\gamma}{u} + \frac{\beta+\gamma-1}{1-u},$$

par où elle dévient

$$\frac{d^2y}{du^2} + \left(\frac{2-\alpha-\gamma}{u} - \frac{2-\beta-\gamma}{1-u}\right)\frac{dy}{du} + \frac{(\gamma-1)(2-\alpha-\beta-\gamma)}{u(1-u)}y = 0,$$

à laquelle on satisfera par les deux valeurs suivantes de y,

$$y_1 = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}\,dx}{(x+u)^{1-\gamma}}, \qquad y_2 = \int_0^\infty \frac{(x+u)^{\alpha+\beta+\gamma-2}\,dx}{x^\beta(1+x)^\alpha}.$$

Comme on a aussi

$$e^{\int(P+R)\,du} = u(1-u),$$

l'équation (1.) donnera

$$18.\quad u(1-u)\left(z\frac{dy_1}{du} - y_1\frac{dz}{du}\right) + (1-\alpha-\gamma+(\alpha+\beta+2\gamma-2)u)\,y_1 z = A,$$

$$19.\quad u(1-u)\left(z\frac{dy_2}{du} - y_2\frac{dz}{du}\right) + (1-\alpha-\gamma+(\alpha+\beta+2\gamma-2)u)\,y_2 z = A'.$$

Si l'on substitue les valeurs de z, y_1 et y_2 et que puis on fasse $u=1$, il viendra

$$A = (\beta+\gamma-1)\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)^{\beta+\gamma}}\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1-\alpha}(1+x)^{2-\beta-\gamma}},$$

$$A' = (\beta+\gamma-1)\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)^{\beta+\gamma}}\int_0^\infty \frac{dx}{x^\beta(1+x)^{2-\beta-\gamma}}.$$

Mais on a suivant une formule connue,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^m(1+x)^n} = \frac{\Gamma(1-m)\,\Gamma(m+n-1)}{\Gamma(n)},$$

d'où il résulte enfin, tout calcul fait,

$$A = \frac{\pi\sin(\beta+\gamma)\pi}{\sin\alpha\pi\sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi},$$

$$A' = -\frac{\sin(\beta+\gamma)\pi}{\pi}\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1),$$

et au moyen de cela les équations (18.) et (19.) déviennent

$$20.\quad \begin{cases} (\gamma-1)\,u(1-u)\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)^\beta(x+u)^\gamma}\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}\,dx}{(x+u)^{2-\gamma}} \\ \quad + \gamma u(1-u)\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)^\beta(x+u)^{\gamma+1}}\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}\,dx}{(x+u)^{1-\gamma}} \\ +(1-\alpha-\gamma+(\alpha+\beta+2\gamma-2)u)\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)^\beta(x+u)^\gamma}\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}\,dx}{(x+u)^{1-\gamma}} \\ \quad = \dfrac{\pi\sin(\beta+\gamma)\pi}{\sin\alpha\pi\sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi}, \end{cases}$$

$$21.\quad \left\{\begin{aligned} &(\alpha+\beta+\gamma-2)\,u(1-u)\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)^\beta(x+u)^\gamma}\int_0^\infty \frac{(x+u)^{\alpha+\beta+\gamma-3}.dx}{x^\beta(1+x)^\alpha}\\ &\quad+\gamma u(1-u)\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)^\beta(x+u)^{\gamma+1}}\int_0^\infty \frac{(x+u)^{\alpha+\beta+\gamma-2}.dx}{x^\beta(1+x)^\alpha}\\ &+(1-\alpha-\gamma+(\alpha+\beta+2\gamma-2)u)\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)^\beta(x+u)^\gamma}\int_0^\infty \frac{(x+u)^{\alpha+\beta+\gamma-2}.dx}{x^\beta(1+x)^\alpha}\\ &\quad=-\frac{\sin(\beta+\gamma)\pi}{\pi}\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1). \end{aligned}\right.$$

VII.

Conservons toujours les valeurs de P et Q du numéro préeédent, mais faisons

$$R=\frac{1-\alpha-\gamma}{u},$$

l'équation (*b.*) se changera en

$$\frac{d^2y}{du^2}+\left(\frac{2-\alpha-\gamma}{u}-\frac{\beta+\gamma}{1-u}\right)\frac{dy}{du}-\frac{\beta(1-\alpha)}{u(1-u)}y=0,$$

à laquelle on satisfera en prenant pour y une quelconque des deux valeurs suivantes:

$$y_1=\int_0^\infty \frac{x^{\alpha+\beta+\gamma-2}.dx}{(1+x)^\gamma(x+u)^\alpha},\qquad y_2=\int_0^\infty \frac{x^{\gamma-1}(x+u)^{\alpha-1}.dx}{(1+x)^{\alpha+\beta+\gamma-1}}.$$

Comme nous avons de plus

$$e^{\int(P+R)\,du}=u(1-u)^{\beta+\gamma},$$

l'équation (1.) donnera

$$u(1-u)^{\beta+\gamma}\left(z\frac{dy_1}{du}-y_1\frac{dz}{du}\right)+(1-\alpha-\gamma)(1-u)^{\beta+\gamma}.zy_1=A,$$

$$u(1-u)^{\beta+\gamma}\left(z\frac{dy_2}{du}-y_2\frac{dz}{du}\right)+(1-\alpha-\gamma)(1-u)^{\beta+\gamma}.zy_2=A'.$$

Si l'on fait $u=1$, on trouve $A=0$ et $A'=0$, d'où l'on conclut ensuite en vertu de l'équation (2.)

$$22.\quad \int_0^\infty \frac{x^{\alpha+\beta+\gamma-2}.dx}{(1+x)^\gamma(x+u)^\alpha}=\frac{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\alpha+\gamma)}.u^{\alpha+\gamma-1}\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)^\beta(x+u)^\gamma},$$

$$23.\quad \int_0^\infty \frac{x^{\gamma-1}(x+u)^{\alpha-1}.dx}{(1+x)^{\alpha+\beta+\gamma-1}}=\frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma)\,u^{\alpha+\gamma-1}}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1)}\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)^\beta(x+u)^\gamma},$$

les constantes ayant été déterminées par la supposition $u=1$.

VIII.

Supposons en dernier lieu P et Q les mêmes, et

$$R=\frac{\beta+\gamma-1}{1-u};$$

l'équation (*b.*) dévient

$$\frac{d^2y}{du^2}+\left(\frac{\alpha+\gamma}{u}-\frac{2-\beta-\gamma}{1-x}\right)\frac{dy}{du}-\frac{\alpha(1-\beta)}{u(1-u)}y=0.$$

A cette équation on satisfera par les deux valeurs suivantes de y:

$$y_1=\int_0^\infty\frac{(1+x)^{\alpha+\beta+\gamma-2}.dx}{x^\gamma(x+u)^\alpha},\qquad y_2=\int_0^\infty\frac{(1+x)^{\gamma-1}(x+u)^{\beta-1}\,dx}{x^{\alpha+\beta+\gamma-1}}.$$

De plus on a

$$e^{\int(P+R)\,du}=u^{\alpha+\gamma}(1-u);$$

donc l'équation (1.) donne

$$24.\quad u^{\alpha+\gamma}(1-u)\left(z\frac{dy_1}{du}-y_1\frac{dz}{du}\right)+(\beta+\gamma-1)\,u^{\alpha+\gamma}.y_1z=A,$$

$$25.\quad u^{\alpha+\gamma}(1-u)\left(z\frac{dy_1}{du}-y_2\frac{dz}{du}\right)+(\beta+\gamma-1)\,u^{\alpha+\gamma}.y_2z=A'.$$

Pour déterminer les deux constantes A et A' faisons $u=1$; tout calcul fait, il viendra

$$A=-\frac{\sin(\beta+\gamma)\pi}{\pi}.\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1),$$

$$A'=\frac{\pi\sin(\beta+\gamma)\pi}{\sin\alpha\pi\sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi}.$$

Ces valeurs, aussi bien que celles de z, y_1 et y_2, substituées dans les équations (24.) et (25.), donnent enfin

$$26.\quad\begin{cases}\gamma(1-u)\int_0^\infty\frac{dx}{x^\alpha(1+x)^\beta(x+u)^{\gamma+1}}\int_0^\infty\frac{(1+x)^{\alpha+\beta+\gamma-2}.dx}{x^\gamma(x+u)^\alpha}\\ -\alpha(1-u)\int_0^\infty\frac{dx}{x^\alpha(1+x)^\beta(x+u)^\gamma}\int_0^\infty\frac{(1+x)^{\alpha+\beta+\gamma-2}.dx}{x^\gamma(x+u)^{\alpha+1}}\\ +(\beta+\gamma-1)\int_0^\infty\frac{dx}{x^\alpha(1+x)^\beta(x+u)^\gamma}\int_0^\infty\frac{(1+x)^{\alpha+\beta+\gamma-2}.dx}{x^\gamma(x+u)^\alpha}\\ =\frac{\sin(\beta+\gamma)\pi}{\pi}.\frac{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1)}{u^{\alpha+\gamma}},\end{cases}$$

$$27.\quad\begin{cases}(\beta-1)(1-u)\int_0^\infty\frac{dx}{x^\alpha(1+x)^\beta(x+u)^\gamma}\int_0^\infty\frac{(1+x)^{\gamma-1}(x+u)^{\beta-2}\,dx}{x^{\alpha+\beta+\gamma-1}}\\ +\gamma(1-u)\int_0^\infty\frac{dx}{x^\alpha(1+x)^\beta(x+u)^{\gamma+1}}\int_0^\infty\frac{(1+x)^{\gamma-1}(x+u)^{\beta-1}\,dx}{x^{\alpha+\beta+\gamma-1}}\\ +(\beta+\gamma-1)\int_0^\infty\frac{dx}{x^\alpha(1+x)^\beta(x+u)^\gamma}\int_0^\infty\frac{(1+x)^{\gamma-1}(x+u)^{\beta-1}\,dx}{x^{\alpha+\beta+\gamma-1}}\\ =\frac{\pi\sin(\beta+\gamma)\pi}{\sin\alpha\pi\sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi}.\end{cases}$$

Les formules (20., 21., 22., 23., 26. et 27.) conjointement avec celle, qu'a donnée Mr. *Abel* dans le tome second du *Journal* de Mr. *Crelle*, constituent les principales propriétés de la transcendante z représentée par la formule (17.).

IX.

Considérons l'équation différentielle

$$28. \quad \frac{d^2z}{du^2} + \left(\frac{\alpha+\beta}{u} + 1\right)\frac{dz}{du} + \frac{\alpha}{u}.z = 0,$$

à laquelle on satisfait en prenant

$$z = \int_0^1 e^{-ux}.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}.dx.$$

La comparaison de cette équation avec (*a.*) donne

$$P = \frac{\alpha+\beta}{u} + 1, \qquad Q = \frac{\alpha}{u}.$$

Si donc on fait

$$R = \frac{1-\alpha-\beta}{u},$$

l'équation (*b.*) déviendra

$$29. \quad \frac{d^2y}{du^2} + \left(\frac{2-\alpha-\beta}{u} + 1\right)\frac{dy}{du} + \frac{1-\beta}{u}.y = 0.$$

Or si dans l'équation (28.) on remplace α par $1-\beta$, β par $1-\alpha$ et z par y, elle se change complétement en (29.); d'où il résulte, qu'on satisfera à cette dernière en prenant

$$y = \int_0^1 e^{-ux}.x^{-\beta}(1-x)^{-\alpha}.dx.$$

Comme on a de plus

$$e^{\int (P+R)\,du} = u\,e^u,$$

l'équation (1.) donnera

$$30. \quad ue^u\left(z\frac{dy}{du} - y\frac{dz}{du}\right) + (1-\alpha-\beta)\,e^u.yz = A.$$

La constante A se déterminera suivant la valeur connue des intégrales dans la supposition de $u = 0$, ce qui donne, tout calcul fait,

$$A = \frac{\pi \sin(\alpha+\beta)\pi}{\sin\alpha\pi \sin\beta\pi},$$

moyennant quoi l'équation (30.) donne

$$u\int_0^1 \frac{e^{-ux}.dx}{x^\beta(1-x)^\alpha}\int_0^1 \frac{e^{-ux}.x^\alpha\,dx}{(1-x)^{1-\beta}} - u\int_0^1 \frac{e^{-ux}.x^{1-\beta}\,dx}{(1-x)^\alpha}\int_0^1 \frac{e^{-ux}.dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}$$
$$+(1-\alpha-\beta)\int_0^1 \frac{e^{-ux}.dx}{x^\beta(1-x)^\alpha}\int_0^1 \frac{e^{-ux}.dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}} = \frac{\pi \sin(\alpha+\beta)\pi}{\sin\alpha\pi \sin\beta\pi}\,e^{-u}.$$

X.

Posons dans les équations (*a.*) et (*b.*)

$$P = \frac{2\alpha}{u}, \qquad Q = 1, \qquad R = \frac{1-2\alpha}{u};$$

nous aurons

$$\frac{d^2z}{du^2} + \frac{2\alpha}{u}\cdot\frac{dz}{du} + z = 0, \qquad \frac{d^2y}{du^2} + \frac{2(1-\alpha)}{u}\cdot\frac{dy}{du} + y = 0,$$

et à ces équations on satisfait par la supposition de

$$z = \int_0^1 \frac{dx\cos ux}{(1-x^2)^{1-\alpha}}, \qquad y = \int_0^1 \frac{dx\cos ux}{(1-x^2)^{\alpha}}.$$

Comme nous avons de plus

$$e^{\int (P+R)\,du} = u,$$

l'équation (1.) donnera

$$31. \qquad u\left(z\frac{dy}{du} - y\frac{dz}{du}\right) + (1-2\alpha)yz = A.$$

Si l'on fait $u=0$, on trouve

$$A = (1-2\alpha)\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{1-\alpha}}\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{\alpha}};$$

mais comme on a

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{1-\alpha}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\alpha)}{2\Gamma(\frac{1}{2}+\alpha)}, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{\alpha}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\alpha)},$$

il viendra, tout calcul fait, après les proprietés connues de la fonction Γ,

$$A = \frac{\pi}{2}\cot\alpha\pi.$$

Les valeurs de y, z et A substituées dans l'équation (31.) donnent enfin

$$\left.\begin{aligned} &u\int_0^1 \frac{x\,dx\sin ux}{(1-x^2)^{1-\alpha}}\int_0^1 \frac{dx\cos ux}{(1-x^2)^{\alpha}} \\ &-u\int_0^1 \frac{dx\cos ux}{(1-x^2)^{1-\alpha}}\int_0^1 \frac{x\,dx\sin ux}{(1-x^2)^{\alpha}} \\ &+(1-2\alpha)\int_0^1 \frac{dx\cos ux}{(1-x^2)^{1-\alpha}}\int_0^1 \frac{dx\cos ux}{(1-x^2)^{\alpha}} \end{aligned}\right\} = \frac{\pi}{2}\cot\alpha\pi.$$

XI.

Soit encore

$$P = \frac{u}{2}, \qquad Q = \tfrac{1}{2}(1-\alpha), \qquad R = -\frac{u}{2};$$

les équations (*a.*) et (*b.*) déviendront

$$\frac{d^2z}{du^2} + \frac{u}{2}\cdot\frac{dx}{du} + \tfrac{1}{2}(1-\alpha)z = 0, \qquad \frac{d^2y}{du^2} - \frac{u}{2}\cdot\frac{dy}{du} - \frac{\alpha}{2}y = 0,$$

auxquelles on satisfait en prenant

$$z = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos ux \,.\, \frac{dx}{x^a}, \qquad y = \int_0^\infty e^{-x^2+ux} \,.\, \frac{dx}{x^{1-a}}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la formule (1.), et qu'on détermine la constante A par la supposition de $u = 0$, on obtient

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{ux-x^2} \,.\, x^a\, dx \int_0^\infty e^{-x^2} \cos ux \,.\, \frac{dx}{x^a} \\ &+ \int_0^\infty e^{ux-x^2} \,.\, \frac{dx}{x^{1-a}} \int_0^\infty e^{-x^2} \sin ux \,.\, x^{1-x} \,.\, dx \\ &- \frac{u}{2} \int_0^\infty e^{ux-x^2} \,.\, \frac{dx}{x^{1-a}} \int_0^\infty e^{-x^2} \cos ux \,.\, \frac{dx}{x^a} \end{aligned}\right\} = \frac{\pi}{4 \cos \frac{a\pi}{2}}.$$

XII.

Soit en dernier lieu

$$P = \frac{1-2(\mu+1)u^2}{u(1-u^2)}, \qquad Q = -\frac{n^2+\mu(\mu+1)u^2}{u^2(1-u^2)}, \qquad R = \frac{(2\mu-1)u}{1-u^2};$$

les équations (*a.*) et (*b.*) se changeront

$$\frac{d^2z}{du^2} + \frac{1-2(\mu+1)u^2}{u(1-u^2)} \cdot \frac{dz}{du} - \frac{n^2+\mu(\mu+1)u^2}{u^2(1-u^2)} \cdot z = 0,$$

$$\frac{d^2y}{du^2} + \frac{1-2(2-\mu)u^2}{u(1-u^2)} \cdot \frac{dy}{du} - \frac{n^2+(2-\mu)(1-\mu)u^2}{u^2(1-u^2)} \cdot y = 0.$$

A ces équations on satisfait en prenant

$$z = \int_0^\pi (1+u\cos x)^{-\mu} \cos nx \,.\, dx,$$

$$y = \int_0^\pi (1+u\cos x)^{\mu-1} \cos nx \,.\, dx.$$

Comme on a de plus

$$e^{\int (P+R)\,du} = u(1-u^2),$$

l'équation (1.) donnera

$$u(1-u^2)\left(z\frac{dy}{du} - y\,\frac{dz}{du}\right) + (2\mu-1)u^2yz = A.$$

En faisant $u = 0$, on obtient $A = 0$; par conséquent il vient en vertu de l'équation (2.)

$$32. \quad \int_0^\pi (1+u\cos x)^{\mu-1} \cos nx \,.\, dx = B(1-u^2)^{\mu-\frac{1}{2}} \int_0^\pi \frac{\cos nx \,.\, dx}{(1+u\cos x)^\mu}.$$

Pour trouver la valeur de B, il faut le considérer comme fonction de n; nous le désignerons pour cet effet par B_n. Soit de plus

$$(1+u\cos x)^{-\mu} = P + 2P_1\cos x + \ldots + 2P_n\cos nx + \text{etc.},$$

$$(1+u\cos x)^{\mu-1} = Q + 2Q_1\cos x + \ldots + 2Q_n\cos nx + \text{etc.};$$

nous aurons en vertu de l'équation (32.)

$$33. \quad Q_n = B_n (1-u^2)^{\mu-\frac{1}{2}} P_n .$$

Mais on tire aisément des séries précédentes, que nous avons supposées, les rélations suivantes

$$34. \quad \begin{cases} (n+1-\mu)u P_{n+1} + 2nP + (n-1+\mu)u P_{n-1} = 0, \\ (n+\mu)u Q_{n+1} + 2n Q_n + (n-\mu)u Q_{n-1} = 0, \end{cases}$$

ou bien, si dans la dernière on substitue les valeurs de Q_{n+1}, Q_n et Q_{n-1}, tirées de la formule (33.),

$$35. \quad (n+\mu)u B_{n+1} P_{n+1} + 2n B_n P_n + (n-\mu)u B_{n-1} P_{n-1} = 0.$$

Eliminons maintenant P_{n-1} entre les équations (34.) et (35.); nous obtiendrons

$$(n+1-\mu)(n-\mu)u B_{n-1} P_{n+1} - (n+\mu)(n-1+\mu)u B_{n+1} P_{n+1} = 2nP_n [(n-1+\mu) B_n - (n-\mu) B_{n-1}].$$

Si l'on divise les deux membres de cette dernière égalité par $2n(n-1+\mu)P_n$, et que puis on fasse $u = 0$, il viendra

$$36. \quad B_n = \frac{n-\mu}{n-1+\mu} B_{n-1}.$$

Si dans la formule (32.) on fait $n = 0$ et $u = 0$, on obtient $B_0 = 1$, au moyen de quoi l'équation (36.) donne en général

$$B_n = (-1)^n . \frac{\mu-1}{\mu} . \frac{\mu-2}{\mu+1} . \frac{\mu-3}{\mu+2} \ldots . \frac{\mu-n}{\mu+n-1}.$$

La formule (32.) ne diffère pas au fond de celle qu'a donnée *Euler*, et qui se trouve dans le tome IV. de son *Calcul intégral.*

3.

Zur Theorie der Kettenbrüche.

(Von Herrn Dr. *Stern* zu Göttingen.)

In einer früheren Abhandlung (Bd. 10. d. Journ. S. 241 ff.) habe ich zu zeigen gesucht, wie man, wenn ein Kettenbruch und eine Reihe einander entsprechen, so dafs

$$F(1+x:a_1+x:a_2+\ldots.) = 1+A_1x+A_2x^2+\ldots.$$

ist, sowohl aus den bekannten Gröfsen a_1, a_2, ... die Gröfsen A_1, A_2, ..., als auch aus den bekannten Gröfsen A_1, A_2, ... die Gröfsen a_1, a_2, ... durch ein *recurrirendes* Verfahren finden kann. Ich bemerkte damals zugleich, dafs es mir nicht gelungen sei, die Frage zu lösen, wie man jede der Gröfsen A_1, A_2, ..., ohne die vorhergehenden entwickelt zu haben, unmittelbar aus den Gröfsen a_1, a_2, ... und umgekehrt diese aus jenen finden könne. Später habe ich diesen Gegenstand mit mehr Erfolg untersucht; hier beschränke ich mich jedoch vorläufig darauf, zu zeigen, wie aus den bekannten Gröfsen a_1, a_2, ... jede der Gröfsen A_1, A_2, ... unmittelbar abgeleitet werden kann.

Ich bediene mich hierbei einer schon in der erwähnten Abhandlung angewendeten Bezeichnung.

Es sei der Kettenbruch

$$F(a_1, a_m) = F(a_1+1:a_2+1:a_3+\ldots.+1:a_m)$$

gegeben; entwickelt man den Zähler desselben, so enthält dieser Glieder, in welchen alle Elemente a_1, a_2, ... a_m und andere in welchen nur $m-2$ oder $m-4$ u. s. w. dieser Elemente vorkommen.

Ich bezeichne die Summe der Glieder, die $m-n$ Elemente enthalten, durch $(a_1, a_m)_n$. Ist nun

$$F(1+x:a_1+x:a_2\ldots.) = 1+A_1x+A_2x^2+\ldots.,$$

so hat man (Bd. 10. d. J. S. 241.)

$$(a_1, a_m)_0 A_m + (a_1, a_m)_2 A_{m-1} + (a_1, a_m)_4 A_{m-2} + \ldots. = 0.$$

Betrachtet man daher die Elemente a_1, a_2, a_3 u. s. w., und mithin auch die aus denselben gebildeten Ausdrücke $(a_1, a_m)_0$, $(a_1 a_m)_2$ u. s. w. als bekannte Gröfsen, so kann man m Gleichungen bilden, in welchen die

Gröfsen $A_1, A_2, A_3, \ldots A_m$ vorkommen, und aus welchen man durch Elimination den Werth von A_m finden kann. Es ist nemlich

$$1.\quad \left\{\begin{array}{r} a_1 A_1 - 1 = 0, \\ (a_1, a_2)_0 A_2 + (a_1, a_2)_2 A_1 = 0, \\ (a_1, a_3)_0 A_3 + (a_1, a_3)_2 A_2 = 0, \\ (a_1, a_4)_0 A_4 + (a_1, a_4)_2 A_3 + (a_1, a_4)_4 A_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_1, a_m)_0 A_m + (a_1, a_m)_2 A_{m-1} + (a_1, a_m)_4 A_{m-2} + \ldots = 0. \end{array}\right.$$

Das Resultat der Elimination wird sich leichter übersehen lassen, wenn man für den Augenblick statt des vorhergehenden Systems von Gleichungen, das folgende betrachtet:

$$2.\quad \left\{\begin{array}{r} 1_1 A_1 - 2_1 = 0, \\ 1_2 A_2 + 2_2 A_1 = 0, \\ 1_3 A_3 + 2_3 A_2 = 0, \\ 1_4 A_4 + 2_4 A_4 + 3_4 A_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1_m A_m + 2_m A_{m-1} + 3_m A_{m-2} + \ldots = 0; \end{array}\right.$$

wobei zu bemerken ist, dafs in der $m$ten Gleichung (die erste ausgenommen) $\frac{m}{2}+1$ oder $\frac{m+1}{2}$ Glieder vorkommen, je nachdem m eine gerade oder ungerade Zahl ist; das letzte Glied dieser Gleichung ist daher im ersten Falle $= \left(\frac{m}{2}+1\right)_m A_{\frac{m}{2}}$ und im zweiten $= \left(\frac{m+1}{2}\right)_m A_{\frac{m+1}{2}}$.

Führt man die ersten Eliminationen wirklich aus, so findet man

$$A_1 = \frac{2_1}{1_1},$$

$$A_2 = -\frac{2_2}{1_2}\cdot\frac{2_1}{1_1},$$

$$A_3 = \frac{2_3}{1_3}\cdot\frac{2_2}{1_2}\cdot\frac{2_1}{1_1},$$

$$A_4 = -\frac{2_4}{1_4}\cdot\frac{2_3}{1_3}\cdot\frac{2_2}{1_2}\cdot\frac{2_1}{1_1} + \frac{3_4}{1_4}\cdot\frac{2_2}{1_2}\cdot\frac{2_1}{1_1},$$

$$A_5 = \frac{2_5}{1_5}\cdot\frac{2_4}{1_4}\cdot\frac{2_3}{1_3}\cdot\frac{2_2}{1_2}\cdot\frac{2_1}{1_1} - \frac{2_5}{1_5}\cdot\frac{3_4}{1_4}\cdot\frac{2_2}{1_2}\cdot\frac{2_1}{1_1} - \frac{3_5}{1_5}\cdot\frac{2_3}{1_3}\cdot\frac{2_2}{1_2}\cdot\frac{2_1}{1_1},$$

$$A_6 = -\frac{2_6}{1_6}\cdot\frac{2_5}{1_5}\cdot\frac{2_4}{1_4}\cdot\frac{2_3}{1_3}\cdot\frac{2_2}{1_2}\cdot\frac{2_1}{1_1} + \frac{2_6}{1_6}\cdot\frac{2_5}{1_5}\cdot\frac{3_4}{1_4}\cdot\frac{2_2}{1_2}\cdot\frac{2_1}{1_1} + \frac{2_6}{1_6}\cdot\frac{3_5}{1_5}\cdot\frac{2_3}{1_3}\cdot\frac{2_2}{1_2}\cdot\frac{2_1}{1_1}$$
$$+ \frac{3_6}{1_6}\cdot\frac{2_4}{1_4}\cdot\frac{2_3}{1_3}\cdot\frac{2_2}{1_2}\cdot\frac{2_1}{1_1} - \frac{3_6}{1_6}\cdot\frac{3_4}{1_4}\cdot\frac{2_2}{1_2}\cdot\frac{2_1}{1_1} - \frac{4_6}{1_6}\cdot\frac{2_3}{1_3}\cdot\frac{2_2}{1_2}\cdot\frac{2_1}{1_1}.$$

Um nun die Bildung des allgemeinen Gliedes A_m zu erkennen, bemerke man zuerst, dafs in allen durch $\pm$ verbundenen Theilen, aus welchen ein jedes A, von A_2 an gerechnet, zusammengesetzt ist, der gemeinschaftliche Factor $\frac{2_2}{1_2}.\frac{2_1}{1_1}$ vorkommt, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil alle folgenden Glieder aus $A_2 = -\frac{2_2}{1_2}.\frac{2_1}{1_1}$ gebildet sind. Man kann daher diesen Factor absondern und braucht blofs die Bildung von $A_m : \frac{2_2}{1_2}.\frac{2_1}{1_1}$ zu untersuchen. Ferner sieht man leicht, dafs es nur erforderlich ist, die Bildung der Zähler der einzelnen Theile zu kennen, da sich die Bildung der Nenner daraus von selbst ergiebt. Man braucht nemlich nur zu jedem Theile p_r des Zählers den Nenner 1_r zu setzen, da man allgemein

$$3. \quad A_m = -\frac{2_m}{1_m}A_{m-1} - \frac{3_m}{1_m}A_{m-2} - \frac{4_m}{1_m}A_{m-3} \ldots .$$

hat, also in dem independenten Werthe eines jeden A überhaupt nur Ausdrücke von der Form $\frac{p_r}{1_r}$ vorkommen können.

Ferner gilt in Rücksicht auf das Zeichen, durch welches die einzelnen Glieder jedes A verbunden sind, die allgemeine Regel, dafs das positive Zeichen genommen werden mufs, wenn der Zähler (und also auch der Nenner) des Gliedes das Product einer ungeraden Anzahl von Elementen ist, im entgegengesetzten Falle aber das negative. Die Zähler jeder folgenden Gröfse A_m werden nemlich nach Formel (3.) aus den Zählern der vorhergehenden A_{m-1}, A_{m-2} u. s. w. dadurch gebildet, dafs noch ein neues Element mit negativen Zeichen vorgesetzt wird. Ist daher die angegebene Regel für die vorhergehenden Gröfsen richtig, so gilt sie auch für die folgende A_m. Nun hat man wirklich

$$A_2 = -\frac{2_2.2_1}{1_2.1_1}, \qquad A_3 = +\frac{2_3.2_2.2_1}{1_3.1_2.1_1};$$

die Regel gilt daher auch für A_4, A_5; und überhaupt für jedes folgende A.

Am einfachsten findet man nun die Zähler des Werthes von A_m, indem man sie allmälich durch Hinzufügung der passenden Elemente aus den Zählern der vorhergehenden A vermittelst der Formel (3.) bildet. Bezeichnet man allgemein den Complex der Zähler von A_m, insofern man den allen Gliedern gemeinschaftlichen Factor $2_2 2_1$ absondert, durch B_m, so folgt aus Formel (3.), je nachdem m eine gerade oder ungerade Zahl ist,

$$4.\quad \begin{cases} B_m = -2_m B_{m-1} - 3_m B_{m-2} \ldots - \left(\frac{m}{2}+1\right)_m B_{\frac{m}{2}} \text{ oder} \\ B_m = -2_m B_{m-1} - 3_m B_{m-2} \ldots - \left(\frac{m+1}{2}\right)_m B_{\frac{m+1}{2}} \end{cases}$$

und

$$B_m = 1$$
$$B_3 = 2_3$$
$$B_4 = 2_4 \,|\, \underline{2_3}$$
$$\quad\; 3_4$$
$$B_5 = 2_5 \,|\, 2_4 2_3$$
$$\quad\; 2_5 \,|\, \underline{3_4}$$
$$\quad\; 3_5 \,|\, \underline{2_3}$$

$$B_6 = 2_6 \,|\, 2_5 2_4 2_3$$
$$\quad\; 2_6 \,|\, 2_5 3_4$$
$$\quad\; 2_6 \,|\, \underline{3_5 2_3}$$
$$\quad\; 3_6 \,|\, 2_4 2_3$$
$$\quad\; 3_6 \,|\, \underline{3_4}$$
$$\quad\; 4_7 \,|\, \underline{2_3}$$

u. s. w. Um nun z. B. den Werth von A_6 zu wissen, braucht man nur jedes Glied von B_6 mit $2_2 2_1$ zu multipliciren, das gehörige Zeichen hinzuzufügen und unter jedes p_r den Werth 1_r als Nenner zu setzen.

Man kann aber den Werth von B_m auch finden, indem man die einzelnen durch $\pm$ verbundenen Glieder desselben unmittelbar aus einander ableitet. Das erste Glied ist nemlich, wie leicht einzusehen, $2_m . 2_{m-1} \ldots . 2_7 2_6 2_5 2_4 2_3$. Aus diesen findet man nun die übrigen wie folgt. Man schneide zuerst die zwei letzten Elemente $2_4 2_3$ ab und setze statt derselben 3_4: dies giebt das zweite Glied $2_m . 2_{m-1} \ldots . 2_7 2_6 2_5 3_4$. Alsdann schneidet man die zwei Elemente $2_5 2_4$ ab und substituirt statt derselben 3_5: dies giebt das dritte Glied. Hierauf hebt man die drei Elemente $2_6 2_5 2_4$ heraus, substituirt in allen vorhergehenden Gliedern statt $2_6 2_5$ das Element 3_6 und dann statt $2_6 2_5 2_4$ das Element 4_6; eben so verfährt man mit $2_7 2_6 2_5$, indem man in allen vorhergehenden Gliedern zuerst 3_7 statt $2_7 2_6$ und alsdann 4_7 statt $2_7 2_6 2_5$ setzt. Dann hebt man die vier Elemente $2_8 2_7 2_6 2_5$ heraus und setzt allmälig 3_8 statt $2_8 2_7$, 4_8 statt $2_8 2_7 2_6$, 5_8 statt $2_8 2_7 2_6 2_5$ in allen entwickelten Gliedern, und auf ähnliche Weise verfährt man hierauf mit den vier Elementen $2_9 2_8 2_7 2_6$, u. s. w. Es ist leicht einzusehen, dafs dieses Verfahren im Grunde mit dem früheren zusammenfällt und ein Beispiel wird dies zur Genüge deutlich machen. Es soll z. B. B_8 entwickelt werden, so hat man

$$2_8 2_7 2_6 2_5 2_4 2_3$$
$$3_4 \text{ statt } 2_4 2_3 \text{ giebt } 2_8 2_7 2_6 2_5 2_4$$
$$3_5 \text{ - } 2_5 2_4 \text{ - } 2_8 2_7 2_6 2_4 2_3$$

$2_6\,2_5\,2_4$					
	3_6	statt	$2_6\,2_5$	giebt	$2_8\,2_7\,2_6\,2_4\,2_3$
					$2_8\,2_7\,3_6\,3_4$
	4_6	-	$2_6\,2_5\,2_4$	-	$2_8\,2_7\,4_6\,2_3$
$2_7\,2_6\,2_5$					
	3_7	-	$2_7\,2_6$	-	$2_8\,2_7\,2_5\,2_4\,2_3$
					$2_8\,3_7\,2_5\,3_4$
					$2_8\,3_7\,3_5\,2_3$
	4_7	-	$2_7\,2_6\,2_5$	-	$2_8\,4_7\,2_4\,2_3$
					$2_8\,4_7\,3_4$
$2_8\,2_7\,2_6\,2_5$					
	3_8	-	$2_8\,2_7$	-	$3_8\,2_6\,2_5\,2_4\,2_3$
					$3_8\,2_6\,2_5\,3_4$
					$3_8\,2_6\,3_5\,2_3$
					$3_8\,3_6\,2_4\,2_3$
					$3_8\,3_6\,3_4$
					$3_8\,4_6\,2_3$
	4_8	-	$2_8\,2_7\,2_6$	-	$4_8\,2_5\,2_4\,2_3$
					$4_8\,2_5\,3_4$
					$4_8\,3_5\,2_3$
	5_8	-	$2_8\,2_7\,2_6\,2_5$	-	$5_8\,2_4\,2_3$
					$5_8\,3_4$

Die Anwendung des Vorhergehenden auf die ursprüngliche Frage ist leicht gemacht. Hat man A_m aus den Gleichungen (2.) gefunden, so kennt man auch den Werth von A_m in den Gleichungen (1.), sobald man statt 1_1, 1_2 u. s. w. die entsprechenden Gröfsen a_1, $(a_1, a_2)_0$ u. s. w., allgemein statt r_t die Gröfse $(a_1, a_t)_{2(r-1)}$ setzt, wobei noch zu bemerken immer $2_1 = 1$ ist.

Es ist z. B. gegeben

$$e^x = F(1+x:1-x:2+x:3-x:2+x:5-x:2\ldots.).$$

Verwandelt man diesen Kettenbruch in die Reihe $1+A_1x+A_2x^2+\ldots.$, welches wird der Werth von A_5 sein?

Hier ist

$$A_5 = \frac{2_4\,2_1}{1_2\,1_1}\left[\frac{2_5\,2_4\,2_3}{1_5\,1_4\,1_3} - \frac{2_5\,3_4}{1_5\,1_4} - \frac{3_5\,2_3}{1_5\,1_3}\right].$$

Entwickelt man nun den Kettenbruch $F(1+1:1-1:2+1:3-1:2+1:5\ldots.)$ und vergleicht ihn mit dem allgemeinen Schema $F(a_1+1:a_2+1:a_3+\ldots.)$,

so ist

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1_1 = 1, \\
(a_1, a_2)_0 &= 1_2 = 1; \quad (a_1, a_2)_2 = 2_2 = 1, \\
(a_1, a_3)_0 &= 1_3 = 2; \quad (a_1, a_3)_2 = 2_3 = 1, \\
(a_1, a_4)_0 &= 1_4 = 6; \quad (a_1, a_4)_2 = 2_4 = 4; \quad (a_1, a_4)_4 = 3_4 = 1, \\
(a_1, a_5)_0 &= 1_5 = 12; \quad (a_1, a_5)_2 = 2_5 = 6, \quad (a_1, a_5)_4 = 3_5 = 1,
\end{aligned}$$

also

$$A_5 = \frac{1.1}{1.1}\left[\frac{6.4.1}{12.6.2} - \frac{6.1}{12.6} - \frac{1.1}{12.2}\right] = \frac{1}{24}.$$

Gelegentlich will ich hier noch eine Berichtigung zu meiner frühern Abhandlung über die Kettenbrüche mittheilen. Ich stellte nemlich damals, nach den mir bekannten Kettenbrüchen, die Vermuthung auf, dafs, wenn in einem Kettenbruche nur positive Zeichen vorkommen und die Theilzähler im Verhältnisse zu den ihnen entsprechenden Theilnennern immer gröfser werden, der Kettenbruch immer eine irrationale Gröfse ausdrücke (Bd. 11. d. J. S. 41.). Ich habe aber später Kettenbrüche entwickelt, die das Gegentheil beweisen. Es ist z. B. *(Euler Introd. in an. inf. §. 293.)*

$$\tfrac{4}{3} = \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{6}{5}\cdot\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{9}{8}\cdot\tfrac{9}{10}\cdot\ldots.$$

Verwandelt man dieses unendliche Product nach dem im 10. Bande d. J. S. 266 angegebenem Verfahren in einen Kettenbruch, so hat man

$$\tfrac{4}{3} = F(1+1:2+2.3:1+3.4:2+5.6:1+6.7:2\ldots).$$

4.

Beiträge zur näherungsweisen Berechnung bestimmter Integrale nach der Methode der Quadraturen.

(Von Herrn Prof. *J. L. Raabe* zu Zürich.)

Die Methode der Quadraturen zur näherungsweisen Berechnung bestimmter Integrale erhielt erst durch *Poissons* Bearbeitung *) dieses Gegenstandes eine streng wissenschaftliche Begründung. Denn die, dieser Methode von *Maclaurin* und *Euler* beigefügte Correctionsreihe ermangelte eines Kennzeichens aus dem der jedesmal Statt habende Fehler beurtheilt werden könnte. Diese Lücke ist durch das von *Poisson* dieser Reihe noch beigefügte Ergänzungsglied völlig ausgefüllt, wodurch in theoretischer Beziehung der Gegenstand als geschlossen angesehen werden darf. Für die Anwendung hingegen ist der grofse Vortheil dieses Ergänzungsgliedes bis jetzt nicht genügend aufgedeckt worden. So ist z. B. der Fall, wenn sämmtliche Glieder der Correctionsreihe in Nullen übergehen, nur oberflächlich erläutert. Das Paradoxe desselben ist zwar durch das Dasein des Ergänzungsgliedes gehoben; allein man sieht nicht recht ab, wie dann nach der Quadraturmethode die Rechnung zu führen sei. Im Allgemeinen vermifst man ein Verfahren, welches den Genauigkeitsgrad eines nach der Methode der Quadraturen bestimmten Integrals anzeigt, wenn mit irgend einem Incremente der Variabeln die Rechnung angestellt wird, und umgekehrt.

Die Aufklärung dieser Puncte wird den Inhalt der vorliegenden Beiträge ausmachen.

1. Stellt $\Phi(x)$ eine innerhalb a und b $(b>a)$ continuirliche Function von x dar und setzt man

$$b-a = n\omega,$$

wo n eine ganze positive Zahl bedeutet, so enthält eine der folgenden drei Gleichungen:

*) Mémoires de l'institut 1823.

$$\int_a^b \Phi(x)\,dx = \omega[\Phi(a)+\Phi(a+\omega)+\Phi(a+2\omega)+\ldots.+\Phi(a+(n-1)\omega)],$$

$$\int_a^b \Phi(x)\,dx = \omega[\Phi(a+\omega)+\Phi(a+2\omega) \quad +\ldots.+\Phi(a+(n-1)\omega)+(b)],$$

$$\int_a^b \Phi(x)\,dx = \omega[\tfrac{1}{2}\Phi(a)+\Phi(a+\omega)+\Phi(a+2\omega)+\ldots.+\Phi(a+(n-1)\omega)+\tfrac{1}{2}\Phi(b)]$$

die Integrationsmethode der Quadraturen. Je kleiner das Increment ω gedacht wird: mit desto mehr Genauigkeit bestehen auch diese Gleichungen. Diese Gleichungen sind vollkommen richtig, wenn ω als ein unendlich klein-, also n als ein unendlich grofs-Werdendes gedacht wird. Den Unterschied im Resultate, falls ω einen endlichen Werth annimmt, welches letztere Resultat nur einen angenäherten Werth darstellt, suchten die Geometer durch Reihen, die nach den Potenzen von ω fortgehen, darzustellen. *Legendre* fand *), wenn die dritte der obigen Gleichungen festgesetzt wird, diese Reihe unter folgender Form:

$$-Y_2[\Phi_1(b)-\Phi_1(a)]\,\omega^2+Y_4[\Phi_3(b)-\Phi_3(a)]\,\omega^4-Y_6[\Phi_5(b)-\Phi_5(a)]\,\omega^6+\ldots.,$$

wo

$$Y_2=\frac{1}{1.2}B_1, \quad Y_4=\frac{1}{1.2.3.4}B_2, \quad Y_6=\frac{1}{1.2.3.4.5.6}B_6, \text{ u. s. w.}$$

und B_1, B_2, B_3 die Bernouillischen Zahlen sind. Ein Ausdruck von der Form $\Phi_k(m)$ stellt hier und in der Folge den $k$ten Differentialcoëfficienten der Function $\Phi(x)$ vor, wenn nach vollzogener Differentiation $x=m$ gesetzt wird.

Die hier aufgestellte Reihe wird die *Correctionsreihe* zur näherungsweisen Berechnung der Integrale nach der Quadraturmethode genannt.

Endlich hat *Poisson*, um diese Correctionsreihe sammt ihrem Erzeugungsgliede zu gewinnen, eine mit der folgenden Gleichung ganz ähnliche:

$$\text{I.}\quad \int_a^b \Phi(x)dx = \omega[\tfrac{1}{2}\Phi(a)+\Phi(a+\omega)+\Phi(a+2\omega)+\ldots.+\Phi(a+(n-1)\omega)+\tfrac{1}{2}\Phi(b)]$$
$$-2\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\infty}\int_a^b \Phi(x)\cos\frac{2\varrho\pi(x-a)}{\omega}\,dx$$

aufgestellt, in der das Summenzeichen auf alle ganze und positive Werthe von ϱ sich erstreckt.

Am schnellsten gelangt man zu derselben, wenn folgende Gleichung:

$$\Phi(u)=\frac{1}{b-a}\int_a^b \Phi(x)dx+\frac{2}{b-a}\sum_{r=1}^{r=\infty}\left(\int_a^b \Phi(x)\cos\frac{r\pi(x-a)}{b-a}\,dx\right)\cos\frac{r\pi(u-a)}{b-a}$$

*) Traité des fonctions elliptiques. T. II.

zum Grunde gelegt wird, die zur Darstellung der Functionen in Reihen, welche nach den Cosinussen der Vielfachen der Variabeln fortgehen, dient. Wird nun in derselben nach und nach $u = a$, $u = a + \omega$, $u = a + 2\omega$, ... $u = a + (n-1)\omega$, $u = b$ gesetzt und dann die Summe derselben genommen, nachdem man noch früher die erste und die letzte mit $\frac{1}{2}$ multiplicirt hat, so ergiebt sich nach einigen Reductionen die obige Gleichung (I.). Durch Integration p. p. geht das bestimmte Integral in Gleichung (I.):

$$\int_a^b \Phi(x) \cos \frac{2\varrho\pi(x-a)}{\omega} dx,$$

in eine nach aufsteigenden Potenzen von ω^2 fortgehende Reihe über, wodurch endlich erhalten wird:

$$\text{II.} \quad \int_a^b \Phi(x)dx =$$

$$\omega[\tfrac{1}{2}\Phi(a) + \Phi(a+\omega) + \Phi(a+2\omega) + \ldots + \Phi(a+(n-1)\omega) + \tfrac{1}{2}\Phi(b)]$$
$$- Y_2[\Phi_1(b) - \Phi_1(a)]\omega^2 + Y_4[\Phi_3(b) - \Phi_3(a)]\omega^4 - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^m Y_{2m}[\Phi_{2m-1}(b) - \Phi_{2m-1}(a)]\omega^{2m}$$
$$+ 2(-1)^{m+1}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{2m} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\infty} \frac{1}{\varrho^{2m}} \int_a^b \Phi_{2m}(x) . \cos \frac{2\varrho\pi(x-a)}{\omega} dx.$$

Diese Gleichung, in welcher:

$$1. \quad Y_{2k} = \frac{2}{(2\pi)^{2k}}\left(1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \ldots\right)$$

ist, löset das Problem der näherungsweisen Integration nach der Methode der Quadraturen vollständig.

Die erste Zeile dieser Gleichung drückt die allgemein bekannte Integrationsmethode der Quadraturen aus. Die zweite Zeile corrigirt die erste, falls in derselben ω endlich vorausgesetzt wird. Die dritte Zeile endlich enthält das *Poisson*sche Ergänzungsglied, welches zur Schätzung des mit der Correctionsreihe noch begangenen Fehlers dienen soll. Dieses Ergänzungsglied bildet die Basis unserer folgenden Untersuchungen.

2. Stellt man durch R_m den numerischen Werth dieses Ergänzungsgliedes dar, so ist

$$R_m = 2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{2m} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\infty} \frac{1}{\varrho^{2m}} \int_a^b \Phi_{2m}(x) \cos \frac{2\varrho\pi(x-a)}{\omega} dx,$$

und wegen

$$\cos \frac{2\varrho\pi(x-a)}{\omega} = 2\left(\cos \frac{\varrho\pi(x-a)}{\omega}\right)^2 - 1$$

hat man auch

$$2.\quad R_m = 4\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{2m} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\infty} \frac{1}{\varrho^{2m}} \int_a^b \Phi_{2m}(x) \left(\cos\frac{\varrho\pi(x-a)}{\omega}\right)^2 dx$$

$$-2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{2m} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\infty} \frac{1}{\varrho^{2m}} \int_a^b \Phi_{2m}(x)\, dx,$$

Betrachten wir nun zuerst den Fall, wenn die Function $\Phi_{2m}(x)$ für keinen der Werthe von x, die innerhalb a und b liegen, eine Veränderung im Zustande des Zeichens erleidet, oder wenn diese Function von $x = a$ bis $x = b$ dasselbe Zeichen behält, so besteht, was die numerischen Werthe betrifft, folgende Ungleichheit:

$$3.\quad 4\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{2m} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\infty} \frac{1}{\varrho^{2m}} \int_a^b \Phi_{2m}(x) \left(\cos\frac{\varrho\pi(x-a)}{\omega}\right)^2 dx$$

$$< 4\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{2m} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\infty} \frac{1}{\varrho^{2m}} \int_a^b \Phi_{2m}(x)\, dx,$$

Daher hat man mit Berücksichtigung des aufgestellten Werthes von R_m mit Gleichung (2.)

$$R_m < 2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{2m} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\infty} \frac{1}{\varrho^{2m}} \int_a^b \Phi_{2m}(x)\, dx.$$

Nun ist

$$\int_a^b \Phi_{2m}(x)\, dx = \Phi_{2m-1}(b) - \Phi_{2m-1}(a).$$

Also, mit Zuziehung der Bedeutung von Y_{2m} nach Gleichung (1.),

$$4.\quad R_m < Y_{2m}\left[\Phi_{2m-1}(b) - \Phi_{2m-1}(a)\right]\omega^{2m}.$$

Vergleicht man dieses Ergebnifs mit dem letzten Gliede der Correctionsreihe in Gleichung (II.), so kann man folgenden Satz aufstellen: *Wird der Werth eines Integrals nach Gleichung* (II.) *bestimmt, und bricht mit irgend einem Gliede der Correctionsreihe, z. B. mit dem Gliede*

$$(-1)^m Y_{2m}\left[\Phi_{2m-1}(b) - \Phi_{2m-1}(a)\right]\omega^{2m}$$

die Rechnung ab, so ist der hiebei begangene Fehler numerisch kleiner, als das letzte noch gerechnete Glied der Correctionsreihe, wenn die Function $\Phi_{2m}(x)$ *von* $x = a$ *bis* $x = b$ *ein und dasselbe Zeichen behält.*

3. Als Anwendung dieses Theorems eignet sich sehr gut das Integral $\int_a^\infty e^{-x}\frac{dx}{x}$, wobei $a > 0$ gedacht wird.

Es ist hier

$$\Phi(x) = \frac{e^{-x}}{x},$$

$$\Phi_1(x) = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) e^{-x},$$

$$\Phi_2(x) = +\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) e^{-x},$$

$$\Phi_3(x) = -\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{6}{x^3} + \frac{6}{x^4}\right) e^{-x},$$

. . . . . .

$$\Phi_{2m-1}(x) = -[x^{2m-1} + (2m-1)x^{2m-2} + (2m-1)(2m-2)x^{2m-3} + \ldots. \\ \ldots. + (2m-1)(2m-2)\ldots.4.3.2.1] \frac{e^{-x}}{x^{2m}},$$

$$\Phi_{2m}(x) = +[x^{2m} + 2m\,x^{2m-1} + 2m(2m-1)\,x^{2m-2} + \ldots. \\ \ldots. + 2m(2m-1)\ldots.4.3.2.1] \frac{e^{-x}}{x^{2m+1}}.$$

Dafs die Function $\Phi_{2m}(x)$ für keinen endlichen Werth von x verschwinden kann, wird aus den positiven Coëfficienten des Ausdruckes innerhalb der Klammern gefolgert; und da dieselbe Function von $x = a$ bis $x = \infty$ continuirlich bleibt, so gelangt man zu dem Schlusse, dafs sie im Bereiche dieser Grenzen beständig positiv bleiben mufs. Wenn daher mit der allgemeinen Gleichung (II.)

$$\int_a^\infty e^{-x} \frac{dx}{x} = \omega\left[\tfrac{1}{2} \cdot \frac{e^{-a}}{a} + \frac{e^{-(a+\omega)}}{a+\omega} + \frac{e^{-(a+2\omega)}}{a+2\omega} + \ldots.\right] \\ - Y_2(a+1)\,e^{-a}\frac{\omega^2}{a^2} + Y_4(a^3+3a^2+3.2a+3.2.1)\,e^{-a}\frac{\omega^4}{a^4}\ldots. \\ +(-1)^m Y_{2m}[a^{2m-1}+(2m-1)a^{2m-2}+(2m-1)(2m-2)a^{2m-3}+\ldots. \\ \ldots.+(2m-1)(2m-2)\ldots.2.1]\,e^{-a}\frac{\omega^{2m}}{a^{2m}}$$

gesetzt und der numerische Werth des Fehlers durch R_m angedeutet wird, so besteht folgende Ungleichheit:

$$R_m < 1.2.3\ldots.(2m-1)\,Y_{2m}\left(1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{1.2}+\ldots.+\frac{a^{2m-1}}{1.2.3\ldots.(2m-1)}\right)e^{-a}\cdot\frac{\omega^{2m}}{a^{2m}}.$$

Nun ist

$$e^{+a} > 1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{1.2}+\ldots.+\frac{a^{2m-1}}{1.2.3\ldots.(2m-1)}.$$

Daher um so mehr

$$R_m < 1.2.3\ldots.(2m-1)\,Y_{2m}\cdot\frac{\omega^{2m}}{a^{2m}}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\varepsilon_m = 1.2.3\ldots.(2m-1)\,Y_{2m}\frac{\omega^{2m}}{a^{2m}},$$

so ist

$$R_m < \varepsilon_m$$

Wird $\varepsilon_m = \frac{1}{10^7}$ angenommen, so findet man

für $m = 1$, $\frac{\omega}{a} = 0'0010954$,

- $m = 2$, $\frac{\omega}{a} = 0'0588566$,

- $m = 3$, $\frac{\omega}{a} = 0'1712248$,

- $m = 4$, $\frac{\omega}{a} = 0'2645613$.

Erklären wir uns für den letzten Werth von $\frac{\omega}{a}$, so bestehet die Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{dx}{x} = \omega e^{-a}\left[\frac{1}{2a} + \frac{e^{-\omega}}{a+\omega} + \frac{e^{-2\omega}}{a+2\omega} + \frac{e^{-3\omega}}{a+3\omega} + \ldots.\right]$$
$$-(a+1)\,Y_2\frac{\omega^2}{a^2}e^{-a} + (a^3+3a^2+6a+6)\,Y_4\frac{\omega^4}{a^4}e^{-a}$$
$$-(a^5+5a^4+20a^3+60a^2+120a+120)\,Y_6\frac{\omega^6}{a^6}e^{-a}$$
$$+(a^7+7a^6+42a^5+210a^4+840a^3+2520a^2+5040a+5040)\,Y_8\frac{\omega^8}{a^8}e^{-a}$$

mit einer Genauigkeit, die sich noch auf die siebente Decimalstelle erstreckt. Denn das letzte Glied in dieser Gleichung ist nach dem Vorhergehenden numerisch kleiner als $\frac{1}{10^7}$, und die Ergänzung der Correctionsreihe ist nach dem aufgestellten Satze kleiner als das letzte Glied derselben. Um Erleichterung im Rechnen zu erzwecken, ohne den Genauigkeitsgrad des Resultats zu verringern, kann man $\frac{\omega}{a} = \frac{1}{4}$ setzen.

Für den ganz speciellen Fall, wenn man $a = 1$ hat, erhält man:

$$\int_1^\infty e^{-x}\frac{dx}{x} = \frac{1}{4e}\left[\frac{1}{2} + \frac{e^{-\frac{1}{4}}}{1+\frac{1}{4}} + \frac{e^{-\frac{2}{4}}}{1+\frac{2}{4}} + \frac{e^{-\frac{3}{4}}}{1+\frac{3}{4}} + \frac{e^{-\frac{4}{4}}}{1+\frac{4}{4}} + \ldots.\right]$$
$$-\frac{2}{e}\,Y_2\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \frac{16}{e}\,Y_4\left(\tfrac{1}{4}\right)^4 - \frac{326}{e}\,Y_6\left(\tfrac{1}{4}\right)^6 + \frac{13700}{e}\,Y_8\left(\tfrac{1}{4}\right)^8.$$

Die 50 ersten Glieder innerhalb der Klammern der ersten Zeile habe ich berechnet und mit $\frac{1}{4e}$ die Summe derselben multiplicirt. Als Resultat ergab sich:

$$0'2231850.$$

Schon in der zweiten Decimalstelle weicht dieses Resultat von dem bis jetzt bekannten Werthe des vorliegenden Integrals ab. Nun hat man:

$$Y_2 = 0'0833333 \quad \text{und} \quad \log Y_2 = 0'9208188 - 2,$$
$$Y_4 = 0'0013889 \quad - \quad \log Y_4 = 0'1426675 - 3,$$
$$Y_6 = 0'0000331 \quad - \quad \log Y_6 = 0'5194182 - 5,$$
$$Y_8 = 0'0000008 \quad - \quad \log Y_8 = 0'9173583 - 7,$$

Daher, wenn die 4 Glieder der Correctionsreihe berücksichtigt werden,

$$\int_1^\infty e^{-x} \frac{dx}{x} = 0'2231850 - 0'0038018 = 0'2193839;$$

in welchem Resultate sämmtliche sieben Decimalstellen richtig sind.

4. Gehen wir nun zu dem Falle über, wenn die Function $\Phi_{2m}(x)$ beim Uebergange von $x = a$ bis $x = b$ ein oder mehrere mal das Zeichen verändert. In diesem Falle sind die Schlüsse aus No. 2. nicht zuläfslich; namentlich kann man alsdann die Ungleichheit (2.) nicht aufstellen; daher auch die Ungleichheit (4.) nicht mehr gefolgert werden darf. Um diesen schwierigen Fall zu lösen, bedenken wir zuerst, dafs die allgemeine Gleichung (II.) nur unter der Bedingung aus der Gleichung (I.) abgeleitet werden konnte, dafs die Functionen $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$, ... $\Phi_{2m}(x)$ für Werthe von x, die innerhalb der Integrationsgrenzen fallen, nicht unendlich grofs werden. Da demnach die Function $\Phi_{2m}(x)$ beim Uebergange von $x = a$ bis $x = b$ eine oder mehrere Zeichenveränderungen hat, so kann dieses nur daher rühren, dafs sie bei dem erwähnten Uebergange ein oder mehrere mal durch Null geht. Seien nun a_1, a_2, a_2, ... a_k reelle, die Function $\Phi_{2m}(x)$ verschwinden machende Werthe von x, welche Abänderungen im Zeichenzustande der Function $\Phi_{2m}(x)$ bewirken, dergestalt, dafs für jeden noch so kleinen Werth von h die Ausdrücke

$$\Phi_{2m}(a_k - h) \quad \text{und} \quad \Phi_{2m}(a_k + h)$$

entgegengesetzte Zeichen haben; so zerlege man das gegebene Integral in eine Summe von Integralen, deren jedes zwei, der Gröfse nach auf einander folgende Buchstaben a_1, a_2, a_3, ... a_k zu Grenzen hat. Diese Integrale sind sämmtlich nach der Gleichung (II.) zu behandeln. Auf jedes derselben ist das Theorem in No. 2. anwendbar. Will man überdies für alle diese Integrale gleich viele Glieder der Correctionsreihe in Anspruch nehmen, so wird für jedes ein eignes Increment bestimmt werden müssen, um einen gemeinschaftlichen Genauigkeitsgrad für alle Integrale zu erzielen.

In diesem Falle ergiebt sich also folgendes Verfahren.

Man suche diejenigen Wurzeln der Gleichung

$$\Phi_{2m}(x) = 0,$$

die gröfser als a und kleiner als b und die Uebergänge des Zeichenzustandes der Function $\Phi_{2m}(x)$ sind. Bezeichnet man dieselben, wie vorhin, durch $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \ldots\ \alpha_k$, wo

$$a < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \ldots < \alpha_k < b,$$

so setze man

$$\int_a^b \Phi(x)dx =$$

$$\int_a^{\alpha_1} \Phi(x)dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Phi(x)dx + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \Phi(x)dx + \ldots + \int_{\alpha_k}^{b} \Phi(x)\,dx.$$

Wird ferner

$$n_0\omega_0 = \alpha_1 - a,\ n_1\omega_1 = \alpha_2 - \alpha_1,\ n_2\omega_2 = \alpha_3 - \alpha_2,\ \ldots\ n_k\omega_k = b - \alpha_k$$

gesetzt, wo $n_0, n_1, n_2, \ldots n_k$ ganze positive Zahlen sind, und wird

$$\int_a^{\alpha_1} \Phi(x)dx =$$

$$\omega_0\left[\tfrac{1}{2}\Phi(a) + \Phi(a+\omega_0) + \Phi(a+2\omega_0) + \ldots + \Phi(a+(n_0-1)\omega_0) + \tfrac{1}{2}\Phi(\alpha_1)\right]$$
$$- Y_2[\Phi_1(\alpha_1) - \Phi_1(a)]\omega_0^2 + Y_4[\Phi_3(\alpha_1) - \Phi_3(a)]\omega_0^4 - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^m Y_{2m}[\Phi_{2m-1}(\alpha_1) - \Phi_{2m-1}(a)]\omega_0^{2m},$$

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Phi(x)dx =$$

$$\omega_1\left[\tfrac{1}{2}\Phi(\alpha_1) + \Phi(\alpha_1+\omega_1) + \Phi(\alpha_1+2\omega_1) + \ldots + \Phi(\alpha_1+(n_1-1)\omega_1) + \tfrac{1}{2}\Phi(\alpha_2)\right]$$
$$- Y_2[\Phi_1(\alpha_2) - \Phi_1(\alpha_1)]\omega_1^2 + Y_4[\Phi_3(\alpha_2) - \Phi_3(\alpha_1)\omega_1^4 - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^m Y_{2m}[\Phi_{2m-1}(\alpha_2) - \Phi_{2m-1}(\alpha_1)]\omega_1^{2m},$$

5.
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int_{\alpha_k}^{b} \Phi(x)dx =$$

$$\omega_k\left[\tfrac{1}{2}\Phi(\alpha_k) + \Phi(\alpha_k+\omega_k) + \Phi(\alpha_k+2\omega_k) + \ldots + \Phi(\alpha_k+(n_k-1)\omega_k) + \tfrac{1}{2}\Phi(b)\right]$$
$$- Y_2[\Phi_1(b) - \Phi_1(\alpha_k)]\omega_k^2 + Y_4[\Phi_3(b) - \Phi_3(\alpha_k)]\omega_k^4 - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^m Y_{2m}[\Phi_{2m-1}(b) - \Phi_{2m-1}(\alpha_k)]\omega_k^{2m}$$

angenommen, so bestimme man die Incremente $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_k$ aus folgenden Gleichungen:

6.
$$\begin{cases} Y_{2m}[\Phi_{2m-1}(\alpha_1) - \Phi_{2m-1}(a)]\omega_0^{2m} = \pm\varepsilon_m, \\ Y_{2m}[\Phi_{2m-1}(\alpha_2) - \Phi_{2m-1}(\alpha_1)]\omega_1^{2m} = \mp\varepsilon_m, \\ Y_{2m}[\Phi_{2m-1}(\alpha_3) - \Phi_{2m-1}(\alpha_2)]\omega_2^{2m} = \pm\varepsilon_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_{2m}[\Phi_{2m-1}(\alpha_k) - \Phi_{2m-1}(\alpha_{k-1})]\omega_{k-1}^{2m} = \pm(-1)^{k-1}\varepsilon_m, \\ Y_{2m}[\Phi_{2m-1}(b) - \Phi_{2m-1}(\alpha_k)]\omega_k^{2m} = \pm(-1)^k\varepsilon_m, \end{cases}$$

in welchen, damit die Incremente reelle Werthe bekommen, die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem die Function $\Phi_{2m}(x)$ von $x = a$ bis $x = \alpha_1$ ein positives oder negatives Zeichen hat. Wenn mit diesen Incrementen die vorhergehenden Integrale gerechnet werden, so sind die Fehler in den Resultaten überall numerisch kleiner als ε_m.

5. Die zuletzt aufgestellten Gleichungen (6.) führen auf einen Zusammenhang unter den Incrementen ω_0, ω_1, ω_2, ... ω_k, der beachtet zu werden verdient. Dividirt man diese Gleichungen, in der Ordnung wie sie aufgestellt sind, durch ω_0^{2m}, ω_1^{2m}, ω_2^{2m}, ... ω_{k-1}^{2m}, ω_k^{2m} und nimmt dann ihre Summe, so stellt die gefundene Gleichung

$$Y_{2m}[\Phi_{2m-1}(b) - \Phi_{2m-1}(a)] = \pm\varepsilon_m\left[\frac{1}{\omega_0^{2m}} - \frac{1}{\omega_1^{2m}} + \frac{1}{\omega_2^{2m}} - \ldots + \frac{(-1)^k}{\omega_k^{2m}}\right]$$

den Zusammenhang unter den Incrementen dar, welcher ganz independent von den Wurzeln α_1, α_2, α_3, ... α_k besteht. Der nicht selten vorkommende Fall, wenn man

$$\Phi_{2m-1}(b) - \Phi_{2m-1}(a) = 0$$

hat, giebt folgende noch einfachere Relation:

$$\frac{1}{\omega_0^{2m}} - \frac{1}{\omega_1^{2m}} + \frac{1}{\omega_2^{2m}} - \frac{1}{\omega_3^{2m}} + \ldots + \frac{(-1)^k}{\omega_k^{2m}} = 0.$$

Für $k = 1$ giebt diese Gleichung

$$\omega_0 = \omega_1.$$

In diesem speciellen Falle wird die Integration von a bis b mit einem einzigen Incremente bewerkstelliget.

Für $k = 2$ giebt die Gleichung

$$\frac{1}{\omega_1^{2m}} = \frac{1}{\omega_0^{2m}} + \frac{1}{\omega_2^{2m}};$$

woraus gefolgert werden kann, dafs das mittlere Increment, oder dasjenige mit welchem das bestimmte Integral $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\Phi(x)\,dx$ ausgemittelt wird, numerisch kleiner als die beiden andern Incremente ω_0 und ω_2 sein mufs.

6. Die in No. 4. angestellten Betrachtungen heben alle Zweifel wegen der Benutzung der Correctionsreihe bei der Quadraturmethode. Nur für die Anwendung wäre es höchst beschwerlich und in vielen Fällen sogar unausführbar, das am gleichen Orte gefolgerte Verfahren zur numerischen Bestimmung eines Integralwerthes auch unverändert befolgen zu müssen. Die folgenden Betrachtungen, welche sich auf die in No. 4. stützen,

führen zu einem viel einfachern Verfahren, welches den Vorzug der Einfachheit mit dem der Gleichförmigkeit in der Behandlung aller Fälle vereint.

Wenn irgend eines der Integrale der Gleichungen (5.) mit dem ihm entsprechenden Incremente aus den Gleichungen (6.) bestimmt wird, so erreicht man jedesmal einen von der Gröfse ε_m abhängigen Genauigkeitsgrad. Da dieser Genauigkeitsgrad erhöht werden mufs, wenn nnter übrigens gleichen Verhältnissen ein noch kleineres Increment der Rechnung zum Grunde gelegt wird, so werden viele Schwierigkeiten umgangen, wenn sämmtliche Integrale der Gleichungen (5.) mit dem kleinsten der Incremente ω_0, ω_1, ω_2, ... ω_k oder mit einem noch kleinern Incremente bestimmt werden. Nennt man ω dieses allen Integralen der Gleichungen (5.) zugehörende Increment, so hat man, wenn diese Gleichungen addirt werden und

$$n\omega = b - a$$

gesetzt wird, folgende Gleichung:

$$\text{III.} \quad \int_a^b \Phi(x)\,dx =$$

$$\omega\left[\tfrac{1}{2}\Phi(a)+\Phi(a+\omega)+\Phi(a+2\omega)+\ldots.+\Phi(a+(n-1)\omega)+\tfrac{1}{2}\Phi(b)\right]$$
$$-Y_2[\Phi_1(b)-\Phi_1(a)]\omega^2+Y_4[\Phi_3(b)-\Phi_3(a)]\omega^4-\ldots.$$
$$\ldots.+(-1)^m Y_{2m}[\Phi_{2m-1}(b)-\Phi_{2m-1}(a)]\omega^{2m}$$

zur Ausmittlung eines bestimmten Integrals.

Dieses Ergebnifs zeigt, dafs man die Quadraturmethode auf gleiche Weise zu corrigiren habe, es möge die Function $\varphi_{2m}(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ beständig ihr Zeichen beibehalten, oder dasselbe mehrere Male ändern. Der Unterschied der beiden Fälle liegt lediglich in der Bestimmungsweise der Gröfse ω. Während im ersten Falle bei einer willkürlichen Annahme von ω der Fehler des Resultats numerisch kleiner als ε_m ist, wo man

$$Y_{2m}[\varphi_{2m-1}(b)-\varphi_{2m-1}(a)]\omega^{2m} = \pm\varepsilon_m$$

hat, mufs im letzten Falle bei der Bestimmung des Increments ω die Vorsicht beachtet werden, dafs dasselbe das Minimum unter den Incremente ω_0, ω_1, ω_2, ... ω_k der Gleichungen (6.), oder noch kleiner als dieses Minimum sei, damit ein gleicher Genauigkeitsgrad erzielt werde. Im letztern Falle kann es sich auch ereignen, dafs man

$$\varphi_1(b)-\varphi_1(a)=0,\quad \varphi_3(b)-\varphi_3(a)=0,\quad \ldots.\quad \varphi_{2m-1}(b)-\varphi_{2m-1}(a)=0$$

findet. Dann hat man

$$\int_a^b \Phi(x)\,dx =$$

$$\omega\,[\tfrac{1}{2}\Phi(a)+\Phi(a+\omega)+\Phi(a+2\omega)+\ldots.+\Phi(a+(n-1)\omega)+\tfrac{1}{2}\Phi(b)],$$

und das nach dieser Gleichung gefundene Resultat differirt von dem unbekannten, wahren Resultate um eine Gröfse, die kleiner als ε_m ist, wenn nur ω die oben erwähnte Eigenschaft des Minimums hat. Das Paradoxon von Legendre ist daher vollständig erläutert; denn das Increment ω ist nicht völlig willkürlich, sondern es mufs der oben erwähnten Bedingung genügen.

7. Nach dem eben Vorgetragenen handelt es sich jedesmal um die Ausmittlung des kleinsten der Incremente $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots. \omega_k$, zu welchem Behufe die Kenntnifs dieser sämmtlichen Gröfsen unerlafslich ist. Da ferner die Bestimmung dieser Gröfsen eine genaue Kenntnifs der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots. \alpha_k$ voraussetzt, und diese Wurzeln im Allgemeinen nur angenähert gegeben werden können, so erachten wir es als zweckdienlich, zuerst den Einflufs einer fehlerhaften Annahme der Wurzelwerthe auf die Bestimmung der Incremente zu untersuchen. Wegen der Aehnlichkeit der Gleichungen (6.) unter einander kann man die Untersuchung dadurch erleichtern, dafs man nur ein solches Increment der Betrachtung unterzieht und die für dasselbe gefundenen Resultate, nach gehöriger Umsetzung der Buchstaben, den übrigen Incrementen anpafst.

Legen wir daher die zweite der Gleichungen (6.) zum Grunde und setzen einstweilen

$$A = \sqrt[2m]{\frac{\pm\varepsilon_m}{Y_{2m}}},$$

so hat man

$$\omega_1 = A\,[\Phi_{2m-1}(a_2) - \Phi_{2m-1}(a_1)]^{-\frac{1}{2m}}.$$

Stellt man die genäherten Werthe von a_2 und a_1 durch a_2 und a_1 vor und den durch diese Annahme erzeugten Werth von ω_1 durch v_1, so hat man auch

$$v_1 = A\,[\Phi_{2m-1}(a_2) - \Phi_{2m-1}(a_1)]^{-\frac{1}{2m}}.$$

Nun sei

$$a_2 = \alpha_2 \pm h_2, \qquad a_1 = \alpha_1 \pm h_1,$$

wo also h_2 und h_1 die numerischen Werthe der Fehler der Wurzeln α_2 und α_1 vorstellen: so hat man, wenn die dritten und höhern Potenzen dieser Fehler vernachläfsigt und die Gleichungen

$$\Phi_{2m}(\alpha_2) = 0, \qquad \Phi_{2m}(\alpha_1) = 0$$

berücksichtigt werden:

$$\upsilon_1 = A\{\Phi_{2m-1}(\alpha_2) - \Phi_{2m-1}(\alpha_1) + \tfrac{1}{2}[\Phi_{2m+1}(\alpha_2)\,h_2^2 - \Phi_{2m+1}(\alpha_1)\,h_1^2]\}^{-\frac{1}{2m}}.$$

Wird nun

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\varphi_{2m+1}(\alpha_2)\,h_2^2 - \varphi_{2m+1}(\alpha_1)\,h_1^2}{\varphi_{2m-1}(\alpha_2) - \varphi_{2m-1}(\alpha_1)} < \pm 1$$

vorausgesetzt, welche Voraussetzung, der unbestimmten Grösen h_1 und h_2 wegen, immer realisirt werden kann: so erhält man, mit Beachtung des vorhin aufgestellten Werthes von ω_1:

$$\upsilon_1 = \omega_1\left[1 - \frac{1}{4m}\cdot\frac{\varphi_{2m+1}(\alpha_2)\,h_2^2 - \varphi_{2m+1}(\alpha_1)\,h_1^2}{\varphi_{2m-1}(\alpha_2) - \varphi_{2m-1}(\alpha_1)}\right].$$

Diese Gleichung stellt den Zusammenhang des Incrementes ω_1 mit dessen approximirten Werthe υ_1 dar.

Bezeichnen wir nun durch

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad \ldots\ldots \quad a_k$$

die genäherten Werthe von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_k$ und setzen

$$a_1 = \alpha_1 \pm h_1, \quad a_2 = \alpha_2 \pm h_2, \quad a_3 = \alpha_3 \pm h_3, \quad \ldots\ldots \quad a_k = \alpha_k \pm h_k,$$

so stellen

$$h_1, \quad h_2, \quad h_3, \quad h_4, \quad \ldots\ldots \quad h_k$$

die numerischen Werthe der fehlenden Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_k$ dar. Ferner seien

$$\upsilon_0, \quad \upsilon_1, \quad \upsilon_2, \quad \upsilon_3, \quad \ldots\ldots \quad \upsilon_k$$

die genäherten Werthe von $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots\ldots \omega_k$, so hat man, unter Voraussetzung der Ungleichheiten:

$$7.\quad \left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\varphi_{2m+1}(\alpha_1)\,h_1^2}{\varphi_{2m-1}(\alpha_1) - \varphi_{2m-1}(a)} < \pm 1, \\ \tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\varphi_{2m+1}(\alpha_2)\,h_2^2 - \varphi_{2m+1}(\alpha_1)\,h_1^2}{\varphi_{2m-1}(\alpha_2) - \varphi_{2m-1}(\alpha_1)} < \pm 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\varphi_{2m+1}(\alpha_k)\,h_k^2 - \varphi_{2m+1}(\alpha_{k-1})\,h_{k-1}^2}{\varphi_{2m-1}(\alpha_k) - \varphi_{2m-1}(\alpha_{k-1})} < \pm 1, \\ \tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-\varphi_{2m+1}(\alpha_k)\,h_k^2}{\varphi_{2m-1}(b) - \varphi_{2m-1}(\alpha_k)} < \pm 1, \end{array}\right.$$

und bei Vernachlässigung der dritten und höhern Potenzen von $h_1, h_2, \ldots\ldots h_k$, folgende Gleichungen:

$$8.\quad \left\{\begin{array}{l}
\upsilon_0 - \omega_0 = -\dfrac{\omega_0}{4m}\cdot\dfrac{\varphi_{2m+1}(\alpha_1)\,h_1^2}{\varphi_{2m-1}(\alpha_1)-\varphi_{2m-1}(a)}\,,\\[2ex]
\upsilon_1 - \omega_1 = -\dfrac{\omega_1}{4m}\cdot\dfrac{\varphi_{2m+1}(\alpha_2)\,h_2^2-\varphi_{2m+1}(\alpha_1)\,h_1^2}{\varphi_{2m-1}(\alpha_2)-\varphi_{2m-1}(\alpha_1)}\,,\\[2ex]
\upsilon_2 - \omega_2 = -\dfrac{\omega_2}{4m}\cdot\dfrac{\varphi_{2m+1}(\alpha_3)\,h_3^2-\varphi_{2m+1}(\alpha_2)\,h_2^2}{\varphi_{2m-1}(\alpha_3)-\varphi_{2m-1}(\alpha_2)}\,,\\
\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\upsilon_{k-1} - \omega_{k-1} = -\dfrac{\omega_{k-1}}{4m}\cdot\dfrac{\varphi_{2m+1}(\alpha_k)\,h_k^2-\varphi_{2m+1}(\alpha_{k-1})\,h_k^2}{\varphi_{2m-1}(\alpha_k)-\varphi_{2m-1}(\alpha_{k-1})}\,,\\[2ex]
\upsilon_k - \omega_k = -\dfrac{\omega_k}{4m}\cdot\dfrac{-\varphi_{2m+1}(\alpha_k)\,h_k^2}{\varphi_{2m-1}(b)-\varphi_{2m-1}(\alpha_k)}\,.
\end{array}\right.$$

Dafs die Unterschiede $\upsilon_0-\omega_0$, $\upsilon_1-\omega_1$, ... äufserst kleine Zahlenwerthe haben, leuchtet bei einem einfachen Vergleiche dieser Gleichungen mit den vorhergehenden Ungleichheiten ein; allein eine klare Einsicht in die Beschaffenheit dieser Unterschiede wird erst durch den in der folgenden No. aufgestellten Satz erlangt.

8. *Sämmtliche Differenzen*

$$\upsilon_0-\omega_0\,,\quad \upsilon_1-\omega_1\,,\quad \upsilon_2-\omega_2\,,\quad \ldots\ldots\quad \upsilon_k-\omega_k$$

der Gleichungen (8.) *haben positive Werthe.*

Wir begründen diesen Satz folgendermaafsen:

Man setze voraus, die Function $\Phi_{2m}(x)$ habe für alle Werthe von $x=a$ bis $x=\alpha_2$ positive, von $x=\alpha_1$ bis $x=\alpha_2$ negative, von $x=\alpha_2$ bis $x=\alpha_3$ positive Werthe, u. s. w., so hat dieselbe Function von $x=\alpha_{k-1}$ bis $x=\alpha_k$ Werthe mit dem Zeichen von $(-1)^{k-1}$ und von $x=\alpha_k$ bis $x=b$ Werthe mit Zeichen von $(-1)^k$. Dieser, oder der genau entgegengesetzte Fall, mufs Statt haben. Lassen wir einstweilen den Gegensatz unbeachtet, so hat man zuerst, wenn unter δ eine unendlich klein werdende positive Gröfse gedacht wird, folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{llll}
\Phi_{2m}(\alpha_1-\delta) = -\delta\Phi_{2m+1}(\alpha_1) & \text{und} & \Phi_{2m}(\alpha_1+\delta) = +\delta\Phi_{2m+1}(\alpha_1),\\
\Phi_{2m}(\alpha_2-\delta) = -\delta\Phi_{2m+1}(\alpha_2) & - & \Phi_{2m}(\alpha_2+\delta) = +\delta\Phi_{2m+1}(\alpha_2),\\
\Phi_{2m}(\alpha_3-\delta) = -\delta\Phi_{2m+1}(\alpha_3) & - & \Phi_{2m}(\alpha_3+\delta) = +\delta\Phi_{2m+1}(\alpha_3),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Phi_{2m}(\alpha_k-\delta) = -\delta\Phi_{2m+1}(\alpha_k) & - & \Phi_{2m}(\alpha_k+\delta) = +\delta\Phi_{2m+1}(\alpha_k).
\end{array}$$

Unter der vorliegenden Annahme zeigt die erste dieser Zeilen für $\Phi_{2m+1}(\alpha_1)$ ein negatives, die zweite Zeile für $\Phi_{2m+1}(\alpha_2)$ ein positives, die dritte Zeile für $\Phi_{2m+1}(\alpha_3)$ ein negatives Resultat u. s. w. Die letzte Zeile endlich

zeigt für $\Phi_{2m+1}(\alpha_k)$ ein Resultat mit dem Zeichen von $(-1)^k$. Stellt man daher die Functionen $\Phi_{2m+1}(\alpha_1)$, $\Phi_{2m+1}(\alpha_2)$, ... $\Phi_{2m+1}(\alpha_k)$ in horizontaler Reihe auf, und unter jeder das ihr zugehörende Zeichen, so erhält man folgende Anordnung:

$$\begin{array}{ccccccc} \Phi_{2m+1}(\alpha_1), & \Phi_{2m+1}(\alpha_2), & \Phi_{2m+1}(\alpha_3), & \ldots. & \Phi_{2m+1}(\alpha_{k-1}), & \Phi_{2m+1}(\alpha_k), \\ - & + & - & & (-1)^{k-1} & (-1)^k. \end{array}$$

Ferner bestehen folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Phi_{2m-1}(\alpha_1) - \Phi_{2m-1}(a) &= \int_a^{\alpha_1} \Phi_{2m}(x)\, dx, \\ \Phi_{2m-1}(\alpha_2) - \Phi_{2m-1}(\alpha_1) &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Phi_{2m}(x)\, dx, \\ \Phi_{2m-1}(\alpha_3) - \Phi_{2m-1}(\alpha_2) &= \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \Phi_{2m}(x)\, dx, \\ \ldots\ldots\ldots\

oder es sind sämmtliche, durch angenäherte Werthe der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \ldots \alpha_k$ erlangten Incrementenwerthe gröfser als die unbekannten wahren Incrementenwerthe.

Ferner folgt aus demselben Satze und mit Zuziehung der Ungleichheiten (7.):

$$v_0 - \omega_0 < \frac{\omega_0}{2m}, \quad v_1 - \omega_1 < \frac{\omega_1}{2m}, \quad v_2 - \omega_2 < \frac{\omega_2}{2m}, \quad \ldots\ldots \quad v_k - \omega_k < \frac{\omega_k}{2m},$$

daher wegen (9.) um so mehr

$$v_0 - \omega_0 < \frac{v_0}{2m}, \quad v_1 - \omega_1 < \frac{v_1}{2m}, \quad v_2 - \omega_2 < \frac{v_2}{2m}, \quad \ldots\ldots \quad v_k - \omega_k < \frac{v_k}{2m};$$

woraus sich folgende Ungleichheiten ergeben:

$$10. \quad \omega_0 > v_0\left(1-\frac{1}{2m}\right), \quad \omega_1 > v_1\left(1-\frac{1}{2m}\right), \quad \omega_2 > v_2\left(1-\frac{1}{2m}\right), \quad \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \quad \omega_k > v_k\left(1-\frac{1}{2m}\right).$$

Diese Ungleichheiten geben die untern Grenzwerthe und die in (9.) aufgestellten zeigen die obern Grenzwerthe der Incremente $\omega_0, \omega_1, \ldots\ldots \omega_k$ an. Aus den Unterschieden

$$\frac{v_0}{2m}, \quad \frac{v_1}{2m}, \quad \frac{v_2}{2m}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{v_k}{2m}$$

dieser äufsersten Grenzwerthe ersieht man am besten, mit welcher Genauigkeit auch angenäherte Werthe von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_k$ zur Kenntnifs der Incremente führen.

Ferner kann man mit Zuziehung der Ungleichheiten (10.) jedesmal eine Zahl finden, die numerisch kleiner als das kleinste der Incremente $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots\ldots \omega_k$ ist. In der That: es stelle v_p die kleinste der Gröfsen $v_0, v_1, v_2, \ldots\ldots v_k$ vor, so hat man, wenn die ihr unter den Incrementen $\omega_0, \omega_1, \ldots\ldots \omega_k$ entsprechende Gröfse durch ω_p ausgedrückt wird, nach (10.) folgende Ungleichheit:

$$\omega_p > v_p\left(1-\frac{1}{2m}\right).$$

Ist nun ω_p die kleinste der Gröfsen $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots\ldots \omega_k$, so stellt der Ausdruck rechter Hand vom Ungleichheitszeichen den angekündigten Zahlenwerth dar. Findet diese Annahme nicht Statt, sondern ist ω_q das Minimum unter den Incrementen $\omega_0, \omega_1, \ldots\ldots \omega_k$, so sei v_q der diesem Minimum entsprechende Werth unter den Gröfsen $v_0, v_1, v_2, \ldots\ldots v_k$. Dann wird man zuerst vermöge (10.) haben:

$$\omega_q > v_q\left(1-\frac{1}{2m}\right).$$

Nach der Voraussetzung ist $v_p < v_q$, daher auch

$$\omega_q > v_p \left(1 - \frac{1}{2m}\right).$$

Es ist also, wenn

$$\textbf{11.} \quad \omega = \omega_p \left(1 - \frac{1}{2m}\right)$$

gesetzt wird, *diese Gröfse ω kleiner als das kleinste der Incremente ω_0, ω_1, ω_2, ... ω_k, falls v_p die kleinste der durch Rechnung gefundenen Gröfsen v_0, v_1, v_2, ... v_k ist.*

10. Die in der vorhergehenden No. gewonnenen Resultate stützen sich sämmtlich auf das Statthaben der Ungleichheiten (7.). Diese Ungleichheiten bezeichnen nur immer den Genauigkeitsgrad in der Bestimmung der Wurzeln α_1, α_2, α_3, ... α_k, damit jene Resultate auch ihre volle Gültigkeit behalten. Wie die Beurtheilung des Genauigkeitsgrades vorzunehmen sei, erhellet aus den folgenden Betrachtungen. Heben wir eine dieser Ungleichheiten, z. B. die folgende

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{\varphi_{2m+1}(\alpha_{p+1})\, h_{p+1}^2 - \varphi_{2m+1}(\alpha_p)\, h_p^2}{\varphi_{2m-1}(\alpha_{p+1}) - \varphi_{2m-1}(\alpha_p)} < \pm 1,$$

heraus, wo h_p und h_{p+1} die numerischen Werthe der Fehler der Wurzeln α_p und α_{p+1} bedeuten. Nach No. 8. haben die Gröfsen $\Phi_{2m+1}(\alpha_p)$ und $\Phi_{2m+1}(\alpha_{p+1})$ Resultate mit entgegengesetzten Zeichen: wenn man daher

$$h_p > h_{p+1}$$

voraussetzt, so wird die vorige Ungleichheit um so eher bestehen, wenn man die folgende

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{\varphi_{2m+1}(\alpha_{p+1}) - \varphi_{2m+1}(\alpha_p)}{\varphi_{2m-1}(\alpha_{p+1}) - \varphi_{2m-1}(\alpha_p)}\, h_p^2 < \pm 1$$

zu realisiren sucht. Wird hier

$$\alpha_{p+1} = a_{p+1} \mp h_{p+1} \quad \text{und} \quad \alpha_p = a_p \mp h_p$$

gesetzt, wo a_{p+1} und a_p die angenäherten Werthe von α_{p+1} und α_p sind, so hat man, wenn die dritten Dimensionen der Fehler vernachläfsigt werden:

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{\varphi_{2m+1}(a_{p+1}) - \varphi_{2m+1}(a_p)}{\varphi_{2m-1}(a_{p+1}) - \varphi_{2m-1}(a_p)}\, h_p^2 < \pm 1.$$

Hieraus zieht man zur Beurtheilung des gröfsern der Fehler h_p und h_{p+1} folgende Ungleichheit:

$$h_p^4 < 4 \cdot \left[\frac{\varphi_{2m-1}(a_{p+1}) - \varphi_{2m-1}(a_p)}{\varphi_{2m+1}(a_{p+1}) - \varphi_{2m+1}(a_p)}\right]^2.$$

Die Gröfsen a_p und a_{p+1} sind immer bekannt; die Werthe von h_p und h_{p+1} lassen sich immer schätzen; findet daher die letzte Ungleichheit Statt, so

kann man zur Bestimmung der Gröfse v_p schreiten; im entgegengesetzten Falle mufs man die Fehler h_p und h_{p+1} verringern, oder den Genauigkeitsgrad in der Bestimmung der Wurzeln a_p und a_{p+1} zu erhöhen suchen.

Hat man sich für alle Werthe von $p=1$ bis $p=k-1$ von der Richtigkeit dieser Ungleichheit überzeugt, so kann man zur Berechnung der Gröfsen v_1, v_2, v_3, ... v_{k-1} übergehen. Ferner hat man, ehe zur Berechnung von v_0 geschritten wird, die Richtigkeit folgender Ungleichheit zu untersuchen:

$$h_1^4 < 4.\left[\frac{\varphi_{2m-1}(a_1)-\varphi_{2m-1}(a)}{\varphi_{2m+1}(a_1)}\right]^2,$$

und endlich, ehe man zur Berechnung von v_k übergeht, mufs man folgende Ungleichheit

$$h_k^4 < 4.\left[\frac{\varphi_{2m-1}(b)-\varphi_{2m-1}(a_k)}{\varphi_{2m+1}(a_k)}\right]^2$$

herzustellen suchen.

11. Zum Schlusse wollen wir eine gedrängte Zusammenstellung aller gewonnenen Resultate geben.

Zuerst hat man nach Gleichung III.

$$1.\quad \int_a^b \Phi(x)\,dx =$$

$$\omega\left[\tfrac{1}{2}\Phi(a)+\Phi(a+\omega)+\Phi(a+2\omega)+\ldots.+\Phi(a+(n-1)\omega)+\tfrac{1}{2}\Phi(b)\right]$$
$$-Y_2[\Phi_1(b)-\Phi_1(a)]\,\omega^2+Y_4[\Phi_3(b)-\Phi_3(a)]\,\omega^4+\ldots.$$
$$\ldots.+(-1)^m\,Y_{2m}[\Phi_{2m-1}(b)-\Phi_{2m-1}(a)]\,\omega^{2m},$$

wo n eine ganze positive Zahl und

$$2.\quad n\omega = b-a$$

ist. Um die Gröfse ω anzugeben, damit der nach der obigen Gleichnng bestimmte Werth des Integrals nur noch einen Fehler gestatte, der kleiner als eine gegebene Gröfse ε_m ist, untersuche man, ob die Gleichung

$$3.\quad \Phi_{2m}(x) = 0$$

reelle, innerhalb a und b fallende Wurzeln habe, oder nicht.

Im letztern Falle setze man

$$4.\quad Y_{2m}^2[\Phi_{2m-1}(b)-\Phi_{2m-1}(a)]^2\,\omega^{4m} = \varepsilon_m^2,$$

so ist der aus dieser Gleichung gefolgerte positive Werth von ω der gesuchte.

Im erstern Falle bezeichne man die angenäherten Werthe der Wurzeln der Gleichung (3.) durch

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \ldots.\quad a_k,$$

so dafs

$$a<a_1<a_2<a_3\ldots.<a_k<b.$$

Die numerischen Werthe der Fehler dieser Wurzeln seien in derselben Ordnung durch

$$h_1, \quad h_2, \quad h_3, \quad \ldots \quad h_k$$

vorgestellt. Diese angenäherten Wurzelwerthe, sammt den zugehörenden Fehlern, müssen folgenden Bedingungen genügen:

$$5. \quad \left\{ \begin{array}{l} h_1^4 < 4.\left[\dfrac{\varphi_{2m-1}(a_1) - \varphi_{2m-1}(a)}{\varphi_{2m+1}(a_1)}\right]^2, \\ h_2^4 \text{ oder } h_1^4 < 4.\left[\dfrac{\varphi_{2m-1}(a_2) - \varphi_{2m-1}(a_1)}{\varphi_{2m+1}(a_2) - \varphi_{2m+1}(a_1)}\right]^2, \\ h_3^4 \text{ oder } h_2^4 < 4.\left[\dfrac{\varphi_{2m-1}(a_3) - \varphi_{2m-1}(a_2)}{\varphi_{2m+1}(a_3) - \varphi_{2m+1}(a_2)}\right]^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_k^4 \text{ oder } h_{k-1}^4 < 4.\left[\dfrac{\varphi_{2m-1}(a_k) - \varphi_{2m-1}(a_{k-1})}{\varphi_{2m+1}(a_k) - \varphi_{2m+1}(a_{k-1})}\right]^2, \\ h_k^4 < 4.\left[\dfrac{\varphi_{2m-1}(b) - \varphi_{2m-1}(a_k)}{\varphi_{2m+1}(a_k)}\right]^2. \end{array} \right.$$

In den Ungleichheiten, wo zwei Nachbarsfehler vorkommen, ist jedesmal der numerisch gröfsere zu nehmen. Hat man diesen Bedingungen Genüge gethan, so schreite man zur Bestimmung der Gröfsen

$$v_0, \quad v_1, \quad v_2, \quad \ldots \quad v_k$$

aus folgenden Gleichungen:

$$6. \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_{2m}^2 [\varphi_{2m-1}(a_1) - \varphi_{2m-1}(a)]^2 v_0^{4m} = \varepsilon_m^2, \\ Y_{2m}^2 [\varphi_{2m-1}(a_2) - \varphi_{2m-1}(a_1)]^2 v_1^{4m} = \varepsilon_m^2, \\ Y_{2m}^2 [\varphi_{2m-1}(a_3) - \varphi_{2m-1}(a^2)]^2 v_2^{4m} = \varepsilon_m^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_{2m}^2 [\varphi_{2m-1}(a_k) - \varphi_{2m-1}(a_{k-1})]^2 v_{k-1}^{4m} = \varepsilon_m^2, \\ Y_{2m}^2 [\varphi_{2m-1}(b) - \varphi_{2m-1}(a_k)]^2 v_k^{4m} = \varepsilon_m^2. \end{array} \right.$$

Ist v_p die kleinste dieser Gröfsen, so ist, wenn

$$7. \quad \omega = v_p \left(1 - \frac{1}{2m}\right)$$

gesetzt wird, die Gröfse ω die verlangte.

In der folgenden No. werden wir bei der Behandlung einiger speciellen Fälle jedesmal auf die in dieser No. aufgestellten und eigens bezeichneten Resultate hinweisen.

12. I. Es sei das Integral $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ zur Berechnung vorgelegt. Man hat also

$$\varphi(x) = e^{-x^2},$$
$$\varphi_1(x) = -2xe^{-x^2},$$
$$\varphi_2(x) = +2(2x^2-1)e^{-x^2},$$
$$\varphi_3(x) = -4x(2x^2-3)e^{-x^2},$$
$$\varphi_4(x) = +4(4x^4-12x^2+3)e^{-x^2},$$
$$\varphi_5(x) = -8x(4x^4-20x^2+15)e^{-x^2},$$
$$\varphi_6(x) = +8(8x^6-60x^4+90x^2-15)e^{-x^2},$$
$$\varphi_7(x) = -16x(8x^6-84x^4+210x^2-105)e^{-x^2},$$
$$\varphi_8(x) = +16(16x^8-224x^6+840x^4-840x^2+105)e^{-x^2},$$
$$\varphi_9(x) = -32x(16x^8-288x^6+1512x^4-2520x^2+945)e^{-x^2}.$$

u. s. w

Will man in der Gleichung (1.) mit dem Gliede, welches dem Zeiger $m=3$ entspricht, die Rechnung abbrechen, so suche man nach der Gleichung (3.) die positiven Wurzeln der Gleichung

$$\varphi_8(x) = 0$$

auf. Diese Wurzeln können im gegenwärtigen Falle nur in der folgenden Gleichung vorkommen:

$$a. \quad 16x^8-224x^6+840x^4-840x^2+105 = 0.$$

Setzt man hier $2x^2=y$, so hat man

$$y^4-28y^3+210y^2-420y+105 = 0.$$

Diese Gleichung hat die vier Wurzeln reell und positiv. Dieselben sind zwischen 0 und 1, zwischen 2 und 3, zwischen 7 und 8, und endlich zwischen 17 und 18 enthalten. Bestimmt man die zwischen 0 und 1 liegende Wurzel etwas näher, so überzeugt man sich, dafs dieselbe zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ enthalten sei. Es liegen somit die positiven Wurzeln der vorgelegten Gleichung zwischen 0 und $\frac{1}{2}$, zwischen 1 und 1'224..., zwischen 1'870... und 2, und endlich zwischen 2'915... und 3. Setzen wir demnach

$$b. \quad a_1 = \tfrac{3}{10}, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 3,$$

wo also a_1, a_2, a_3, a_4 angenäherte Werthe der Wurzeln der vorgelegten Gleichung (*a.*) sind, so hat man

$$c. \quad h_1 < \tfrac{3}{10}, \quad h_2 < \tfrac{224}{1000}, \quad h_3 < \tfrac{130}{1000}, \quad h_4 > \tfrac{85}{1000},$$

wo h_1, h_2, h_3, h_4 die Fehler dieser angenäherten Werthe sind.

Setzt man diese Werthe von a_1, a_2, a_3, a_4 in die Ungleichheiten (5.), so hat man:

$$h_1^2 < \frac{86'774568}{730'23829776},$$

$$h_2^2 < \frac{\frac{29}{e}+\frac{3}{10}\cdot\frac{86'774568}{e^{0'09}}}{\frac{335}{e}+\frac{3}{10}\cdot\frac{730'23829776}{e^{0'09}}},$$

$$h_3^2 < \frac{2\cdot\frac{97}{e^4}+\frac{29}{e}}{2\cdot\frac{721}{e^4}+\frac{335}{e}},$$

$$h_4^2 < \frac{813}{4239},$$

oder man mufs

$$\begin{array}{llll} h_1^2<0'118\ldots. & \text{oder} & h_1<0'34\ldots. \\ h_2^2<0'106\ldots. & - & h_2<0'32\ldots. \\ h_3^2<0'095\ldots. & - & h_3<0'30\ldots. \\ h_4^2<0'191\ldots. & - & h_4<0'43\ldots. \end{array}$$

haben. Nun finden diese Ungleichheiten nach (*c*) Statt; daher kann man mit den obigen Werthen von a_1, a_2, a_3, a_4 die Rechnung beginnen. Setzt man also in (*b*.) $\varepsilon_m = \frac{1}{10^7}$ und berücksichtigt den in No. 3. angeführten Werth von Y_8, so hat man, da $m = 4$ ist, wegen

$$\begin{array}{llll} \varphi_7(a_1) = & 380'669, & \varphi_7(a_2) = & -170'696, \\ \varphi_7(a_3) = & +\ 56'852, & \varphi_7(a_4) = & -\ 4'819 \end{array}$$

und wegen

$$\varphi_7(a) = 0, \qquad \varphi_7(b) = 0$$

folgende Werthe für v_1, v_2, v_3, v_4:

$$\begin{aligned} v_0 &= 0'365394\ldots. \\ v_1 &= 0'348859\ldots. \\ v_2 &= 0'389669\ldots. \\ v_3 &= 0'458744\ldots. \\ v_4 &= 0'630950\ldots. \end{aligned}$$

Da v_1 den kleinsten Werth hat, so ist nach (7.)

$$\omega = v_1(1-\tfrac{1}{8}) = 0'305251\ldots.$$

Erklären wir uns für $\omega = \frac{3}{10}$, so hat man nach (1.)

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \omega(\tfrac{1}{2}+e^{-\omega^2}+e^{-(2\omega)^2}+e^{-(3\omega)^2}+e^{-(4\omega)^2}+\ldots.).$$

Sämmtliche Glieder der Correctionsreihe gehen hier in Nullen über. Die Reihe innerhalb der Klammern dieser Gleichung ist so lange fortzusetzen, bis man auf Glieder, kleiner als ε_m oder $\frac{1}{10^7}$, stöfst.

Mit Zuziehung einer siebenstelligen Logarithmentafel findet man wegen $\log e = 0'43429448\ldots.$ folgende Resultate:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2} &= 0'5000000, & e^{-(7\omega)^2} &= 0'0121552,\\
e^{-\omega^2} &= 0'9139310, & e^{-(8\omega)^2} &= 0'0031511,\\
e^{-(2\omega)^2} &= 0'6976763, & e^{-(9\omega)^2} &= 0'0006823,\\
e^{-(3\omega)^2} &= 0'4448581, & e^{-(10\omega)^2} &= 0'0001234,\\
e^{-(4\omega)^2} &= 0'2369277, & e^{-(11\omega)^2} &= 0'0000186,\\
e^{-(5\omega)^2} &= 0'1053992, & e^{-(12\omega)^2} &= 0'0000024,\\
e^{-(6\omega)^2} &= 0'0391639, & e^{-(13\omega)^2} &= 0'0000002.
\end{aligned}$$

Addirt man die Zahlen rechter Hand der Gleichheitszeichen, so ergiebt sich:

$$2'9540894.$$

Diesen Zahlen-Ausdruck mit $\omega = \frac{3}{10}$ multiplicirt, giebt

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = 0'88622682\ldots.$$

Bekanntlich ist der Werth dieses bestimmten Integrals $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, und wenn dieser Ausdruck in Zahlen gegeben wird, hat man

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0'88622692\ldots.$$

Es differiren die zwei Werthe um $\frac{1}{10^7} = \varepsilon_m$. Diese Abweichung kann jedoch nur von der Unsicherheit herrühren, mit der man die siebente Decimalstelle in einer siebenstelligen Logarithmentafel findet.

II. Als zweites Beispiel legen wir uns das Integral $\int_0^1 e^{-\left(x+\frac{1}{a}\right)}\,dx$ zur Berechnung vor.

Es ist hier

$$\varphi(x) = e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)},$$

$$\varphi_1(x) = -\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\varphi_2(x) = +\left(1-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)},$$

$$\varphi_3(x) = -\left(1-\frac{3}{x^2}-\frac{6}{x^3}-\frac{3}{x^4}+\frac{6}{x^5}-\frac{1}{x^6}\right)e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)},$$

$$\varphi_4(x) = +\left(1-\frac{4}{x^2}-\frac{12}{x^3}-\frac{18}{x^4}+\frac{32}{x^6}-\frac{12}{x^7}+\frac{1}{x^8}\right)e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)},$$

$$\varphi_5(x) = -\left(1-\frac{5}{x^2}-\frac{20}{x^3}-\frac{50}{x^4}-\frac{60}{x^5}+\frac{50}{x^6}+\frac{180}{x^7}-\frac{115}{x^8}+\frac{20}{x^9}-\frac{1}{x^{10}}\right)e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)},$$

$$\varphi_6(x) = +\left(1-\frac{6}{x^2}-\frac{30}{x^3}-\frac{105}{x^4}-\frac{240}{x^5}+\frac{200}{x^6}+\frac{540}{x^7}-\frac{1095}{x^8}-\frac{1080}{x^9}+\frac{294}{x^{10}}-\frac{30}{x^{11}}+\frac{1}{x^{12}}\right)e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)},$$

$$\varphi_7(x) = -\left(1-\frac{7}{x^2}-\frac{42}{x^3}-\frac{189}{x^4}-\frac{630}{x^5}-\frac{1295}{x^6}-\frac{420}{x^7}+\frac{5075}{x^8}+\frac{7140}{x^9}-\frac{10521}{x^{10}}+\frac{3990}{x^{11}}-\frac{623}{x^{12}}+\frac{42}{x^{13}}-\frac{1}{x^{14}}\right)e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)},$$

u. s. w.

Will man in der Gleichung (1.) mit dem Gliede, dessen Zeiger $n = 3$ ist, schliefsen, so suche man die zwischen 0 und 1 enthaltenen positiven Wurzeln der Gleichung

$$\varphi_6(x) = 0$$

auf. Diese Wurzeln können nur in folgender Gleichung vorkommen:

$$a'. \quad 0 = 1-\frac{6}{x^2}-\frac{30}{x^3}-\frac{105}{x^4}-\frac{240}{x^5}-\frac{200}{x^6}+\frac{540}{x^7}+\frac{1095}{x^8}-\frac{1080}{x^9}+\frac{294}{x^{10}}-\frac{30}{x^{11}}+\frac{1}{x^{12}}.$$

Setzt man hierin $x = \frac{1}{y}$, so ist zu untersuchen, ob die Gleichung

$$y^{12}-30y^{11}+294y^{10}-1080y^9+1095y^8+540y^7-200y^6-240y^5-105y^4-30y^3-6y^2+1 = 0$$

positive Wurzeln besitze, welche die Einheit übertreffen.

Man überzeugt sich nach dem Fourierschen Theorem (*A.*), dafs die Gleichung nur 4 solche Wurzeln haben kann. Man findet dieselben auf gewöhnlichem Wege, zwischen 2 und 4, zwischen 4 und 5, zwischen 8 und 9, und zwischen 14 und 15 enthalten. Es liegen somit die verlangten Wurzeln der Gleichung (a'.) zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$, zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$, zwischen $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{9}$, und zwischen $\frac{1}{14}$ und $\frac{1}{15}$. Setzt man also

$$b'. \quad a_1 = \tfrac{6}{100}, \quad a_2 = \tfrac{1}{10}, \quad a_3 = \tfrac{2}{10}, \quad a_4 = \tfrac{4}{10},$$

so hat man

$$c'. \quad h_1 < \tfrac{1}{100}, \quad h_2 < \tfrac{14}{1000}, \quad h_3 < \tfrac{5}{100}, \quad h_4 < \tfrac{1}{10}.$$

Werden diese Werthe von a_1, a_2, a_3, a_4 in die Ungleichheiten (5.) substituirt, so ergiebt sich

$$(d'). \quad \begin{cases} h_1^2 < 0'000533.... & \text{oder} \quad h_1 < 0'023.... \\ h_2^2 < 0'000484.... & \text{oder} \quad h_2 < 0'022.... \\ h_3^2 < 0'000560.... & \text{oder} \quad h_3 < 0'023.... \\ h_4^2 < 0'002024.... & \text{oder} \quad h_4 < 0'0449... \end{cases}$$

Diese Grenzwerthe von h_1 und h_2 finden in der That, vermöge der Ungleichheiten $(c'.)$, Statt. Hingegen ist erst zu zeigen nöthig, dafs die Grenzwerthe von h_3 und h_4 ebenfalls noch bestehen; denn die Ungleichheiten $(c'.)$ zeigen $h_3 < \frac{50}{1000}$; hieraus aber folgt noch nicht, dafs $h_3 < \frac{23}{1000}$ sei. Ein Gleiches gilt von h_4. Um über diesen Punct ins Klare zu kommen, untersuche man etwas näher jene Wurzeln der Gleichung in y, die zwischen 4 und 5 und zwischen 2 und 3 liegen.

Da die erste dieser Wurzeln zwischen 4 und 5 liegt, so substituire man im Ausdrucke linker Hand vom Gleichheitszeichen $y = 4$, $y = 4\frac{1}{2}$, $y = 5$. Die Resultate dieser Substitutionen bekommen in gleicher Ordnung folgende Zeichen: $-$, $-$, $+$. Daher liegt die Wurzel zwischen $4\frac{1}{2}$ und 5. Es hat mithin die Gleichung $(a'.)$ eine zwischen $\frac{2}{0}$ und $\frac{1}{5}$ enthaltene Wurzel, oder die Grenzen dieser Wurzel sind

$$0'222\ldots, \quad \text{und} \quad 0'2.$$

Es differirt also unsere Annahme $a_3 = \frac{2}{10}$ um eine Gröfse, die kleiner als $0'022\ldots$ ist, oder man kann in den Ungleichheiten $(c'.)$

$$h_2 < \frac{223}{10000}$$

voraussetzen; woraus die dritte der Ungleichheiten $(d'.)$ gerechtfertiget erscheint.

Auf gleiche Weise habe ich mich überzeugt, dafs die Annahme $a_4 = \frac{4}{10}$ einen Fehler h_4 hervorbringt, der kleiner als $0'0444\ldots$ ist; wodurch die Existenz der vierten dieser Ungleichheiten dargethan wird.

Nunmehr können wir zur Bestimmung von v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 aus den Gleichungen (6.) übergehen. Wir haben bei Gelegenheit der Ausmittelung der Ungleichheiten $(d'.)$ folgende Resultate erhalten:

$$\varphi_5(a_1) = 15705, \qquad \varphi_5(a_2) = -14110,$$
$$\varphi_5(a_3) = 5531, \qquad \varphi_5(a_4) = -285.$$

Ferner ist

$$\varphi_5(0) = 0, \qquad \varphi_5(1) = 0.$$

Wenn daher, wie im vorhergehenden Beispiele, $\varepsilon_m = \frac{1}{10^7}$ angenommen und erwogen wird, dafs vermöge der hier angegebenen Werthe von $\varphi_5(a_1)$, $\varphi_5(a_2)$, ... die Gröfse v_1 die numerisch kleinste sein mufs, um deren Kenntnifs einzig und allein es zu thun ist, so kann man die Gröfsen v_0, v_2, v_3, v_4 unbeachtet lassen und blofs aus der zweiten der Gleichungen (6.)

diese kleinste Gröfse υ_1 bestimmen. Man findet

$$\upsilon_1 = 0'06829....$$

Daher nach (7.)

$$\omega = \upsilon_1\left(1-\tfrac{1}{6}\right) = 0'05690....$$

Setzen wir in (1.) $\omega = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$, so hat man

$$\int_0^1 e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)}dx = \omega\left[e^{-\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)} + e^{-\left(2\omega+\frac{1}{2\omega}\right)} + ... + e^{-\left(19\omega+\frac{1}{19\omega}\right)} + \tfrac{1}{2}e^{-2}\right]$$
$$- Y_2\,\Phi_1(1)\,\omega^2 + Y_4\,\Phi_3(1)\,\omega^4 - Y_6\,\Phi_5(1)\,\omega^6.$$

Berechnet man die in der ersten Zeile innerhalb der Klammern enthaltenen Glieder mit 7 Decimalstellen, so findet sich:

$e^{-\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)} = 0'0000000,$ $\quad e^{-\left(11\omega+\frac{1}{11\omega}\right)} = 0'0936508,$

$e^{-\left(2\omega+\frac{1}{2\omega}\right)} = 0'0000411,$ $\quad e^{-\left(12\omega+\frac{1}{12\omega}\right)} = 0'1036571,$

$e^{-\left(3\omega+\frac{1}{3\omega}\right)} = 0'0010954,$ $\quad e^{-\left(13\omega+\frac{1}{13\omega}\right)} = 0'1120891,$

$e^{-\left(4\omega+\frac{1}{4\omega}\right)} = 0'0055166,$ $\quad e^{-\left(14\omega+\frac{1}{14\omega}\right)} = 0'1190072,$

$e^{-\left(5\omega+\frac{1}{5\omega}\right)} = 0'0142642,$ $\quad e^{-\left(15\omega+\frac{1}{15\omega}\right)} = 0'1245145,$

$e^{-\left(6\omega+\frac{1}{6\omega}\right)} = 0'0264279,$ $\quad e^{-\left(16\omega+\frac{1}{16\omega}\right)} = 0'1287350,$

$e^{-\left(7\omega+\frac{1}{7\omega}\right)} = 0'0404721,$ $\quad e^{-\left(17\omega+\frac{1}{17\omega}\right)} = 0'1318000,$

$e^{-\left(8\omega+\frac{1}{8\omega}\right)} = 0'0550232,$ $\quad e^{-\left(18\omega+\frac{1}{18\omega}\right)} = 0'1338400,$

$e^{-\left(9\omega+\frac{1}{9\omega}\right)} = 0'0690985,$ $\quad e^{-\left(19\omega+\frac{1}{19\omega}\right)} = 0'1349796,$

$e^{-\left(10\omega+\frac{1}{10\omega}\right)} = 0'0820850,$ $\quad \frac{1}{2}e^{-\left(20\omega+\frac{1}{20\omega}\right)} = 0'0676676.$

Addirt man diese Zahlen-Ausdrücke und multiplicirt die Summe mit $\omega = \frac{1}{20}$, so erhält man:

$$0'072198245.$$

Ferner hat man wegen $\Phi_1(1) = 0$, $\Phi_5(1) = 0$ blofs das Glied: $+ Y_4\,\Phi_3(1)\,\omega^4$ zu berechnen und zur eben gefundenen Zahl hinzuzufügen. Dieser Zahlenwerth ist:

$$0'000000007048....$$

University of Michigan

Es beginnt also der Einfluſs der Correctionsreihe erst in der neunten Decimalstelle und man hat

$$\int_0^1 e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)} dx = 0'07219825\ldots.$$

Wird die siebente Decimalstelle durch die achte corrigirt, so hat man

$$\int_0^1 e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)} dx = 0'0721983.$$

Der bei diesem Resultate mögliche Fehler ist kleiner als $\varepsilon_m = \frac{1}{10^7}$. Aus der letzten Gleichung folgt auch die folgende:

$$\int_0^\infty e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)} dx = 0'2797318;$$

welche denselben Genauigkeitsgrad besitzt.

Zürich, im October 1836.

5.

Aufgaben.

(Von Herrn Dr. *Stern* zu Göttingen.)

Wie kann man das allgemeine Glied und das summatorische Glied der Reihe finden, deren erste Glieder folgende sind:

1, 1, 2, 3, 6, 11, 22, 42, 84, 165, 330, 654, 1308 . . . .

Die Reihe ist auf folgende Weise gebildet. Man hat zuerst $1+1=2$, $1+2=3$; zur Bildung dieser zwei Glieder wurden also die *zwei* jedesmal zunächst vorhergehenden Glieder addirt. Dann hat man $1+2+3=6$, $2+3+6=11$; zur Bildung dieser zwei Glieder wurden die *drei* ihnen jedesmal zunächst vorhergehenden Glieder addirt; die zwei nächsten Glieder entstehen, indem man jedesmal die *vier* ihnen zunächst vorhergehenden Glieder addirt u. s. w.

Ist p eine Primzahl von der Form $8n+5$, so sind die Producte $1.2....n$ und $2n+2.2n+3....3n+1$ zu gleicher Zeit quadratische Reste oder Nichtreste: in welchem Falle findet das Eine oder das Andere Statt?

Man habe m Elemente $1, 2, 3....m$; man bilde aus denselben alle Permutationen. So oft nun in einer Permutation ein höheres Element früher vorkommt als ein niedrigeres, so heifse dies eine *Variation* (eine Bezeichnung, die schon *Cramer* in seiner *Introd. à l'analyse des courbes* gebraucht hat). Rechnet man die Anzahl der Variationen, die in allen Permutationen aus m Elementen vorkommen, zusammen, so heifse dies die *Summe* der Variationen. Für zwei Elemente ist die Summe der Variationen $=1$, für 3 Elemente $=9$, für 4 Elemente $=72$: wie grofs ist die Summe der Variationen für m Elemente?

6.

Ueber Oberflächen zweiter Ordnung.

(Von Herrn Dr. *Hesse* zu Königsberg in Pr.)

A. Construction der Hauptachsen der Oberflächen zweiter Ordnung.

1.

Es seien:

1. $ax^2+by^2+cz^2+2a'yz+2b'zx+2c'xy+2a''x+2b''y+2c''z+d=0,$
2. $\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+2\alpha' yz+2\beta' zx+2\gamma' xy+2\alpha'' x+2\beta'' y+2\gamma'' z+\delta=0$

die Gleichungen irgend zweier Oberflächen zweiter Ordnung, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, in welchen der Kürze wegen die Summen der homogenen Glieder des zweiten Grades durch $f(x, y, z)$ und $\Phi(x, y, z)$ bezeichnet werden mögen. Alsdann erhält man durch Differentiation:

3. $$\begin{cases} f'(x)=2(ax+c'y+b'z), & \Phi'(x)=2(\alpha x+\gamma' y+\beta' z), \\ f'(y)=2(c'x+by+a'z), & \Phi'(y)=2(\gamma' x+\beta y+\alpha' z), \\ f'(z)=2(b'x+a'y+cz), & \Phi'(z)=2(\beta' x+\alpha' y+\gamma z). \end{cases}$$

Wenn nun x_1, y_1, z_1 die Coordinaten irgend eines Punctes einer geraden Linie p bedeuten, die beliebig durch den Anfangspunct 0 des Coordinatensystems gelegt ist, so sind bekanntlich die Gleichungen der durch den Punct 0 gelegten, diesen Linien conjugirten Ebenen:

4. $x_1 f'(x)+y_1 f'(y)+z_1 f'(z)=0,$
5. $x_1 \Phi'(x)+y_1 \Phi'(y)+z_1 \Phi'(z)=0,$

In diesen Gleichungen kann man x, y, z mit x_1, y_1, z_1 vertauschen, ohne dadurch die Gleichungen selbst zu ändern. Daher fallen die beiden Ebenen unter folgenden Bedingungen in eine zusammen:

6. $f'(x_1)=\mu\Phi'(x_1), \quad f(y_1)=\mu\Phi'(y_1), \quad f'(z_1)=\mu\Phi'(z_1).$

Aus diesen Gleichungen geht eine Gleichung vom dritten Grade in Beziehung auf den Factor μ hervor, wenn man die Verhältnisse von x_1, y_1, z_1, die sich aus zwei von ihnen ergeben, in die noch übrig bleibende dritte Gleichung setzt. Die drei Werthe von μ, welche dieser Gleichung des dritten Grades genügen, kann man nach einander in die obigen Gleichungen (6.) setzen und erhält dadurch drei verschiedene Verhält-

nisse von x_1, y_1, z_1. Es können also durch einen beliebigen Punct 0 nur drei Linien p_1, p_2, p_3 construirt werden, denen conjugirte Ebenen in Beziehung auf die beiden Oberflächen parallel laufen, oder die zusammenfallen, wenn sie durch denselben Punct gelegt werden.

Bezeichnet man die drei Werthe von μ durch μ_1, μ_2, μ_1 und die ihnen entsprechenden Coordinaten der drei Linien p_1, p_2, p_3 durch x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3, so hat man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= \mu_1 \Phi'(x_1), & f'(x_2) &= \mu_2 \Phi'(x_2), & f'(x_3) &= \mu_3 \Phi'(x_3), \\ f'(y_1) &= \mu_1 \Phi'(y_1), & f'(y_2) &= \mu_2 \Phi'(y_2), & f'(y_3) &= \mu_3 \Phi'(y_3), \\ f'(z_1) &= \mu_1 \Phi'(z_1), & f'(z_2) &= \mu_2 \Phi'(z_2), & f'(z_3) &= \mu_3 \Phi'(z_3). \end{aligned}$$

Multiplicirt man die drei ersten Gleichungen nach einander mit x_2, y_2, z_2 und addirt sie hierauf, so erhält man:

$$x_2 f'(x_1) + y_2 f'(y_1) + z_2 f'(z_1) = \mu_1 [x_2 \Phi'(x_1) + y_2 \Phi'(y_1) + z_2 \Phi'(z_1)].$$

Addirt man das zweite System von Gleichungen, nachdem die erste mit x_1, die zweite mit y_1, die dritte mit z_1 multiplicirt worden, so erhält man

$$x_1 f'(x_2) + y_1 f'(y_2) + z_1 f'(z_2) = \mu_2 [x_1 \Phi'(x_2) + y_1 \Phi'(y_2) + z_1 \Phi'(z_2)].$$

Diese beiden Gleichungen sind nur durch die Gröfsen μ_1 und μ_2 von einander verschieden, da man, ohne sie zu ändern, x_1, y_1, z_1 mit x_2, y_2, z_2 vertauschen kann. Es ist daher:

$$\begin{aligned} x_2 f'(x_1) + y_2 f'(y_1) + z_2 f'(z_1) &= 0, \\ x_2 \Phi'(x_1) + y_2 \Phi'(y_1) + z_2 \Phi'(z_1) &= 0. \end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise ergeben sich noch folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_3 f'(x_1) + y_3 f'(y_1) + z_3 f'(z_1) &= 0, \\ x_3 \Phi'(x_1) + y_3 \Phi'(y_1) + z_3 \Phi'(z_1) &= 0, \\ x_3 f'(x_2) + y_3 f'(y_2) + z_3 f'(z_2) &= 0, \\ x_3 \Phi'(x_2) + y_3 \Phi'(y_2) + z_3 \Phi'(z_2) &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich nun so deuten. Jede durch den Punct 0 in Beziehung auf die Oberflächen (1.) und (2.) gelegte, zu einer der Linien p_1, p_2, p_3 conjugirte Ebene geht durch die beiden andern Linien p. Die drei Linien p sollen aus diesem Grunde die conjugirten Linien der beiden Oberflächen und die drei Ebenen, die immer durch je zwei derselben gelegt werden können, die conjugirten Ebenen der beiden Oberflächen genannt werden. Von den sechs letzten Gleichungen, die die Coordinaten der conjugirten Linien der beiden Oberflächen vollständig bestimmen, sind die 1ste, 3te und 5te die Bedingungen, dafs die drei Linien p_1, p_2, p_3 in Beziehung auf Oberfläche (1.) zu einander conjugirt sind. Die drei andern

Gleichungen können durch passende Bestimmung der Constanten α, β, γ; α', β', γ' immer erfüllt werden. Daher mufs jedes System conjugirter Linien der Oberfläche (1.) auch ein System conjugirter Linien der Oberfläche (2.) und irgend einer andern Oberfläche sein, und umgekehrt: wenn man die Systeme conjugirter Linien der Oberfläche (1.) mit allen nur möglichen andern Oberflächen sucht, so mufs man alle Systeme conjugirter Linien der Oberfläche (1.) erhalten.

Durch Elimination des Factors μ leitet man aus den Gleichungen (6.) leicht folgende ab:

$$f'(y_1)\Phi'(z_1) - \Phi'(y_1)f'(z_1) = 0,$$
$$f'(z_1)\Phi'(x_1) - \Phi'(z_1)f'(x_1) = 0,$$
$$f'(x_1)\Phi'(y_1) - \Phi'(x_1)f'(y_1) = 0;$$

welchen Gleichungen die oben erwähnten drei verschiedenen Verhältnisse von x_1, y_1, z_1 ebenfalls genügen müssen. Addirt man nun diese Gleichungen, nachdem die erste mit einem beliebigen Factor u, die zweite mit v, die dritte mit w multiplicirt worden, so erhält man, wenn x_1, y_1, z_1 als veränderliche Coordinaten betrachtet werden, die Gleichung eines Kegels:

$$7. \quad u[f'(y_1)\Phi'(z_1) - f'(z_1)\Phi'(y_1)] + v[f'(z_1)\Phi'(x_1) - f'(x_1)\Phi'(z_1)] + w[f'(x_1)\Phi'(y_1) - f'(y_1)\Phi'(x_1)] = 0,$$

der auf seiner Oberfläche die conjugirten Linien der beiden Oberflächen enthält, weil dieser Gleichung ebenfalls die drei Verhältnisse von x_1, y_1, z_1 genügen.

Fügt man den Gleichungen (4.) und (5.) die Bedingung bei:

$$8. \quad x_1 u + y_1 v + z_1 w = 0,$$

nemlich dafs die Linie p in einer Ebene liege, die mit den Coordinaten-Ebenen Winkel bildet, deren Cosinusse sich verhalten wie $u : v : w$, so erhält man, wenn die aus den Gleichungen (4.) und (5.) sich ergebenden Verhältnisse von x_1, y_1, z_1 in diese Gleichung gesetzt werden:

$$9. \quad u[f'(y)\Phi'(z) - f'(z)\Phi'(y)] + v[f'(z)\Phi'(x) - f'(x)\Phi'(z)] + w[f'(x)\Phi'(y) - f'(y)\Phi'(x)] = 0,$$

also die Gleichung des Kegels (7.), als den geometrischen Ort der Schnittlinie q der Ebenen (4.) und (5.), welche zur Linie p conjugirt sind. Wenn man also eine Linie p um einen beliebigen Punct 0 in einer beliebigen Ebene dreht, so beschreibt die Schnittlinie q der zu dieser Linie p durch den Punct 0 gelegten conjugirten Ebenen einen Kegel der zweiten Ordnung, der auf seiner Oberfläche die drei durch den Punct 0 gelegten conjugir-

ten Linien der beiden gegebenen Oberflächen enthält. Die Ebene, in welcher die Linie p sich bewegt, nennt *Poncelet* die Directrice des durch die Linie γ beschriebenen Kegels. Diese Directrice läfst sich nun wieder aus zwei Seiten q des genannten Kegels finden. Denn da die Coordinaten x_1, y_1, z_1 der Linie p auf dieselbe Weise von x, y, z den Coordinaten der Linie q abhängen und umgekehrt x, y, z von x_1, y_1, z_1, wie die Gleichungen (4.) und (5.) zeigen, so wird die Schnittlinie der zu einer Seite q des Kegels conjugirten Ebenen die ihr entsprechende Linie p sein. Man kann also mit Hülfe zweier gegebener Seiten q des Kegels zwei Linien p der Directrice construiren, mithin die Directrice selbst. Construirt man nun auf die genannte Art zwei Kegel von verschiedenen Directricen, deren Spitzen in einem und demselben Puncte 0 liegen, so müssen sich dieselben in den drei durch den Punct 0 gezogenen conjugirten Linien der beiden Oberflächen schneiden, weil jeder von ihnen das genannte System der conjugirten Linien auf seiner Oberfläche enthält, und die der Schnittlinie der Directricen entsprechende Linie q mufs die vierte Schnittlinie der beiden Kegel sein, weil diese Linie eine Seite, sowohl des einen als des andern Kegels ist.

Mit Hülfe dieser Kegel construirt *Poncelet* die Richtungen der Hauptachsen einer Oberfläche zweiter Ordnung, indem er als die zweite gegebene Oberfläche eine Kugel annimmt. Die beiden Kegel schneiden sich alsdann in 3 Linien, welche aufeinander senkrecht stehen und den Hauptachsen der gegebenen Oberfläche parallel sind. *)

2.

Man rücke nun die beiden Oberflächen, sich selbst parallel, so fort, dafs ihre Mittelpuncte in den Punct 0 fallen. Alsdann erhalten die ihnen entsprechenden Gleichungen die Form:

$$A. \quad f(x, y, z) + D = 0,$$
$$B. \quad \Phi(x, y, z) + \Delta = 0.$$

Verbindet man die Gleichung ($A.$) mit der Gleichung einer beliebigen Ebene:

$$C. \quad ux + vy + wz + p = 0,$$

so bedeuten bekanntlich x, y, z die Coordinaten der dieser Ebene und der

*) Traité des propriétés projectives des figures par *Poncelet*, p. 397.

Oberfläche gemeinschaftlichen Curve. Fügt man zu diesen Gleichungen noch die Gleichung (9.) hinzu, die sich auch unter der Form darstellen läfst:

$$D. \quad \varphi'(x)[f'(y).w - f'(z).v] + \varphi'(y)[f'(z).u - f'(x).w] + \varphi'(z)[f'(x).v - f'(y).u] = 0,$$

so bedeutet x, y, z einen Punct der genannten Curve, der durch die Ebene getroffen wird, welche in Beziehung auf die Oberfläche (*B.*) zu der durch ihn an die Curve gelegten Tangente conjugirt ist. Denn die Cosinusse der Winkel, die eine in dem Puncte x, y, z an die Curve gelegte Tangente mit den Coordinatenachsen bildet, verhalten sich wie:

$$f'(y).w - f'(z).v : f'(z).u - f'(x).w : f'(x).v - f'(y).u.$$

Wenn man demnach durch x_1, y_1, z_1 veränderliche Coordinaten bezeichnet, so ist:

$$\varphi'(x_1)[f'(y).w - f'(z).v] + \varphi'(y_1)[f'(z).u - f'(x).w] + \varphi'(z_1)[f'(x).v - f'(y).u] = 0$$

die Gleichung der Ebene, die in Beziehung auf die Oberfläche (*B.*) zur genannten Tangente conjugirt ist. Damit endlich diese Ebene den Punct x, y, z treffe, mufs die letzte Gleichung erfüllt werden, wenn man statt x_1, y_1, z_1 setzt x, y, z. Construirt man nun in allen ebenen Curven der Oberfläche (*A.*), die der Ebene (*C.*) parallel sind, alle Puncte x, y, z, die der genannten Bedingung genügen, so liegen, da die Gleichung (*D.*) unabhängig von der Constante p ist, diese Puncte in dem Kegel (9.), und der Kegel selbst kann mittelst dieser Puncte construirt werden. Wenn die Oberfläche (*B.*) eine Kugel ist, so sind die gesuchten Puncte x, y, z die Fufspuncte des von dem Mittelpuncte der Oberfläche auf die der Ebene (9.) parallelen Curven der Oberfläche (1.) gefällten Normalen, und der Kegel, der durch diese Normalen gebildet wird, geht durch die Hauptachsen der Oberfläche (*A.*). Man kann nun leicht fünf Puncte der genannten Art finden. Verbindet man diese mit dem Mittelpuncte der gegebenen Oberfläche durch gerade Linien, so erhält man eben so viele Seiten des gesuchten Kegels, mit deren Hülfe sich wieder auf bekannte Weise die übrigen Seiten des Kegels finden lassen. Zwei der genannten Linien sind die Hauptachsen des durch den Mittelpunct der Oberfläche gelegten, mit der Ebene (*C.*) parallelen Schnittes. Der zu dieser Ebene conjugirte Durchmesser ist eine dritte Seite des Kegels. Das im Mittelpuncte der Oberfläche auf die erwähnte Ebene errichtete Loth ist wiederum eine Seite des Kegels. Legt

man endlich durch den Punct, in welchem das Loth die Oberfläche trifft, eine Ebene parallel mit der Ebene (*C.*), fället hierauf von dem Schnittpuncte des Lothes mit der Oberfläche zwei Perpendikel auf die jener Ebene und der Oberfläche gemeinschaftliche Curve und verbindet die Fufspuncte derselben durch gerade Linien mit dem Mittelpuncte der Oberfläche, so sind dieselben wieder zwei Seiten des gesuchten Kegels.

Dupin weicht von der angegebenen Construction darin ab, dafs er statt der drei zuletzt genannten Seiten des Kegels die Ebenen bestimmt, welche den Kegel längs der drei zuerst erwähnten berühren. *)

Poncelet sowohl als *Dupin*, die, wie ich glaube, allein die vorliegende Aufgabe der Construction der Hauptachsen einer Oberfläche zweiter Ordnung behandelt haben, benutzen zu ihren Constructionen Kegel zweiter Ordnung, oder, wenn man den Schnitt der Kegel mit irgend einer Ebene betrachtet, Curven zweiter Ordnung, die nicht unmittelbar durch die Oberfläche selbst gegeben sind. Da aber die gegebene Oberfläche unendlich viele Curven zweiter Ordnung darbietet, so schien es mir der Mühe werth, zu untersuchen, ob durch eine dieser Curven die Construction ausführbar sei. Diese Untersuchung ergab nun die gewünschte Construction, die ich als das Resultat analytischer Betrachtungen darstellen will.

3.

Wenn man die Gleichung (9.), die alle Kegel umfafst, welche auf ihrer Oberfläche die durch den Punct 0 gelegten drei conjugirten Linien der Oberflächen (1.) und (2.) enthalten, unter der Form darstellt:

$$10. \quad Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+C'xy=0,$$

so ergeben sich folgende Relationen:

$$a.\begin{cases} A=\alpha(vb'-wc')+\gamma'(wa-ub')+\beta'(uc'-va), \\ B=\gamma'(va'-wb)+\beta(wc-ua')+\alpha'(ub-vc'), \\ C=\beta'(vc-wa')+\alpha'(wb'-uc)+\gamma(ua'-vb'), \\ 2A'=\beta(wb'-uc)+\gamma(ub-vc')+\alpha'(wc'-vb')+\beta'(va'-wb)+\gamma'(vc-wa'), \\ 2B'=\gamma(uc'-va)+\alpha(vc-wa')+\beta'(ua'-wc')+\gamma'(wb'-uc)+\alpha'wa-ub'), \\ 2C'=\alpha(va'-wb)+\beta(wa-ub')+\gamma'(vb'-ua')+\alpha'(uc'-va)+\beta'(ub-vc'). \end{cases}$$

*) Sur la description des lignes et des surfaces du second degré par M. *Dupin*. Gerg. Ann. XIV. pag. 66.

Setzt man ferner:

$$b.\quad \begin{cases} \varkappa = bc - a'^2, & \varkappa' = b'c' - aa', \\ \lambda = ca - b'^2, & \lambda' = c'a' - bb', \\ \mu = ab - c'^2, & \mu' = a'b' - cc'; \end{cases}$$

multiplicirt hierauf die gleichvielten Gleichungen der beiden Systeme mit einander und addirt endlich die Gleichungen, so erhält man:

$$11.\quad A\varkappa + B\lambda + C\mu + 2A'\varkappa' + 2B'\lambda' + 2C'\mu' = 0.$$

Diese Gleichung ist aber unabhängig von der Oberfläche (2.), so wie von der Lage der Directrice. Daher wird jeder Kegel, der auf seiner Oberfläche irgend ein System durch den Punct 0 gelegter, in Beziehung auf die Oberfläche (1.) conjugirter Linien enthält, der Gleichung (1.) genügen.

Aus diesem Grunde reduciren sich die sechs Bedingungen, die die sechs Constanten der Gleichung (10.) (welche aber die Stelle von fünf vertreten), erfüllen müssen, wenn der Kegel (10.) auf seiner Oberfläche zwei bestimmte Systeme conjugirter Linien der Oberfläche (1.) enthalten soll, auf fünf Bedingungen, aus welchen jene Constanten sich bestimmen lassen. Mit Rücksicht auf diese Bemerkungen ergiebt sich nun folgender Satz.

„Irgend zwei durch einen beliebigen Punct gelegte Systeme conjugirter Linien einer Oberfläche zweiter Ordnung liegen auf der Oberfläche eines Kegels zweiter Ordnung."

Wenn man umgekehrt die Gröfsen $a, b, c; a', b', c'$ durch $\varkappa, \lambda, \mu; \varkappa', \lambda', \mu'$ ausdrückt und der Kürze wegen setzt:

$$u = abc + 2a'b'c' - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2,$$

so erhält man:

$$c.\quad \begin{cases} na = \lambda\mu - \varkappa'^2, & na' = \lambda'\mu' - \varkappa\varkappa', \\ nb = \mu\varkappa - \lambda'^2, & nb' = \lambda'\mu' - \lambda\lambda', \\ nc = \varkappa\lambda - \mu'^2, & nc' = \varkappa'\lambda' - \mu\mu'. \end{cases}$$

Dieselben Gleichungen erhält man auch, wenn man in den Gleichungen (*b.*) $\varkappa, \lambda, \mu; \varkappa', \lambda', \mu'$ für $a, b, c; a', b', c'$ und $na, nb, nc, na', nb', nc'$ für $\varkappa, \lambda, \mu; \varkappa', \lambda', \mu'$ setzt. Wenn man daher auf die angegebene Art in allen Gleichungen dieses Paragraphen die genannten Gröfsen ändert, so wird

$$12.\quad Aa + Bb + Cc + 2A'a' + 2B'b' + 2C'c' = 0$$

die Bedingung, die der Kegel (10.) erfüllen mufs, wenn er auf seiner Oberfläche irgend ein System conjugirter Linien derjenigen Oberfläche enthalten soll, deren Gleichung ist:

$$\psi(x, y, z) = \varkappa x^2 + \lambda y^2 + \mu z^2 + 2\varkappa' yz + 2\lambda' zx + 2\mu' xy + \tau = 0.$$

Es seien nun $x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ x_3, y_3, z_3$ die Coordinaten irgend eines Systems durch den Anfangspunct der Coordinaten 0 gelegter conjugirter Linien der Oberfläche (1.) und $X_1, Y_1, Z_1;\ X_2, Y_2, Z_2;\ X_3, Y_3, Z_3$ die Coordinaten der in diesem Puncte 0 auf die drei conjugirten Ebenen errichteten Lothe: alsdann hat man folgende zwölf Bedingungen:

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= \varrho_1 X_1, & f'(x_2) &= \varrho_2 X_2, & f'(x_3) &= \varrho_3 X_3, \\ f'(y_1) &= \varrho_1 Y_1, & f'(y_2) &= \varrho_2 Y_2, & f'(y_3) &= \varrho_3 Y_3, \\ f'(z_1) &= \varrho_1 Z_1, & f'(z_2) &= \varrho_2 Z_2, & f'(z_3) &= \varrho_3 Z_3, \end{aligned}$$

$$x_1 X_2 + y_1 Y_2 + z_1 Z_2 = 0,$$
$$x_1 X_3 + y_1 Y_3 + z_1 Z_3 = 0,$$
$$x_2 X_3 + x_2 Y_3 + z_2 Z_3 = 0.$$

Drückt man umgekehrt die Gröfsen x, y, z durch X, Y, Z aus, so erhält man, mit Berücksichtigung der Gleichungen (*b.*):

$$\begin{aligned} 2(\varkappa X_1 + \mu' Y_1 + \lambda' Z_1) = \psi' X_1 = b_1 x_1, & \quad \psi' X_2 = b_2 x_2, & \quad \psi' X_3 = b_3 x_3, \\ 2(\mu' X_1 + \lambda Y_1 + \varkappa' Z_1) = \psi' Y_1 = b_1 y_1, & \quad \psi' Y_2 = b_2 y_2, & \quad \psi' Y_3 = b_3 y_3, \\ 2(\lambda' X_1 + \varkappa' Y_1 + \mu Z_1) = \psi' Z_1 = b_1 z_1, & \quad \psi' Z_2 = b_2 z_2, & \quad \psi' Z_3 = b_3 z_3. \end{aligned}$$

Die zwölf letzten Gleichungen sind nun die Bedingungen, dafs die drei Lothen conjugirte Linien der Oberfläche $\psi(x, y, z) = 0$ sind. Jedes System conjugirter Linien der Oberfläche ψ steht also senkrecht auf einem ihm entsprechendem Systeme conjugirter Ebenen der Oberfläche (1.). Daher mufs jeder Kegel, der auf seiner Oberfläche drei durch den Punct 0 gelegte Linien enthält, die auf irgend einem Systeme conjugirter Ebenen der Oberfläche (1.) senkrecht stehen, der Gleichung (12.) genügen. Setzt man endlich $a = b = c = 1$ und $a' = b' = c' = 0$, so wird die Oberfläche (1.) eine Kugel und

$$13. \quad A + B + C = 0$$

die Bedingung, welcher der Kegel genügen mufs, wenn er auf seiner Oberfläche irgend drei auf einander senkrechte Linien enthält.

Die Gleichungen (11.), (12.), (13.), die man auch aus den Gleichungen (*a.*) erhält, wenn man in ihnen $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $\alpha' = \beta' = \gamma' = 0$ setzt und die Gröfsen u, v, w eliminirt, sind nun die Bedingungen, dafs der Kegel (10.) auf seiner Oberfläche das System conjugirter Linien der Oberfläche (1.) enthalte, welche auf einander senkrecht stehen, oder, was dasselbe ist, drei den Hauptachsen der Oberfläche (1.) parallele Linien. Denn die drei durch den Punct 0 gelegten, den Hauptachsen der Oberfläche (1.) parallelen Linien bilden erstens ein System conjugirter Linien der Ober-

fläche (1.); zweitens stehen sie senkrecht auf einem Systeme conjugirter Ebenen und drittens sind sie selbst auf einander senkrecht. Setzt man, wie vorhin angedeutet wurde, in den Gleichungen (*a.*) $\alpha = \beta = \gamma = 1$ und $\alpha' = \beta' = \gamma' = 0$, so erhält man:

$$a. \quad \begin{cases} A = vb' - wc', \\ B = wc' - ua', \\ C = ua' - vb', \\ 2A = u(b-c) - vc' + wb', \\ 2B = uc' + v(c-a) - wa', \\ 2C' = -ab' + va' + w(a-b). \end{cases}$$

4.

Unter der Voraussetzung, dafs $\delta = 0$, dafs also der Anfangspunct der Coordinaten 0 in einem Puncte der Oberfläche (2.) liege, suche man nun die Bedingungen, unter welchen der Kegel (10.) die Oberfläche (2.) in ebenen Curven schneidet, oder, analytisch ausgesprochen, die Bedingungen, wenn die Summe der Gleichungen (2.) und (10.) sich in lineäre Factoren zerlegen läfst. Der eine dieser Factoren mufs offenbar, gleich 0 gesetzt, die Gleichung der die Oberfläche (2.) im Puncte 0 tangirenden Ebene sein, nämlich:

$$P(2\alpha''x + 2\beta''y + 2\gamma''z).$$

Der andere Factor sei:

$$Ux + Vy + Wz + 1.$$

Wenn man alsdann das Product der beiden Factoren der Summe der Gleichungen (2.) und (10.) gleich setzt, so erhält man für die gesuchten Bedingungen:

$$14. \quad \begin{cases} 2\alpha''U = \alpha + A, & \beta''W + \gamma''V = \alpha' + A', \\ 2\beta''V = \beta + B, & \gamma''U + \alpha''W = \beta' + B', \\ 2\gamma''W = \gamma + C, & \alpha''V + \beta''U = \gamma' + C'. \end{cases}$$

Die Gleichung

$$A. \quad Ux + Vy + Wy + 1 = 0$$

gehört unter diesen Bedingungen der Ebene zu, in welcher die dem Kegel (10.) und der Oberfläche (2.) gemeinschaftliche ebene Curve liegt.

Fügt man den Bedingungen (14.) noch die Bedingung (11.) hinzu, dafs nämlich der Kegel (10.) irgend ein System conjugirter Linien der Oberfläche (1.) enthalte, so erhält man durch Substitution der Werthe von $A, B, C; A', B', C'$, aus den Gleichungen (14.) in die Gleichung (11.), eine

in Beziehung auf U, V, W lineäre Gleichung. Diese Gleichung drückt aber analytisch die Bedingung aus, dafs die Ebene ($A.$) durch einen festen Punct a gehe. Legt man nun durch den Punct 0 irgend ein System conjugirter Linien der Oberfläche (1.) und durch die drei Schnittpuncte dieses Systems mit der Oberfläche (2.) eine Ebene, so mufs diese Ebene durch den festen Punct a gehen, weil der Kegel, dessen Spitze in 0 liegt und der die der Ebene und der Oberfläche (2.) gemeinschaftliche Curve auf seiner Oberfläche enthält, den obigen Bedingungen genügt. Aus der vorangegangenen Betrachtung ergiebt sich demnach folgender Satz.

„Wenn man durch einen beliebigen, aber festen Punct 0 einer Ober-
„fläche v irgend ein System conjugirter Linien einer zweiten Ober-
„fläche u legt und die drei Schnittpuncte dieses Systems mit der Ober-
„fläche v durch eine Ebene verbindet: so geht diese Ebene durch
„einen und denselben Punct, welches auch das durch den Punct 0 ge-
„legte System conjugirter Linien der Oberfläche u sei." *)

In dem Falle, dafs die Oberfläche u eine Kugel ist, in welchem aus der Gleichung (11.) die Gleichung (13.) hervorgeht, hat man folgenden Satz.

„Wenn man durch einen beliebigen, aber festen Punct 0 einer Ober-
„fläche irgend drei auf einander senkrechte Linien legt und durch
„die drei Schnittpuncte der drei Linien und der Oberfläche eine Ebene:
„so geht die Ebene durch einen festen Punct." **)

Der Punct a liegt auf der Linie, welche durch den Punct 0 geht und in Beziehung auf die Oberfläche (1.) conjugirt ist zu der durch den Punct 0 gelegten Tangenten-Ebene der Oberfläche (2.). Denn legt man durch den Punct 0 irgend ein System conjugirter Linien der Oberfläche (1.), von denen zwei die Oberfläche (2.) im Puncte 0 berühren, so fallen zwei Schnittpuncte dieses Systems und der Oberfläche (2.) in den Punct 0, und die Ebene, die die drei Schnittpuncte des Systems und der Oberfläche (2.) verbindet, geht nothwendiger Weise durch die dritte Linie des Systems, welche in Beziehung auf die Oberfläche (1.) conjugirt ist zu der die Oberfläche (2.) im Puncte 0 tangirenden Ebene.

---

*) Théorèmes nouveaux sur les lignes et surfaces du second ordre par M. *Frégier*. Gerg. Ann. VII. pag. 97.

**) Théorèmes nouveaux sur les lignes et surfaces du second ordre par M. *Frégier*. Gerg. Ann. VI. pag. 237.

Legt man durch den Punct 0 drei Linien senkrecht auf irgend ein System conjugirter Ebenen der Oberfläche (1.) und verbindet die drei Schnittpuncte dieser Linien und der Oberfläche (2.) durch eine Ebene, so geht diese Ebene durch einen festen Punct b, weil die Linien conjugirte sind in Beziehung auf die Oberfläche $\psi(x, y, z)$. Daher liegt der Punct b auf der Linie, welche durch den Punct 0 geht und in Beziehung auf die Oberfläche $\psi(x, y, z)$ conjugirt ist zu der im Puncte 0 die Oberfläche (2.) tangirenden Ebene. Diese Linie kann auch ohne die Oberfläche $\psi(x, y, z)$ construirt werden. Denn legt man durch den Punct 0 ein System conjugirter Ebenen der Oberfläche (1.), von denen sich zwei in der im Puncte 0 auf die Oberfläche (2.) errichteten Normale schneiden, und zieht durch den Punct 0 Lothe auf diese Ebenen, so bilden die Lothe ein System conjugirter Linien der Oberfläche $\psi(x, y, z)$. Zwei von diesen Linien liegen nun offenbar in der Tangenten-Ebene der Oberfläche (2.); die dritte ist daher in Beziehung auf die Oberfläche $\psi(x, y, z)$ zu dieser Ebene conjugirt. Wenn man also vom Puncte 0 ein Loth auf die Ebene fällt, welche in Beziehung auf die Oberfläche (1.) conjugirt ist zu der im Puncte 0 auf die Oberfläche (2.) errichteten Normale, so ist dieses Loth die gesuchte Linie.

Zieht man endlich durch den Punct 0 irgend auf einander senkrechte Linien und verbindet die Schnittpuncte dieser Linien und der Oberfläche (2.) durch eine Ebene, so geht diese Ebene durch einen festen Punct c der im Puncte 0 errichteten Normale der Oberfläche. Legt man nun irgend eine Ebene entweder durch den Punct a, oder durch b, oder durch c, und durch den Schnitt dieser Ebene und der Oberfläche (2.) einen Kegel, dessen Spitze im Puncte 0 liegt, so genügt dieser Kegel in dem ersten Falle den Bedingungen (11.) und (14.), im zweiten den Bedingungen (12.) und (14.), im dritten den Bedingungen (13.) und (14.).

5.

Die im vorigen Paragraph entwickelten Methoden, die Schnitte der Kegel und der Oberfläche (2.) zu finden, welche den Bedingungen (11.), (12.), (13.), einzeln verbunden mit (14.), genügen, ergeben nun die Construction des Kegels, der allen jenen Bedingungen entspricht, d. h. desjenigen Kegels, der seine Spitze im Puncte 0 hat, die Oberfläche (2.) in einer ebenen Curve schneidet und auf seiner Oberfläche drei den Hauptachsen der Oberfläche (1.) parallele Linien enthält. Denn verbindet man

die drei Puncte a, b, c durch eine Ebene, so schneidet diese Ebene die Oberfläche (2.) in einer Curve, die auch auf der Oberfläche des gesuchten Kegels liegt.

Die Relationen, welche zwischen den Coëfficienten U, V, W der Gleichung (A.) Statt finden, damit die ihr entsprechende Ebene durch die Puncte a, b, c gehe, erhält man durch Substitution der Werthe von $A, B, C; A', B', C'$ aus den Gleichungen (14.) in die Gleichungen (13.), (12.), (11.), nämlich:

$$15.\quad \alpha'' U+\beta'' V+\gamma'' W = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2},$$

$$16.\quad (\alpha'' a+\beta'' c'+\gamma'' b')U+(\alpha'' c'+\beta'' b+\gamma'' a')V+(\alpha'' b'+\beta'' a'+\gamma'' c)W = \frac{a\alpha+b\beta+c\gamma+2a'\alpha'+2b'\beta'+2c'\gamma'}{2},$$

$$17.\quad (\alpha'' \varkappa+\beta'' \mu'+\gamma'' \lambda')U+(\alpha'' \mu'+\beta'' \lambda+\gamma'' \varkappa')V+(\alpha'' \lambda'+\beta'' \varkappa'+\gamma'' \mu)W = \frac{\varkappa\alpha+\lambda\beta+\mu\gamma+2\varkappa'\alpha'+2\lambda'\beta'+2\mu'\gamma'}{2}.$$

Um diese Gleichungen vortheilhaft zu beschränken, nehme man an, dafs:

$$a=\alpha;\quad b=\beta;\quad c=\gamma;\quad a'=\alpha';\quad b'=\beta';\quad c'=\gamma';\quad d=\delta=0;$$
$$a''=\alpha'';\quad b''=\beta'';\quad c''=\gamma'';$$

dafs also die Oberfläche (1.) und (2.) die nemliche sei, welche durch den Punct 0 geht. Alsdann gehen die obigen Gleichungen, wenn man, wie vorhin, der Kürze wegen setzt: $n = abc+2a'b'c-4aa'^2-bb'^2-cc'^2$, über in:

$$18.\quad \begin{cases} a'' U+b'' V+c'' W = \frac{a+b+c}{2}, \\ (a'' a+b'' c'+c'' b')U+(a'' c'+b'' b+c'' a')V+(a'' b'+b'' a'+c'' c)W = \frac{a^2+b^2+c^2+2a'^2+2b'^2+2c'^2}{2}, \\ (a'' \varkappa+b'' \mu'+c'' \lambda')U+(a'' \mu'+b'' \lambda+c'' \varkappa')V+(a'' \lambda'+b'' \varkappa'+c'' \mu)W = \frac{3n}{2}. \end{cases}$$

Bezeichnet man die Coordinaten des Mittelpunctes der in Rede stehenden Oberfläche durch X, Y, Z, so hat man folgende Gleichungen:

$$aX+c'Y+b'Z+a''=0, \qquad nX+a''\varkappa+b''\mu'+c''\lambda'=0,$$
$$c'X+bY+a'Z+b''=0, \qquad nY+a''\mu'+b''\lambda+c''\varkappa'=0,$$
$$b'X+a'Y+cZ+c''=0, \qquad nZ+a''\lambda'+b''\varkappa'+c''\mu=0.$$

Die letzte und erste der Gleichungen (18.) gehen, wenn man in ihnen die Gröfsen a'', b'', c'' durch die Coordinaten des Mittelpunctes der

Oberfläche ausdrückt, über in:

$$19.\quad UX+VY+WZ=-\tfrac{3}{2},$$

$$20.\quad (aX+c'Y+b'Z)U+(c'X+bY+a'Z)V+(b'X+a'Y+cZ)W=-\frac{a+b+c}{2}.$$

Multiplicirt man die erste der Gleichungen (18.) mit $a+b+c$ und zieht sie hierauf von der zweiten ab, so erhält man

$$[-(b+c)a''+c'b''+b'c'']U+[c'a''-(a+c)b''+a'c'']V+[b'a''+a'b''-(a+b)c'']W=-(\varkappa+\lambda+\mu).$$

Drückt man endlich a'', b'', c'' durch X, Y, Z aus, so geht diese Gleichung über in:

$$(XU+YV+ZW)(\varkappa+\lambda+\mu)-(X\varkappa+Y\mu'+Z\lambda')U-(X\mu'+Y\lambda+Z\varkappa')V-(X\lambda'+Y\varkappa'+Z\mu)W=-(\varkappa+\lambda+\mu),$$

aus welcher Gleichung endlich, mit Berücksichtigung der Gleichung (19.), folgende hervorgeht:

$$21.\quad (X\varkappa+Y\mu'+Z\lambda')U+(X\mu'+Y\lambda+Z\varkappa')V+(X\lambda'+Y\varkappa'+Z\mu)W=-\frac{\varkappa+\lambda+\mu}{2}.$$

Die Gleichungen (19.), (20.) und (21.) bestimmen nun auf gleiche Weise wie die Gleichungen (18.), aus welchen sie hervorgegangen sind, die Werthe von U, V, W. Dieselben Gleichungen erhält man aber auch, wenn man in den Gleichungen (15.), (16.), (17.) setzt: $\alpha=\beta=\gamma=1$, $\alpha'=\beta'=\gamma'=0$, $\alpha''=-X$, $\beta''=-Y$, $\gamma''=-Z$.

Diese Bemerkung läfst nun folgende geometrische Deutung zu. Diejenige Oberfläche, deren Gleichung

$$x^2+y^2+z^2-2Xx-2Yy-2Zz=0$$

ist, schneidet die Ebene (A.), welche durch die drei Puncte a, b, c geht, in einer Curve, welche auch auf einem Kegel liegt, der seine Spitze im Puncte 0 hat und auf seiner Oberfläche drei den Hauptachsen der gegebenen Oberfläche parallele Linien. Jene Gleichung gehört aber einer Kugel an, deren Mittelpunct mit dem Mittelpuncte der Oberfläche zusammenfällt und die durch den Punct 0 jener Oberfläche hindurch geht. Verbindet man demnach die vier der Oberfläche, der Kugel und der Ebene (A.) gemeinschaftlichen Puncte durch gerade Linien mit dem Puncte 0, so sind drei von diesen Linien den Hauptachsen der gegebenen Oberfläche parallel. Die vierte, den Hauptachsen der Oberfläche nicht parallele Linie läfst sich leicht mit Hülfe der in §. 1. angegebenen Methode bestimmen.

6.

Ich lasse jetzt die in den vorhergehenden Paragraphen angedeutete Construction der Hauptachsen einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung im Zusammenhange folgen.

Man ziehe durch einen beliebigen Punct O der gegebenen Oberfläche drei Systeme conjugirter Linien und lege durch die drei Schnittpuncte eines jeden Systems und der Oberfläche eine Ebene. Die drei Ebenen schneiden sich alsdann in einem Puncte *a*. Man errichte ferner im Puncte O auf drei Systeme conjugirter Ebenen Lothe und verbinde die Schnittpuncte der Oberfläche und der zu demselben Systeme conjugirter Ebenen gehörigen Lothe durch Ebenen. Diese drei Ebenen treffen in einem Puncte *b* zusammen. Durch den Punct O lege man endlich drei Systeme auf einander senkrechter Linien und verbinde die Schnittpuncte eines jeden Systems und der Oberfläche durch eine Ebene. Die drei Ebenen schneiden sich in einem Puncte *c*. Diese drei Puncte *a*, *b*, *c* können einfacher, aber weniger symmetrisch, auch auf folgende Art construirt werden. Man schneide auf der Linie, welche den Mittelpunct der Oberfläche mit dem Puncte O verbindet, vom Mittelpuncte aus, den dritten Theil dieser Linie ab, so erhält man den Punct *a* [man vergleiche die Gleichungen (*A.*) und (19.)]. Durch den Punct O ziehe man drei Lothe auf irgend ein System conjugirter Ebenen und verbinde die drei Schnittpuncte der Lothe und der Oberfläche durch eine Ebene. Hierauf ziehe man durch den Mittelpunct der Oberfläche eine Linie parallel mit der im Puncte O errichteten Normale, und im Schnittpuncte dieser Linie und der Oberfläche errichte man eine zweite Normale an die Oberfläche. Mit dieser ziehe man nun durch den Punct O eine parallele Linie, so schneidet diese Linie die vorhin erwähnte Ebene in dem gesuchten Puncte *b*. Durch den Punct O lege man endlich drei auf einander senkrechte Linien und durch die drei Schnittpuncte derselben und der Oberfläche eine Ebene. Diese Ebene wird dann von der im Puncte O an die Oberfläche errichteten Normale im Puncte *c* getroffen. Die drei Puncte *a*, *b*, *c* verbinde man durch eine Ebene (*A.*) und schneide die gegebene Oberfläche durch dieselbe in einer Curve *u*. Beschreibt man endlich mit einem Radius, der gleich ist der Entfernung des Punctes O vom Mittelpuncte der Oberfläche, um letzteren eine Kugel, so schneidet diese die Ebene (*A.*) in einem Kreise *u'*, welcher die Curve *u* in vier Puncten trifft. Verbindet man nun diese

vier Puncte mit dem Puncte 0 durch gerade Linien, so sind drei von ihnen den Hauptachsen der gegebenen Oberfläche parallel. Um die vierte, den Hauptachsen nicht parallele Linie zu bestimmen, ziehe man von irgend zwei Puncten α und β der Curve u und von irgend zwei Puncten γ und δ des Kreises u' gerade Linien nach dem Puncte 0. Durch den Punct 0 lege man alsdann eine auf $\alpha 0$ senkrechte und eine zu dieser Linie conjugirte Ebene und bezeichne durch α' die diesen Ebenen gemeinschaftliche und der Linie $\alpha 0$ auf die angegebene Art entsprechende Linie. Construirt man nun die Linie β', γ', δ', welche den Linien 0β, 0γ, 0δ auf gleiche Weise entsprechen und legt eine Ebene durch die Linien α', β' und eine zweite Ebene durch die Linien γ', δ', so schneiden sich diese Ebenen in einer Linie p. Legt man alsdann durch den Punct 0 zwei Ebenen, von denen die eine zur Linie p conjugirt, die andere senkrecht auf ihr ist, so schneiden sich diese Ebenen in der vierten, den Hauptachsen der gegebenen Oberfläche nicht parallelen Linie.

7.

Wenn zwei Systeme conjugirter Linien a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 einer Oberfläche u) gegeben sind, so kann man leicht andere Systeme conjugirter Linien derselben Oberfläche finden. Denn läfst man die sechs gegebenen Linien durch einen Punct 0 gehen, legt drei Ebenen durch die Linien $a_1 a_2$, $b_1 c_1$, $b_2 c_2$, und bezeichnet die Schnittlinie der zweiten Ebene und der ersten mit b_3, der zweiten und der dritten durch c_3, so bilden die drei Linien a_1, b_3, c_3 wieder ein System conjugirter Linien der Oberfläche u).

Wenn drei Systeme conjugirter Linien einer Oberfläche u) gegeben sind, so läfst sich mit Hülfe einer gegebenen Oberfläche v) zu jeder gegebenen Ebene die in Beziehung auf die Oberfläche u) conjugirte Linie und zu jeder gegebenen Linie die conjugirte Ebene construiren. Denn legt man eine Tangenten-Ebene an die Oberfläche v), parallel mit der gegebenen Ebene, zieht hierauf durch den Tangirungspunct 0 die drei gegebenen Systeme conjugirter Linien der Oberfläche u) und verbindet die drei Schnittpuncte eines jeden Systems und der Oberfläche v) durch eine Ebene, so erhält man drei Ebenen, die sich in einem Puncte schneiden. Verbindet man endlich diesen Punct mit dem Tangirungspuncte 0 durch eine gerade Linie, so ist diese die gesuchte. Legt man durch eine gegebene Linie zwei Ebenen, construirt zu jeder derselben die in Beziehung auf die Oberfläche u) conju-

girte Linie, legt endlich eine Ebene parallel mit diesen beiden Linien, so ist diese in Beziehung auf die Oberfläche *u*) conjugirt zu der gegebenen Linie.

Nach diesen vorbereitenden Betrachtungen werde ich die Auflösung folgender Aufgabe auseinandersetzen:

„Zur Construction der Richtungen der Hauptachsen einer Oberfläche (1.)
„sind gegeben zwei Systeme conjugirter Linien der Oberfläche und
„eine Hülfsoberfläche (2.)."

Mit zwei Systemen conjugirter Linien der Oberfläche (1.) ist, wie oben gezeigt wurde, auch ein drittes System conjugirter Linien der Oberfläche gegeben. Diese drei Systeme lege man durch einen Punct 0 der gegebenen Oberfläche (2.), welcher Punct im Folgenden als der Anfangspunct des Coordinatensystems betrachtet werden soll, auf welches die Oberflächen bezogen sind, und construire auf die in §. 4. beschriebene Art die drei Puncte a, b, c. Durch diese drei Puncte lege man eine Ebene (*A.*)

$$Ux + Vy + Wz + 1 = 0,$$

welche durch die Gleichungen (15.), (16.), (17.) analytisch bestimmt wird. Diese Ebene nun schneidet die gegebene Oberfläche (2.) in einer solchen Curve *u*), dafs, wenn man eine durch den Punct 0 gezogene Linie durch diese Curve fortbewegt, die Linie einen Kegel beschreibt, welcher auf seiner Oberfläche drei den Hauptachsen der Oberfläche (1.) parallele Linien enthält. Bezeichnet man nun durch X, Y, Z die Coordinaten des Mittelpunctes einer Kugel, die durch den Punct 0 geht und die Ebene (*A.*) in einem Kreise schneidet, der die erwähnte Eigenschaft der Curve *u* hat, so werden die Coordinaten X, Y, Z durch die Gleichungen (19.), (20.), (21.) bestimmt. Diese Gleichungen sind aber, wenn man X, Y, Z als veränderlich betrachtet, die analytischen Ausdrücke von Ebenen, die sich in dem gesuchten Mittelpuncte der Kugel schneiden. Es bleibt also nur noch übrig, diese Ebenen zu construiren. Die Gleichung (20.) ist zusammengesetzt aus den drei Gleichungen:

$$a\left(X + \frac{1}{2U}\right) + c'Y + b'Z = 0,$$

$$c'X + b\left(Y + \frac{1}{2V}\right) + a'Z = 0,$$

$$b'X + a'Y + c\left(Z + \frac{1}{2W}\right) = 0.$$

Die erste von diesen Gleichungen stellt eine Ebene dar, welche durch die Mitte des von der Ebene (*A.*) abgeschnittenen Stücks der x Achse des

Coordinatensystems hindurch geht und in Beziehung auf die Oberfläche (1.) zu dieser Achse conjugirt ist. Eben so ist die zweite die Gleichung einer Ebene, die durch die Mitte des von der Ebene (A.) abgeschnittenen Stückes der y Achse hindurch geht und zu dieser Achse in Beziehung auf die Oberfläche (1.) conjugirt ist. Die dritte Gleichung stellt eine Ebene dar, die durch die Mitte des von der Ebene (A.) abgeschnittenen Stückes der z Achse hindurch geht und conjugirt ist zu dieser Achse. Die drei genannten Ebenen schneiden sich aber in einem Puncte der Ebene (20.), weil die Werthe von X, Y, Z, welche den drei Gleichungen genügen, auch der Gleichung (20.) genügen. Wenn man nun durch den Punct 0 irgend ein System auf einander senkrechter Linien legt und durch die Mitte der von der Ebene (A.) abgeschnittenen Stücke dieser drei Linien drei Ebenen, die in Beziehung auf die Oberfläche (1.) zu den ihnen entsprechenden Linien conjugirt sind, so schneiden sich die drei Ebenen ebenfalls in einem Puncte der Ebene (27.). Auf diese Weise kann man nun so viele Puncte der Ebene (20.) finden, als man will; mithin die Ebene selbst. Diese Ebene ist in Beziehung auf die Oberfläche (1.) conjugirt zu dem Lothe der Ebene (A.); wie aus der Gleichung (20.) leicht zu ersehen ist. Man kann daher auf die oben angegebene Art eine ihr parallele Ebene construiren und es bedarf nur eines Punctes derselben, um ihre Lage im Raume zu bestimmen.

Wenn man in der Gleichung (20.) für $a, b, c; a', b', c'$ setzt: $\varkappa, \lambda, \mu; \varkappa', \lambda', \mu'$, so geht sie in die Gleichung (21.) über. Wenn man daher für die Oberfläche (1.) die Oberfläche ψ substituirt, von welcher ebenfalls drei Systeme conjugirter Linien gegeben sind (nemlich die Lothe auf den drei gegebenen Systemen conjugirter Ebenen der Oberfläche (1.)), und die angegebene Construction durch diese Lothe wie vorhin durch die drei Systeme conjugirter Linien ausführt, so erhält man die Ebene (21.).

Setzt man in der Gleichung (20.) $a=b=c=1$ und $\alpha'=\beta'=\gamma'=0$, so geht sie in (19.) über, und die dieser Gleichung entsprechende Ebene wird auf dieselbe Weise construirt, wenn man für die Oberfläche (1.) eine Kugel substituirt. Um also einen Punct der Ebene (19.) zu finden, lege man durch den Punct 0 zwei auf einander senkrechte Linien und durch die Mitten der von der Ebene (A.) abgeschnittenen Stücke dieser Linien drei senkrechte Ebenen auf diese Linien: alsdann ist der Schnittpunct dieser drei Ebenen ein Punct der gesuchten Ebene (19.). Man bemerkt aber leicht, dafs diese Ebene parallel mit der Ebene (A.) und dafs ihr

senkrechter Abstand vom Puncte O gleich ist $\frac{3}{2}$ des Abstandes der Ebene (*A*.). Aus dieser Bemerkung ergiebt sich demnach eine einfachere Construction der gesuchten Ebene (19.).

Die drei Ebenen (19.), (20.), (21.) schneiden sich nur in einem Puncte. Beschreibt man um diesen Punct eine Kugel, mit einem Radius, der gleich ist der Entfernung des Punctes O von diesem Puncte, so schneidet sie die Ebene (*A*.) in einem Kreise *v*. Verbindet man die vier Schnittpuncte der Curve *u* und des Kreises *u'* durch gerade Linien mit dem Puncte O, so bestimmen drei von ihnen die Richtungen der Hauptachsen der Oberfläche (1.). Die vierte, den Hauptachsen nicht parallele Linie wird auf die in §. 6. angegebene Art gefunden.

Königsberg, den 21. October 1837.

(Die Fortsetzung folgt.)

7.

Neuer Beweis der Zerlegbarkeit ganzer Functionen in reelle Factoren vom ersten oder zweiten Grade.

(Von Herrn *Ed. Collins*, Staatsrath und Mitglied der Akad. d. W. zu St. Petersburg.)

(Nach einer vor der Kaiserl. Akad. der W. zu St. Petersburg in deren Sitzung am $\frac{10}{22}$ten März 1837 gehaltenen Vorlesung neu bearbeitet.)

Der hier mitzutheilende neue Beweis beruht auf folgendem, wie ich glaube, bisher noch nicht aufgestellten Lehrsatze, der zwar nicht allein für ganze Functionen zu gelten scheint, jedoch hier, wo der Hauptgegenstand nicht mehr fordert, nur auf solche, und überdem, wie jener Beweis selbst, nur auf *reelle* Functionen beschränkt wird.

Es bezeichne $f(x, y)$ *eine ganze Function irgend eines Grades und von der Beschaffenheit, dafs zu jedem Werthe von* x, *der innerhalb zweier gegebenen Grenzen* α *und* $\alpha^{(in)}$ *beliebig angenommen wird, wenigstens Ein reeller, mit ersterem der Gleichung* $f(x, y) = 0$ *genügender Werth von* y *gehört. Geben nun zwei solcher Paare correspondirender Werthe,* $x = \alpha$, $y = \beta$ *und* $x = \alpha^{(in)}$, $y = \beta^{(in)}$ *(wobei* β *und* $\beta^{(in)}$ *auch allenfalls einander gleich sein können), wenn sie successive in eine andre ganze Function* $F(x, y)$, *von gleichfalls irgend einem Grade, gesetzt werden, dieser selbst zwei Werthe von einander entgegengesetzten Zeichen, so mufs es zwischen* α und $\alpha^{(in)}$ *wenigstens Einen Werth von* x *geben, der mit dem ihm in der Gleichung* $f(x, y) = 0$ *correspondirenden reellen Werthe von* y *zu gleicher Zeit ein Paar zusammengehöriger Wurzeln der Gleichung* $F(x, y) = 0$ *bildet.*

Beweis. Mögen α', α'', α''', ... $\alpha^{(m-1)}$ eine unbestimmte Menge einander beliebig nahe liegender Zwischenwerthe von α, und $\alpha^{(m)}$ und β', β'', β''', ... $\beta^{(m-1)}$ die ihnen, als Werthen von x, in der Gleichung $f(x, y) = 0$ respective conjugirten reellen Wurzelwerthe von y bezeichnen.

Werden sowohl diese verschiedenen Paare zusammengehöriger Werthe, als auch die beiden Paare α, β und $\alpha^{(m)}$, $\beta^{(m)}$, nach einander in die Function $F(x, y)$ gesetzt, so mufs es, wenn kein einziges derselben diese $= 0$ macht, in der Reihe der Resultate:

$F(\alpha, \beta)$, $F(\alpha', \beta')$, $F(\alpha'', \beta'')$, ... $F(\alpha^{(m-1)}, \beta^{(m-1)})$, $F(\alpha^{(m)}, \beta^{(m)})$, die alle reell sind und deren erstes und letztes entgegengesetzte Zeichen haben, wenigstens Ein Paar unmittelbar auf einander folgender Glieder von gleichfalls einander entgegengesetzten Zeichen geben.

Bezeichnen nun $F(\alpha^{(k)}, \beta^{(k)})$ und $F(\alpha^{(k+1)}, \beta^{(k+1)})$ ein solches Paar von Gliedern, so wird man also darin $\alpha^{(k)}$ und $\alpha^{(k+1)}$ einander so nahe, als man irgend will, annehmen dürfen.

Mithin wird auch, wenn $\alpha^{(k)} > \alpha^{(k+1)}$ und $\frac{\alpha^{(k)} + \alpha^{(k+1)}}{2} = \gamma$, $\frac{\alpha^{(k)} - \alpha^{(k+1)}}{2} = \delta$, $\frac{\beta^{(k)} - \beta^{(k+1)}}{2} = \varepsilon$, $\frac{\beta^{(k)} - \beta^{(k+1)}}{2} = \zeta$ gesetzt wird, δ eine beliebig kleine positive Zahl bezeichnen. Zugleich aber wird, da für $\delta = 0$ auch $\zeta = 0$ sein mufs, gestattet sein $\zeta = p\delta$ zu setzen, unter der Voraussetzung, dafs p eine entweder von δ gänzlich unabhängige oder doch eine Gröfse sei, die für $\delta = 0$ nicht ∞ wird.

Demnach ist

$$F(\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}) = F(\gamma + \delta, \varepsilon + p\delta) =$$
$$F(\gamma, \varepsilon) + \delta\left(\frac{\partial F}{\partial \gamma} + p \cdot \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}\right) + \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \gamma^2} + 2p \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \gamma . \partial \varepsilon} + p^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2}\right) + \ldots,$$

$$F(\alpha^{(k+1)}, \beta^{(k+1)}) = F(\gamma - \delta, \varepsilon - p\delta) =$$
$$F(\gamma, \varepsilon) - \delta\left(\frac{\partial F}{\partial \gamma} + p \cdot \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}\right) + \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \gamma^2} + 2p \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \gamma . \partial e} + p^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2}\right) - \ldots,$$

Nehmen wir nun δ so klein an, dafs in der rechten Seite jeder dieser beiden Gleichungen der absolute Werth des ersten Gliedes, $F(\gamma, \varepsilon)$, gröfser als die Summe aller darauf folgenden Glieder ist, so mufs, da $F(\alpha^{(k)}, \beta^{(k)})$ un $F(\alpha^{(k+1)}, \beta^{(k+1)})$ entgegengesetzte Zeichen haben sollen, nothwendiger Weise

$$a. \quad F(\gamma, \varepsilon) = 0$$

sein.

Wegen $f(\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}) = 0$ und $f(\alpha^{(k+1)}, \beta^{(k+1)}) = 0$ ist aber auch noch

$$f(\gamma + \delta, \varepsilon + p\delta) =$$
$$f(\gamma, \varepsilon) + \delta\left(\frac{\partial f}{\partial \gamma} + p \cdot \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right) + \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2} + 2p \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma . \partial \varepsilon} + p^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2}\right) + \ldots. = 0$$

und

$$f(\gamma - \delta, \varepsilon - p\delta) =$$
$$f(\gamma, \varepsilon) - \delta\left(\frac{\partial f}{\partial \gamma} + p \cdot \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right) + \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2} + 2p \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma . \partial \varepsilon} + p^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2}\right) - \ldots. = 0,$$

folglich auch

$$f(\gamma, \varepsilon) + \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2} + 2p \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma . \partial \varepsilon} + p^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2}\right) + \ldots . = 0$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma} + p \cdot \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + \frac{\delta^2}{2.3}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial \gamma^3} + 3p \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial \gamma^2 . \partial \varepsilon} + 3p^2 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial \gamma . \partial \varepsilon^2} + p^3 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial \varepsilon^3}\right) + \ldots . = 0.$$

Da aber jede dieser beiden Gleichungen eine endliche Anzahl von Gliedern begreift, und dabei wenigstens für jeden Werth von δ Statt haben mufs, der den höchsten der für die Begründung der Gleichung (*a.*) erforderlich gewesenen nicht übersteigt, so wird dort jeder von δ unabhängige Ausdruck, er möge allein oder multiplicirt mit einer Potenz von δ vorkommen, einzeln $= 0$, folglich auch

$$b. \quad f(\gamma, \varepsilon) = 0$$

sein müssen.

Aus (*a.*) und (*b.*) ergiebt sich also, dafs, unter den im Lehrsatze aufgestellten Bedingungen, die Gleichungen $f(x, y) = 0$ und $F(x, y) = 0$ wenigstens Ein Paar gemeinschaftlicher reeller Wurzeln, $x = \gamma$ und $y = \varepsilon$ haben müssen, von welchen γ zwischen den Grenzen α und $\alpha^{(m)}$ liegt.

Der aus der Division einer gegebenen ganzen Function einer Variabeln

$$1. \quad fx = x^n + a' x^{n-1} + a'' x^{n-2} + \ldots . + a^{(n-1)} x + a^{(n)},$$

deren Grad n nicht niedriger als der zweite ist, durch eine ganze Function vom zweiten Grade

$$2. \quad x^2 - bx + c$$

entstehende Rest kann nur entweder eine Constante oder eine Function vom ersten Grade von x sein.

Er mufs daher in der allgemeinen Form $tx + u$ enthalten sein, wo t und u von x unabhängige Ausdrücke und blofs Functionen der Coëfficienten a', a'', a''', ... $a^{(n-1)}$, $a^{(n)}$, b, c von der Beschaffenheit bezeichnen, dafs in jedem Falle, wenn (2.) ein Factor von (1.) ist, sowohl $t = 0$ als $u = 0$ wird.

Wird aufserdem der, übrigens uns hier ganz gleichgültige Quotient der Division durch Q bezeichnet, so ist

$$3. \quad fx = Qx\,(x^2 - bx + c) + (tx + u).$$

Nun seien α und β die beiden reellen oder imaginären Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - bx + c = 0,$$

und zwar:

$$4. \quad \alpha = \tfrac{1}{2}b + \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 - c)}, \qquad \beta = \tfrac{1}{2}b - \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 - c)},$$

oder, wenn man der Kürze halber

$$5. \quad \tfrac{1}{2}b = p, \qquad \tfrac{1}{4}b^2 - c = q$$

setzt,

$$6. \quad \alpha = p + \sqrt{q}, \qquad \beta = p - \sqrt{q}.$$

Dann folgt offenbar aus (3.):

$$7. \quad f\alpha = t\alpha + u,$$
$$8. \quad f\beta = t\beta + u,$$

und hieraus:

$$9. \quad t = \frac{f\alpha - f\beta}{\alpha - \beta},$$

$$10. \quad u = \frac{\alpha f\beta - \beta f\alpha}{\alpha - \beta}.$$

Nun giebt (1.):

$$11. \quad f\alpha = \alpha^n + a'\alpha^{n-1} + a''\alpha^{n-2} + \ldots + a^{(n)},$$
$$12. \quad f\beta = \beta^n + a'\beta^{n-1} + a''\beta^{n-2} + \ldots + a^{(n)},$$

weshalb

$$13. \quad f\alpha - f\beta =$$
$$(\alpha^n - \beta^n) + a'(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + a''(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}) + \ldots + a^{(n-1)}(\alpha - \beta),$$

$$14. \quad \alpha f\beta - \beta f\alpha =$$
$$-\alpha\beta[(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + a'(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}) + \ldots + a^{(n-2)}(\alpha - \beta)] + a^{(n)}(\alpha - \beta)$$

ist: Relationen, aus welchen, mittelst (9.) und (10.), und weil aus (4.) $\alpha - \beta = 2\sqrt{q}$ und $\alpha\beta = p^2 - q$ ist, die Gleichungen

$$15. \quad t = \frac{(p+\sqrt{q})^n - (p-\sqrt{q})^n}{2\sqrt{q}} + a'\frac{(p+\sqrt{q})^{n-1} - (p-\sqrt{q})^{n-1}}{2\sqrt{q}} + \ldots.$$
$$\ldots. + a^{(n-2)}\frac{(p+\sqrt{q})^2 - (p-\sqrt{q})^2}{2\sqrt{q}} + a^{(n-1)},$$

$$16. \quad u = -(p^2-q)\left[\frac{(p+\sqrt{q})^{n-1} - (p-\sqrt{q})^{n-1}}{2\sqrt{q}} + a'\frac{(p+\sqrt{q})^{n-2} - (p-\sqrt{q})^{n-2}}{2\sqrt{q}} + \ldots.\right.$$
$$\left. \ldots. + a^{(n-3)}\frac{(p+\sqrt{q})^2 - (p-\sqrt{q})^2}{2\sqrt{q}} + a^{(n-2)}\right] + a^{(n)}$$

entspringen.

Da nun als bekannt vorausgesetzt werden darf, dafs jede Gleichung von einem ungeraden Grade wenigstens eine reelle Wurzel, jede ganze Function von ungeradem Grade also wenigstens einen reellen Factor vom ersten Grade hat, nach dessen Ausscheidung eine ganze Function von *geradem* Grade hervorgeht, so brauchen wir uns bei unserm Beweise blofs auf die Betrachtung von ganzen Functionen letzter Art zu beschränken

und dürfen daher

$$17. \quad n = 2m$$

annehmen.

Setzen wir überdies der Kürze halber allgemein:

$$18. \quad n_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r},$$

so erhalten wir, (15.) und (16.) mittelst des Binomialsatzes entwickelnd und dabei reducirend,

$$\begin{aligned} 19. \quad t = \; & (2mp^{2m-1} + (2m)_3 p^{2m-3} q + \ldots + (2m)_3 p^3 q^{m-2} + 2mpq^{m-1}) \\ & + a'((2m-1)p^{2m-2} + (2m-1)_3 p^{2m-4} q + \ldots + (2m-1)_2 p^2 q^{m-2} + q^{m-1}) \\ & + a''((2m-2)p^{2m-3} + (2m-2)_3 p^{2m-5} q + \ldots + (2m-2)_3 p^3 q^{m-3} + (2m-2)pq^{m-2}) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a^{(2m-2)} . 2p \\ & + a^{(2m-1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20. \quad u = \; & -(p^2-q)\big[((2m-1)p^{2m-2} + (2m-1)_3 p^{2m-4} q + \ldots + (2m-1)_2 p^2 q^{m-2} + q^{m-1}) \\ & + a'((2m-2)p^{2m-3} + (2m-2)_3 p^{2m-5} q + \ldots + (2m-2)_3 p^3 q^{m-3} + (2m-2)pq^{m-2}) \\ & + a''((2m-3)p^{2m-4} + (2m-3)_3 p^{2m-6} q + \ldots + (2m-3)_2 p^2 q^{m-3} + q^{m-2}) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a^{(2m-3)} . 2p + a^{(2m-2)}\big] + a^{(2m)}, \end{aligned}$$

welches man auch so:

$$\begin{aligned} 21. \quad t = \; & \left(2m + (2m)_3 \frac{q}{p^2} + (2m)_5 \left(\frac{q}{p^2}\right)^2 + \ldots + (2m)_3 \left(\frac{q}{p^2}\right)^{m-2} + 2m \left(\frac{q}{p^2}\right)^{m-1}\right) p^{2m-1} \\ & + a'\left((2m-1) + (2m-1)_3 \frac{q}{p^2} + (2m-1)_5 \left(\frac{q}{p^2}\right)^2 + \ldots + (2m-1)_2 \left(\frac{q}{p^2}\right)^{m-2} + \left(\frac{q}{p^2}\right)^{m-1}\right) p^{2m-2} \\ & + a''\left((2m-2) + (2m-2)_3 \frac{q}{p^2} + (2m-2)_5 \left(\frac{q}{p^2}\right)^2 + \ldots + (2m-2)_3 \left(\frac{q}{p^2}\right)^{m-3} + (2m-2)\left(\frac{q}{p^2}\right)^{m-2}\right) p^{2m-3} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a^{(2m-2)} . 2p \\ & + a^{(2m-1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22. \quad u = \; & -\left(1 - \frac{q}{p^2}\right)\left[\left((2m-1) + (2m-1)_3 \frac{q}{p^2} + (2m-1)_5 \left(\frac{q}{p^2}\right)^2 + \ldots + (2m-1)_2 \left(\frac{q}{p^2}\right)^{m-2} + \left(\frac{q}{p^2}\right)^{m-1}\right) p^{2m-1}\right. \\ & + a'\left((2m-2) + (2m-2)_3 \frac{q}{p^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (2m-2)_3 \left(\frac{q}{p^2}\right)^{m-3} + (2m-2)\left(\frac{q}{p^2}\right)^{m-2}\right) p^{2m-3} \\ & + a''\left((2m-3) + (2m-3)_3 \frac{q}{p^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (2m-3)_2 \left(\frac{q}{p^2}\right)^{m-3} + \left(\frac{q}{p^2}\right)^{m-2}\right) p^{2m-2} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \left. + a^{(2m-3)} . 2p^3 + a^{(2m-2)} p^2\right] + a^{(2m)}, \end{aligned}$$

oder, wenn man

$$23.\quad \frac{q}{p^2} = k \quad \text{oder} \quad q = kp^2$$

setzt, auch so schreiben kann:

$$24.\quad \begin{aligned} t = {} & (2mk^{m-1} + (2m)_3\, k^{m-2} + (2m)_5\, k^{m-3} + \ldots + (2m)_3\, k + 2m)\, p^{2m-1} \\ & + a'(k^{m-1} + (2m-2)_2 k^{m-2} + (2m-1)_4 k^{m-3} + \ldots + (2m-1)_3 k + 2m-1)\, p^{2m-1} \\ & + a''((2m-2)k^{m-2} + (2m-2)_3 k^{m-3} + (2m-2)_5 k^{m-4} + \ldots + (2m-2)_3 k + 2m-2)\, p^{2m-3} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a^{(2m-2)}.2p + a^{(2m-1)}, \end{aligned}$$

$$25.\quad \begin{aligned} u = {} & (k-1)\,[(k^{m-1} + (2m-1)_2\, k^{m-2} + (2m-1)_4\, k^{m-3} + \ldots + (2m-1)_3 k + 2m-1)\, p^{2m} \\ & + a'((2m-2)k^{m-2} + (2m-2)_3\, k^{m-3} + \ldots + (2m-2)_3 k + 2m-2)\, p^{2m-1} \\ & + a''(k^{m-2} + (2m-3)_2 k^{m-3} + \ldots\ldots\ldots + (2m-3)_3 k + 2m-3)\, p^{2m-2} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (a^{(2m-3)}.2p^3 + a^{(2m-2)}.p^2] + a^{(2m)}. \end{aligned}$$

Hieran knüpfen sich folgende Wahrnehmungen und Schlüsse:

I. In Bezug auf p ist die Function t immer von *ungeradem*, u immer von *geradem* Grade.

II. Ist m eine *ungerade* Zahl, so ist u in Bezug auf k von *ungeradem* Grade, weswegen alsdann, in der Gleichung $u = 0$ für *jeden* reellen Werth von p, k wenigstens einen reellen Wurzelwerth haben muſs.

III. Ist m eine *gerade* Zahl, so wird man, aus (24.) und (25.) die Potenz k^{m-1} eliminirt, noch eine Function v von p und k erhalten, welche, in Bezug auf k, vom $(m-1)$ten, also von einem *ungeraden* Grade sein wird. Um diese Elimination zu vereinfachen, kann man, was der Allgemeinheit der Untersuchung keinen Eintrag thut, $a' = 0$ setzen; und weil alsdann

$$26.\quad \begin{aligned} t = {} & (2mk^{m-1} + (2m)_3\, k^{m-2} + \ldots + (2m)_3\, k + 2m)\, p^{2m-1} \\ & + a''((2m-2)k^{m-2} + (2m-2)_3 k^{m-3} + \ldots + (2m-2)_3 k + 2m-2)\, p^{2m-} \\ & + \text{wie oben (24.)} \end{aligned}$$

ist, so giebt die Elimination:

$$27.\quad \begin{aligned} v = 2mu - (k-1)pt = (k-1)\,[& (2(2m)_3 k^{m-2} + 4(2m)_5 k^{m-3} + \ldots + (2m-2).2m)\, p^{2m} \\ & + 2a''(k^{m-2}\ \text{etc.})\, p^{2m-2} \\ & - a'''(k^{m-2}\ \text{etc.})\, p^{2m-3} \\ & \ldots\ldots\ldots \\ & + 2a^{(2m-2)}(m-1)p^2 - a^{(2m-1)}p] + a^{(2m)}, \end{aligned}$$

weswegen in der Gleichung $v = 0$ für *jeden* reellen Werth von p, k

gleichfalls wenigstens einen reellen Wurzelwerth haben mufs. Da nun offenbar für $t=0$ und $v=0$ auch $u=0$ wird, so kann, wenn man will, v die Stelle von u vertreten.

IV. Die Polynome

$$2mk^{m-1}+(2m)_3\,k^{m-2}+\ldots.+(2m)_3\,k+2m,$$
$$k^{m-1}+(2m-1)_2\,k^{m-2}+\ldots.+(2m-1)_3\,k+2m-1,$$
$$2(2m)_3\,k^{m-2}+4(2m)_5\,k^{m-3}+\ldots.+(2m-2).2m,$$

womit respective in (24.) und (26.) die höchste Potenz p^{2m-1} und in (27.) eben dieselbe multiplicirt ist, erhalten für *jeden positiven* Werth von k selbst keine anderen als *positive* Werthe.

V. Deshalb wird der Multiplicator von p^{2m} sowohl in (25.), wo er

$$(k-1)(k^{m-1}+(2m-1)_2\,k^{m-2}+\ldots.+(2m-1)_3\,k+2m-1),$$

als in (27.), wo er

$$(k-1)(2(2m)_3\,k^{m-2}+4(2m)_5\,k^{m-3}+\ldots.+(2m-2)2m)$$

ist, für jeden positiven Werth von k, $\varkappa<1$, *negativ*, für jeden Werth von k, $\varkappa'>1$, dagegen *positiv* sein.

VI. Es mufs, von welcher Gröfse und welchen Vorzeichen auch die Coëfficienten a', a'', etc. in (1.) sein mögen, immer möglich sein, für p einen absoluten Werth P zu finden, welcher in (24.) oder (26.) das erste, die Potenz p^{2m-1} enthaltende Glied für *alle* Werthe von k, von $\varkappa$ bis $\varkappa'$, und zugleich in jeder der Formeln (25.) und (27.) das erste, von der Potenz p^{2m} afficirte Glied, sowohl für $k=\varkappa$ als für $k=\varkappa'$, und zwar jedes der namhaft gemachten Glieder, seinem absoluten Werthe nach, gröfser als die Summe aller respective darauf folgenden Glieder macht.

VII. Demnach wird

für $p=\pm P$ und $k=\varkappa$, u in (25.) oder v in (27.) *negativ*,
- $p=\pm P$ - $k=\varkappa'$, u - - - - - - *positiv*

sein. Also mufs die Gleichung $u=0$, oder $v=0$, sowohl für $p=+P$ wenigstens einen, zwischen $\varkappa$ und $\varkappa'$ fallenden reellen Wurzelwerth $k=\mu$, als auch für $p=-P$ wenigstens einen, zwischen dieselben Grenzen fallenden, reellen Werth $k=\nu$ haben; wobei es unentschieden bleiben mag, ob und wann μ und ν identisch sein können.

VIII. Alsdann aber wird

für $p=+P$ und $k=\mu$, t, in (24.) wie in (26.), *positiv*,
- $p=-P$ - $k=\nu$, t, - - - - - *negativ*

sein.

IX. Daher mufs es, kraft des oben begründeten Lehrsatzes und in Folge des unter II. für ein ungerades m und unter III. für ein gerades m Bemerkten, zwischen $+P$ und $-P$ wenigstens einen reellen Werth von p geben, der mit dem ihm in (25.) $=0$ oder in (27.) $=0$ correspondirenden reellen Wurzelwerthe von k ein Paar den Gleichungen (24.) $=0$ und (25.) $=0$ oder den Gleichungen (26.) $=0$ und (27.) $=0$ gemeinschaftlicher Wurzeln bildet.

X. Wegen (23.) wird es also auch wenigstens ein Paar den Gleichungen (21.) $=0$ und (22.) $=0$ gemeinschaftlicher reeller Werthe von p und q und folglich, nach (5.), wenigstens ein Paar reeller Werthe von b und c geben, die in (3.) den Rest $tx+u=0$, mithin x^2-bx+c zum Factor der ganzen Function (1.) machen.

8.

Auflösung der Aufgabe 1. (links) im Anhange des ersten Bandes der „Systematischen Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten etc." von J. Steiner.

(Vom Herrn *Schaellibaum*, Privatlehrer zu Berlin.)

„Wenn in einer Geraden *A* vier harmonische Puncte und in einem ebe-„nen Strahlbüschel *B* vier harmonische Strahlen gegeben sind, so sind die „zwei Gebilde *A* und *B* in Ansehung der gegebenen Elemente auf acht ver-„schiedene Arten projectivisch (§. 8. 1. β.) und können in Rücksicht auf „jede Art in perspectivische Lage gebracht werden. Wenn nun in einer „Ebene die Lage der Geraden *A* als fest angenommen und der Strahl-„büschel *B* auf alle Arten mit ihr perspectivisch gelegt wird: welche ge-„genseitige Beziehung haben dann die 8 (oder 16) Puncte, in welche sein „Mittelpunct fällt?"

Es seien (Fig. 1.) in der Geraden *A* die vier harmonischen Puncte a, c, b, d gegeben, von welchen a und c, b und d einander zugeordnet sind; und im Strahlbüschel *B* seien die vier harmonischen Strahlen *a, c, b, d* gegeben, und zwar sei *a* dem *c*, *b* dem *d* zugeordnet. Ferner werde die *A* in ihrer Lage als fest angenommen, während die Lage von *B* eine beliebige ist. Die in der Aufgabe angedeutete, achtfache projectivische Beziehung zwischen den zwei Gebilden besteht (nach §. 8. 1. β. des Steinerschen Werkes) darin, dafs man denselben Elementen a, c, b, d in *A* die gegebenen vier Strahlen in *B* der Reihe nach in folgenden acht verschiedenen Rangordnungen entsprechend setzen kann:

a, c, b, d; *a, c, d, b;* *c, a, b, d;* *c, a, d, b;*
d, b, c, a; *b, d, c, a;* *d, b, a, c;* *b, d, a, c;*

und für jede dieser acht Arten läfst sich *B* mit *A* perspectivisch legen, d. h. man kann den Strahlbüschel *B* in der Ebene der Geraden *A* in solche Lage bringen, dafs die in demselben gegebenen Strahlen, und zwar ohne Veränderung der Winkel, welche sie mit einander einschliefsen, durch

die entsprechend gesetzten Puncte in A gehen. Auf diese Weise erhält man im Allgemeinen auf einer Seite von A acht Puncte, in welchen sich der Mittelpunct des mit A perspectivisch gelegten Strahlbüschels B befinden kann. (Dafs, nach §. 13. II. a. a. O., für jede Art der projectivischen Beziehung, B mit A auf zwiefache Weise perspectivisch liegen kann, so jedoch, dafs sein Mittelpunct auf entgegengesetzte Seiten von A fällt, mag vor der Hand unberücksichtigt bleiben.) Da nun, wie aus den Betrachtungen in §. 8. a. a. O. sich ergiebt, die gegenseitige Lage von vier harmonischen Strahlen eines Büschels vollständig bestimmt ist, wenn die Winkel der zugeordneten Strahlenpaare gegeben sind, so kann man zur Auffindung der genannten Puncte folgendes Verfahren anwenden. Man beschreibe über den Abständen $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}$, als Sehnen, Kreisbogen, welche beziehlich die Winkel der zugeordneten Strahlenpaare in B, wie diese nach einer der acht Rangordnungen den Puncten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ entsprechen, als Peripheriewinkel fassen; der Durchschnittspunct dieser Kreisbogen ist einer der gesuchten Puncte, und zwar derjenige, welcher der gewählten Art der projectivischen Beziehung zugehört.

1. Es mögen von obigen acht Rangordnungen der Strahlen a, c, d, b zunächst die ersten vier, in einer Reihe neben einander stehenden ins Auge gefafst werden. Der Abkürzung wegen sollen $(a\,c)$, $(b\,d)$ beziehlich die Winkel der Strahlen a und c, b und d bezeichnen, wie sie in Fig. 1. durch Bogen bemerklich gemacht sind. Beschreibt man nun über dem Abstande $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}$ in A die zwei Bogen μ_1, μ_2 von unter sich gleichen Kreisen M_1, M_2, die über $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}$ beziehlich die gegebenen Winkel $(a\,c)$ und $\pi-(a\,c)$ als Peripheriewinkel fassen; und gleicherweise über $\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}$ die zwei Bogen μ_3, μ_4 der unter sich gleichen Kreise M_3, M_4, welche über $\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}$ beziehlich die gegebenen Winkel $(b\,d)$ und $\pi-(b\,d)$ als Peripheriewinkel enthalten: so sind, wie aus dem Vorigen und aus der Betrachtung des Strahlbüschels B folgt, die Puncte B_1, B_2, B_3, B_4, worin sich beziehlich die Kreisbogen μ_1 und μ_3, μ_2 und μ_3, μ_2 und μ_4 schneiden, die vier Lagen für den Mittelpunct des Strahlbüschels B, wenn dieser auf die erwähnten vier Arten mit A perspectivisch gelegt wird. (In Fig. 1. sind, um nicht die Uebersicht zu erschweren, die Strahlen aus B_1, B_2, B_3, B_4, ... nach $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ weggelassen.) Es sollen ferner die Mitten von $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}$ beziehlich mit $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_1$ bezeichnet werden, und die Strecke $\mathfrak{a}\,\mathfrak{m}$ $(=\mathfrak{m}\,\mathfrak{c})$ heifse r.

Der Punct m ist der innere Aehnlichkeitspunct *) der Kreise M_1 und M_2; und m_1 hat dieselbe Beziehung zu den Kreisen M_3 und M_4. Wenn daher eine Gerade, z. B. aus m, die Kreisbogen μ_1 und μ_2 in zwei Puncten schneidet, so ist das Product aus den Abständen dieser Puncte von m constant und $= r^2$. Zugleich aber ist (§. 8. des angeführten Werkes) auch $r^2 = \mathfrak{m}\mathfrak{b} . \mathfrak{m}\mathfrak{d}$, und jede Secante aus m durch die Kreise M_3, M_4 schneidet jeden derselben in solchen zwei Puncten, deren Abstände von m ein constantes Product $= r^2$ bilden. Deshalb mufs, wenn man etwa die Gerade in B_1 zieht, der Punct, worin dieselbe den Kreisbogen μ_2 trifft, zugleich im Bogen μ_3 liegen, und kann folglich kein andrer als B_2 selbst sein. Daher geht die Gerade $\mathfrak{m}B_1$ durch B_2, und eben so $\mathfrak{m}B_3$ durch B_4; andrerseits folgt auf dieselbe Weise, dafs die Geraden B_1B_3, B_2B_4 sich in $\mathfrak{m}_1$ schneiden. — Wird ferner durch die drei Puncte B_1, B_2, B_3 ein Kreis gelegt, so kann dieser, weil nach dem Vorigen $\mathfrak{m}B_1 . \mathfrak{m}B_2 = \mathfrak{m}B_3 . \mathfrak{m}B_4 = r^2$, die Gerade $\mathfrak{m}B_3$ zum zweitenmale in keinem andern Puncte als in B_4 treffen. Daher liegen B_1, B_2, B_3, B_4 in einem Kreise P. Man beschreibe jetzt über $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{d}$, als Durchmesser, die Kreise m, $\mathfrak{m}_1$; r ist der Halbmesser des ersten Kreises. Einer der Durchschnittspuncte der Kreise P und m sei N, so ist $\mathfrak{m}N = r$; da aber $\mathfrak{m}B_1 . \mathfrak{m}B_2 = r^2$, so ist $\mathfrak{m}N$ zugleich eine Berührende aus m an den Kreis P in N und steht senkrecht auf dem Halbmesser PN desselben Kreises. Dieser schneidet also den Kreis m und aus denselben Gründen auch den Kreis m_1 rechtwinklig. Daraus folgt weiter, dafs der Punct p, worin sich die Geraden B_2B_3, B_1B_4 schneiden, und welcher der Pol von A in Bezug auf den Kreis P ist (§. 44. a. a. O.), auf der gemeinschaftlichen Sehne der Kreise m, $\mathfrak{m}_1$ liegt. Das bisherige Ergebnifs ist demnach folgendes.

Die Puncte $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_4$ *liegen in einem Kreise* P, *der die beiden Kreise* m, $\mathfrak{m}_1$ *rechtwinklig schneidet. Fafst man sie als vollständiges Viereck* (§. 19. a. a. O.) *auf, so schneiden sich zwei Paare gegenüberstehender Seiten desselben, nämlich* $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$ *und* $\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3$ *und* $\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_4$, *auf der Geraden* A, *und zwar in den Mittelpuncten* m, $\mathfrak{m}_1$ *der gleichnamigen*

---

*) Wegen der Benennungen: *Aehnlichkeitspunct*, *Aehnlichkeitslinie*, *gemeinschaftliche Potenz zweier Kreise*, *rechtwinklig schneidende Kreise* u. s. w. ist auf die *Steiner*sche Abhandlung „Geometrische Betrachtungen" im 1. Bande dieses Journals und auf eine Darstellung desselben Gegenstandes von *Gergonne* im 17. Bande seiner *Annales de mathém.* zu verweisen.

Kreise; das dritte Paar $B_1 B_4$, $B_2 B_3$ *begegnet sich auf der gemeinschaftlichen Sehne der genannten Kreise im Pole von* A *in Bezug auf den Kreis* P.

2. Für die vier übrigen Rangordnungen der gegebenen Strahlen in B (welche die Umkehrungen der ersten vier sind) erhält man die zugehörigen Lagen des Mittelpuncts des Strahlbüschels B für die perspectivische Lage desselben mit A, nämlich $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_4$, durch ein analoges Verfahren, wie in (1.) die B_1, B_2, B_3, B_4 erhalten wurden. Was daselbst von diesen gezeigt worden, gilt auf gleiche Weise von jenen. *Es müssen also die Puncte* $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_4$ *in einem Kreise* P_1 *liegen, welcher die Kreise* m, m_1 *rechtwinklig schneidet; in dem durch sie bestimmten vollständigen Vierecke schneiden sich zwei Paare gegenüberstehender Seiten, nämlich* $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2$ *und* $\mathfrak{B}_3 \mathfrak{B}_4$, $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_3$ und $\mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_4$, auf A, und zwar in den Puncten m, m_1 u. s. w.

3. Man denke sich für einen Augenblick aus allen acht Puncten B_1, B_2, B_3, B_4 und $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_4$, die Strahlen nach $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ gezogen, also den Strahlbüschel B auf sämmtliche acht Arten wirklich in perspectivische Lage mit A gebracht. Dann ist unmittelbar klar, dafs

Winkel $\mathfrak{b} B_1 \mathfrak{c} = \text{W.}\ \mathfrak{b} \mathfrak{B}_1 \mathfrak{c}$, u. s. f. und $\mathfrak{a} \mathfrak{B}_1 \mathfrak{d} = \mathfrak{a} \mathfrak{B}_1 \mathfrak{d}$, u. s. f.; eben so

W. $\mathfrak{a} B_2 \mathfrak{b} = \text{W.}\ \mathfrak{a} \mathfrak{B}_3 \mathfrak{b}$, u. s. w. und $\mathfrak{c} \mathfrak{B}_2 \mathfrak{d} = \mathfrak{c} \mathfrak{B}_3 \mathfrak{d}$, u. s. w.;

und es liegen folglich sowohl die Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, als $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ mit jedem der Punctenpaare B_1 und $\mathfrak{B}_1$, B_2 und $\mathfrak{B}_2$, B_3 und $\mathfrak{B}_3$, B_4 und $\mathfrak{B}_4$ in Kreisen; eben so gehen Kreise sowohl durch die Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, als durch $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, und durch jedes der Punctenpaare B_1 und $\mathfrak{B}_4$, B_2 und $\mathfrak{B}_3$, B_3 und $\mathfrak{B}_2$, B_4 und $\mathfrak{B}_1$. Demnach ist z. B. die Gerade $B_1 \mathfrak{B}_1$ die gemeinschaftliche Sehne zweier Kreise, von denen der eine noch durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$ geht, während der andere die A in $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ schneidet. Wird $B_1 \mathfrak{B}_1$ verlängert, bis sie die A in irgend einem Puncte $\mathfrak{f}$ trifft, so ist $\mathfrak{f} B_1 \mathfrak{B}_1$ die gemeinsame Secante der vorgenannten zwei Kreise, und auch $\mathfrak{f}\mathfrak{d}$ schneidet sowohl den einen als den andern Kreis. Daher ist $\mathfrak{f} B_1 . \mathfrak{f} \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{f}\mathfrak{a} . \mathfrak{f}\mathfrak{d} = \mathfrak{f}\mathfrak{c} . \mathfrak{f}\mathfrak{b}$, woraus unmittelbar folgt, dafs $\mathfrak{f}$ der äufsere Aehnlichkeitspunct der Kreise m, m_1 ist (§. 10. — 12. der angeführten Abhandlung). Wenn andrerseits die Gerade $B_1 \mathfrak{B}_4$ die A im Puncte $\mathfrak{e}$ trift, so ergiebt sich aus ähnlichen Gründen, dafs $\mathfrak{e} B_1 . \mathfrak{e} \mathfrak{B}_4 = \mathfrak{e}\mathfrak{a} . \mathfrak{e}\mathfrak{b} = \mathfrak{e}\mathfrak{c} . \mathfrak{e}\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{e}$ der innere Aehnlichkeitspunct der Kreise m, m_1 ist. Weiter ist klar, dafs die Geraden $B_1 \mathfrak{B}_1$, $B_2 \mathfrak{B}_2$, $B_3 \mathfrak{B}_3$,

$B_4\,\mathfrak{B}_4$ sämmtlich die A in $\mathfrak{f}$ treffen, während die Geraden $B_1\,\mathfrak{B}_4$, $B_2\,\mathfrak{B}_3$, $B_3\,\mathfrak{B}_2$, $B_4\,\mathfrak{B}_1$ sich auf A in $\mathfrak{e}$ begegnen.

Werden von den vier Puncten, in welchen der Kreis P (1.) die Kreise $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_1$ schneidet, zwei solche fixirt, die (nach §. 9. der angeführten Abhandlung) auf einer Geraden mit $\mathfrak{f}$ liegen, so ist das Product ihrer Abstände von $\mathfrak{f}$ constant und gleich der äufsern gemeinschaftlichen Potenz dieser Kreise, oder $= \mathfrak{f}\mathfrak{a}.\mathfrak{f}\mathfrak{d}$; und jede andere Secante aus $\mathfrak{f}$ durch den Kreis P trifft diesen in zwei Puncten von gleicher Beschaffenheit. Es ist aber auch jedes der Producte $\mathfrak{f}B_1.\mathfrak{f}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{f}B_2.\mathfrak{f}\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{f}B_3.\mathfrak{f}\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{f}B_4.\mathfrak{f}\mathfrak{B}_4$ gleich $\mathfrak{f}\mathfrak{a}.\mathfrak{f}\mathfrak{d}$: folglich mufs derselbe Kreis P, der durch die Puncte B_1, B_2, B_3, B_4 geht, auch durch die Puncte $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_4$ gehen, und der in (2.) vorläufig angenommene Kreis P_1 ist identisch mit P. Ferner treffen die vier Geraden B_1B_4, B_2B_3, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4$, $\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$ in einem Puncte p zusammen, welcher auf der gemeinschaftlichen Sehne der Kreise $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_1$ liegt und der Pol von A ist in Bezug auf den Kreis P. Die vollständige Beantwortung der vorgelegten Frage ist also diese:

Die acht Puncte, worin der Mittelpunct des auf alle acht Arten mit der festen Geraden A *perspectivisch gelegten Strahlbüschels* B *sich befindet, liegen sämmtlich in einem Kreise* P, *welcher die über* $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{d}$ *als Durchmesser beschriebenen Kreise* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_1$ *rechtwinklig schneidet; sie sind in demselben so gruppirt, dafs vier mal zwei derselben sowohl mit beiden Mittelpuncten der Kreise* $\mathfrak{m}$, m_1, *als auch mit deren Aehnlichkeitspuncten* $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, *und endlich mit dem Pole* p *von* A *in Bezug auf den Kreis* P *in Geraden liegen.*

Hieraus geht weiter hervor: Wird in irgend einem Kreise P, welcher die beiden Kreise m, m_1 rechtwinklig schneidet, ein beliebiger Punct B_1 als Mittelpunct eines gegebenen und mit A perspectivischen Strahlbüschels B angenommen, und wird ferner A als in fester Lage befindlich angesehen: so sind die Puncte, auf welche, für die sieben aufserdem noch möglichen perspectivischen Lagen beider Gebilde B, A, der Mittelpunct von B fällt, leicht zu finden und als gegeben zu betrachten. Denn zieht man z. B. $\mathfrak{m}B_1$, so schneidet diese Gerade den Kreis zum zweiten Male in B_2; $\mathfrak{m}_1B_1$, $\mathfrak{m}_1B_2$ geben beziehlich B_3, B_4. Die Geraden aus einem der beiden Aehnlichkeitspuncte der Kreise $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_1$ nach den bereits gefundenen Puncten schneiden den Kreis P zum zweiten Male in den noch übrigen vier Puncten $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_4$.

Giebt man nun die Einschränkung auf, dafs die Mittelpuncte von B nur auf der einen Seite der festen Geraden A liegen sollen, so ist von selbst klar (§. 13. II. des Steinerschen Werkes), dafs auf der andern Seite von A sich Alles auf gleiche Weise verhält. Auch hier befinden sich acht Orte des Mittelpunctes von B, die in Bezug auf A mit den ersten acht symmetrisch liegen; und Alles, was von diesen in Rücksicht auf Lage und Construction gesagt wurde, gilt auch von jenen.

4. Besondere Erwähnung verdient noch der specielle Fall, wo von den gegebenen Strahlen in B zwei zugeordnete, etwa a und c, auf einander senkrecht stehen und also (§. 8. a. a. O.) die Winkel zwischen den zwei übrigen (b, c) hälften. Man erhält jetzt für jede zwei von den obigen acht Rangordnungen, bei welchen die rechtwinkligen Strahlen a, c beziehlich durch eben dieselben Puncte in A gehen, nur einen Punct als Ort des Mittelpuncts von B, wenn dieser mit A perspectivisch gelegt wird. Dieses findet viermal Statt, nämlich bei den Rangordnungen

a, c, b, d und a, c, d, b; c, a, b, d und c, a, d, b;
d, b, c, a und b, d, c, a; d, b, a, c und b, d, a, c.

Daher ergeben sich im Ganzen nur vier solcher Puncte, und man kann sagen, es seien in diesem Falle zwei und zwei der ursprünglichen acht Puncte, nämlich B_1 und B_2, B_3 und B_4, $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ und $\mathfrak{B}_4$ zusammengefallen. Beschreibt man wieder (Fig. 2.) die Kreise $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_1$; ferner über ac die Bogen m_1, m_2 der unter sich gleichen Kreise M_1, M_2, welche beziehlich über der Sehne ac die gegebenen Winkel (bd) und $\pi-(bd)$ als Peripherie-Winkel fafsten; und eben so über bd die Bogen μ_1, μ_2 der gleichen Kreise $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ von derselben Eigenschaft: so sind die Puncte β_1, β_2, worin der Kreis $\mathfrak{m}$ die Bogen μ_1, μ_2 schneidet, und die Puncte β_3, β_4, worin der Kreis $\mathfrak{m}_1$ die Bogen m_1, m_2 trifft, die vier Lagen des Mittelpunctes von B für die perspectivische Lage.

Nun gehen aus denselben Gründen, welche in (1.) und (3.) benutzt wurden, die Geraden $\beta_1\beta_2$, $\beta_3\beta_4$ beziehlich durch die Mittelpuncte $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}$; ferner die Geraden $\beta_1\beta_3$, $\beta_2\beta_4$ durch den äufsern Aehnlichkeitspunct $\mathfrak{c}$ der Kreise $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_1$. Die vier Puncte β_1, β_2, β_3, β_4 liegen in einem Kreise P, welcher die Kreise $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_1$, und zwar in eben diesen Puncten, rechtwinklig schneidet. Die gemeinschaftliche Sehne der letzten beiden Kreise wird von den Geraden $\beta_1\beta_2$, $\beta_3\beta_4$ in einem Puncte p geschnitten, welcher der Pol von A in Bezug auf den Kreis P ist. Be-

kanntlich schneiden auch die Kreise $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_1$ einander rechtwinklig; und jeder Kreis durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}$ schneidet beziehlich die Kreise $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}$ unter einem rechten Winkel. Da nun der Kreis $\mathfrak{m}$ in β_1 von beiden Kreisen P, $\mathfrak{M}_1$, und in β_2 von den Kreisen P, $\mathfrak{M}_2$ geschnitten wird, so sind die Geraden $\mathfrak{m}\beta_1$, $\mathfrak{m}\beta_2$ nicht blofs Tangenten an den Kreis P in den genannten Puncten, sondern zugleich beziehlich Tangenten an die Kreise $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$; eben so berühren die Geraden $\mathfrak{m}_1\beta_3$, $\mathfrak{m}_1\beta_4$ in β_3, β_4 sowohl den Kreis P, als auch beziehlich die Kreise M_1, M_2. Folglich sind (§. 43. a. a. O.) die Puncte β_1, β_2, β_3, β_4 vier harmonische Puncte im Kreise P, und dieser wird in denselben Puncten beziehlich von den Kreisen $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, M_1, M_2 berührt.

Demnach sind umgekehrt die vier Puncte, worin irgend ein Kreis P die Kreise $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_1$ rechtwinklig schneidet, die vier Orte des Mittelpuncts irgend eines bestimmten Strahlbüschels B für seine perspectivische Lage mit der als fest angesehenen Geraden A, und von den Strahlen in B stehen zwei harmonisch zugeordnete senkrecht auf einander.

9.

Ueber die 44. Aufgabe im Anhange zum ersten Bande des Steinerschen Werkes: „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit etc."

(Von Herrn *Schaellibaum*, Privatlehrer in Berlin.)

„Wenn in der Ebene ein beliebiges n-Eck gegeben ist: ein andres zu „beschreiben, welches jenem zugleich *ein*- und *um*geschrieben ist."

Der Verfasser des genannten Werkes hat an der bezeichneten Stelle desselben mit der Aufgabe auch einen Wink gegeben, wie sie zu behandeln sein würde. In der That läfst sich auf dem angedeuteten Wege zum Theil mit überraschender Einfachheit darthun, dafs die Aufgabe zwar noch nicht beim Drei- und Vierecke, wohl aber im Allgemeinen bei Vielecken von gröfserer Seitenzahl unter gewissen Umständen, und insbesondere beim Fünfecke, stets möglich ist.

In §. 25. des Steinerschen Werkes wird die Aufgabe gelöst: „Wenn „in einer Ebene zwei beliebige n-Ecke gegeben sind, ein drittes zu be„schreiben, welches dem einen umschrieben und dem andern eingeschrie„ben sei;" und zwar wird dabei folgendes Princip benutzt. Die Seiten des ersten n-Ecks (oder genauer: *die Geraden, welche das* n*-Seit bilden;* vergl. §. 19. a. a. O.) und die Ecken des zweiten werden, jede Gattung für sich, in einer gewissen beliebigen Ordnung auf einander folgend gedacht; man betrachtet sodann jede Ecke des n-Ecks als Projectionspunct zweier nach der festgesetzten Ordnung zunächst auf einander folgender Seiten des n-Seits, nämlich

die erste Ecke als Projectionspunct der 1sten und 2ten Seite,
- zweite - - - - - - 2ten - 3ten -
. . . . . .
die $n$te Ecke als Projectionspunct der $n$ten Seite und einer $(n+1)$ten Geraden,

die man als mit der 1sten Seite vereinigt ansieht. Nun sind nach §. 11. III. a. a. O. diese vereinigten Geraden unter einander projectivisch und es giebt

eben so viele n-Ecke von der verlangten Beschaffenheit, als in den genannten Geraden entsprechende Punctenpaare zusammentreffen.

Um das nämliche Princip auch bei der gegenwärtigen Aufgabe anwenden zu können, mufs man annehmen, es seien zwei n-Ecke auf einander gefallen, oder allgemeiner: das System von Puncten, welches ein n-Eck bestimmt, sei mit n Durchschnitten der Geraden, die ein n-Seit bilden, vereinigt. Die hieraus sich ergebende Bedingung, dafs jede Ecke des n-Ecks nur auf solche zwei Seiten als Projectionspunct darf bezogen werden, in welchen sie selbst nicht liegt, verringert (in Vergleich mit der im allgemeinen Falle des §. 25. a. a. O. sich darbietenden Mannigfaltigkeit) die Anzahl der Combinationen, nach welchen die Ecken und Seiten auf einander folgen und bezogen werden dürfen, und damit auch die Menge der möglichen Auflösungen; vermöge derselben Bedingung wird das Dreieck vorweg von der Betrachtung gänzlich ausgeschlossen und es ist beim Viereck nur gestattet, jede Ecke auf zwei Seiten, nämlich auf die gegenüberstehenden (also im Vierecke $ABCD$ (Fig. 3.) etwa die Ecke A nur auf die Seiten BC und CD) als Projectionspunct zu beziehen.

Im Folgenden soll die Ordnung, in welcher die Seiten eines n-Ecks nach einander paarweise den Ecken desselben als Projectionspuncten zugeordnet sind, mit Zahlen angedeutet und im Texte selbst soll z. B. die zweite Seite mit (2) bezeichnet werden. Die erste Seite ist demnach in der Figur mit 1 und $n+1$, im Texte durch (1) und $(n+1)$ anzugeben. Ferner werden die Ecken nach den Seiten benannt, deren Projectionspuncte sie sind, und in Bezug auf die Rangordnung derselben bedeutet (1, 2) die erste, ... $(n, n+1)$ die $n$te Ecke.

Sind nun bei irgend einem beliebigen n-Ecke die Seiten und Ecken dem zu Grunde liegenden Princip und der ausgesprochenen Bedingung gemäfs geordnet, so ist zunächst zu entscheiden, ob die Geraden (1) und $(n+1)$ *gleich-* oder *ungleich-liegend* sind (nach dem in §. 16. a. a. O. aufgestellten Sprachgebrauche). Die Art, wie dies bewerkstelligt werden kann, beruht auf §. 25. a. a. O. und läfst sich, wie man leicht sieht, unbeschadet der Allgemeinheit an einer bestimmten Figur, wie etwa an dem Siebenecke $ABC...G$ (Fig. 4.) zeigen. Die Bedeutung der Zahlen, die den Ecken und Seiten beigeschrieben sind, ist bereits festgesetzt. Man ziehe aus der Ecke (1, 2) einen Projectionsstrahl a_1, der die zugehörigen Seiten (1) und (2) in entsprechenden Puncten a_1, a_2 trifft. Damit sind

zugleich die entsprechenden Strahlen a_2, a_3, ... a_7 aus den übrigen Ecken (2, 3), (3, 4), ... (7, 8) bestimmt. Der Punct a_2 nämlich auf (2) bestimmt den Strahl a_2 aus (2, 3), welcher die (3) in a_3 schneidet, u. s. w.; und durch a_7 endlich auf (7.) ist der Strahl a_7 aus (7, 8) gegeben, welcher der (8) in a_8 begegnet. Denkt man sich nun den Strahl a_1 um (1, 2) gedreht, wobei er in jedem Augenblicke durch entsprechende Puncte von (1) und (2) geht, so kommen die Puncte a_1, a_2 in die Lage jedes beliebigen andern Punctenpaares b_1 und b_2, c_1 und c_2, u. s. w., oder sie rücken auf den Geraden (1) und (2) in irgend einer Richtung fort. Aber gleichzeitig mit a_1 müssen sich auch alle übrigen Strahlen a_2, a_3, ... a_7 um die entsprechendeu Puncte (2, 3), (3, 4), ... (7, 8) drehen, und es findet sonach in den sämmtlichen Seiten der Figur, mit Einschlufs der Geraden (8), ein Fortrücken der entsprechenden Puncte Statt. Die Richtung, nach welcher dies in jeder der Geraden (1), (2), ... (8) geschieht, mag die *projectivische* Richtung derselben heifsen. Ist sie in (1) festgesetzt (nach rechts oder links), so sind nach dem Vorigen unmittelbar auch die projectivischen Richtungen der übrigen Geraden gegeben und auf die angegebene Weise zu finden. (In Fig. 4. sind sie durch Pfeile, die auf den Seiten liegen, angedeutet.) Die Geraden (1) und $(n+1)$ sind dann offenbar *gleich-* oder *ungleich*-liegend, je nachdem sich durch diese Operation für dieselben gleiche oder entgegengesetzte projectivische Richtungen ergeben.

Es lassen sich aber die genannten Richtungen der n-Ecksseiten im Allgemeinen bequemer auffinden und verfolgen, wenn man die Umfangsrichtung zu Hülfe nimmt. Man denke sich nämlich den ganzen Umfang eines n-Eckes von einem Puncte durchlaufen; was in zwei, aber entgegengesetzten Richtungen möglich ist, da der bewegliche Punct, von A (Fig. 2.) ausgehend, entweder über B, C, D, ..., oder über G, F, E, ... nach A zurückkehren kann. Von diesen Richtungen kann nun eine, gleichviel welche, in den Seiten des n-Ecks als *Umfangsrichtung* festgehalten werden. (Sie ist in Fig. 4. durch Pfeile neben den Seiten bezeichnet.) Sei dieselbe in einem gegebenen n-Eck fixirt, so wird man der Reihe nach in je zwei Seiten, welche einen und denselben Projectionspunct haben, aus der Lage des letzteren sogleich ersehen, wie sich die projectivischen Richtungen dieser Seiten zu der Umfangsrichtung verhalten müssen; wobei es natürlich ist, in (1) die beiden Richtungen als gleich anzunehmen. Denn es seien in Fig. 5. die Geraden (m) und $(m+1)$ irgend zwei, nach der ge-

wählten Ordnung zunächst auf einander folgende Seiten eines n-Ecks, und zwar seien sie nach beiden Seiten in's Unbestimmte verlängert, so dafs sie sich irgendwo schneiden müssen, auch wenn sie in der Figur selbst nicht zusammenstofsen. Die Umfangsrichtung ist durch Pfeile angedeutet, und die vier von den zwei Seiten eingeschlossenen, paarweise gleichen Winkel (Winkelräume) sind mit V, V_1 und W, W_1 bezeichnet. In den Winkeln V, V_1 ist die Umfangsrichtung in dem einen Schenkel gegen den Scheitel gewendet und entfernt sich von diesem im andern Schenkel; die Schenkel sind also in Bezug auf jene Richtung als *ungleichartig* anzusehen. Dagegen sind sie in den Winkeln W, W_1 in gleicher Rücksicht *gleichartig*, d. h. die Umfangsrichtung geht in beiden Schenkeln nach dem Scheitel hin, oder von diesem weg. Nimmt man nun die projectivische Richtung von (m) als bereits gefunden an, so hängt diejenige von $(m+1)$ offenbar von der Lage der den beiden Seiten als Projectionspunct zugehörigen Ecke ab; diese aber mufs in einem der vier oben genannten Winkelräume liegen. Befindet sie sich in V oder V_1, so werden die projectivischen Richtungen von (m) und $(m+1)$ sich gleich verhalten zur Umfangsrichtung, d. h. beide werden dieser gleich oder entgegengesetzt sein. Liegt dagegen die Ecke in W oder W_1, so ist, je nachdem die projectivische Richtung von (m) gleich oder entgegengesetzt ist der Umfangsrichtung, diejenige von $(m+1)$ der letzteren Richtung beziehlich entgegengesetzt oder gleich.

Gesetzt, auf diese Weise seien die projectivischen Richtungen aller Geraden (1), (2), ... $(n+1)$ aufgefunden, so ist klar, dafs, wenn (1) und $(n+1)$ ungleichliegend sein sollen, die projectivischen Richtungen irgend welcher Seiten, und allerwenigstens die der Geraden $(n+1)$, der Umfangsrichtung entgegengesetzt sein, dafs also irgend eine Zahl von Ecken in Winkelräumen W, W_1 ihrer zugehörigen Seitenpaare liegen müssen; zugleich aber zeigt Fig. 4., dafs wenn auch Letzteres wirklich Statt findet, dennoch die Geraden (1) und $(n+1)$ gleichliegend sein können. Es ergiebt sich nun leicht, dafs für die Lage der genannten Geraden die Zahl der in Winkelräumen W, W_1 liegenden Ecken entscheidend ist, und dafs es, nachdem man die Umfangsrichtung fixirt hat, nicht mehr nöthig ist, die projectivischen Richtungen der nach der angenommenen Reihenfolge zwischen (1) und $(n+1)$ liegenden Geraden wirklich zu bestimmen, sondern dafs es hinreicht, die Lage der sämmtlichen Ecken zu den ihnen zugeordneten Seitenpaaren zu beobachten. Es ergiebt sich nämlich aus dem Obigen Folgendes.

1) Ist ein n-Eck so beschaffen, dafs seine sämmtlichen Ecken in Bezug auf die Seitenpaare, deren Projectionspuncte sie sind, in solchen Winkelräumen liegen, die in Fig. 5. mit V, V_1 bezeichnet worden sind, so sind offenbar die projectivischen Richtungen der Geraden (1), (2), ... $(n+1)$ sämmtlich der Umfangsrichtung gleich, und folglich die Geraden (1) und $(n+1)$ *gleichliegend.* ***Dieses findet nun namentlich bei allen convexen Vielecken Statt, in welcher Ordnung auch die Seiten und Ecken auf einander folgen und bezogen werden mögen.*** (Vergl. Fig. 6., wo die Pfeile in den Seiten beiderlei Richtung angeben, während sie in Fig. 7. α. und β., und in Fig. 8. nur die projectivischen Richtungen bezeichnen.)

2) Liegt in einem n-Ecke für irgend eine Ordnung und Beziehung der Seiten und Ecken nur *eine* Ecke in einem Winkelraume W oder W_1 der zugehörigen Seiten, so sind die Geraden (1) und $(n+1)$ *ungleichliegend.* Denn es sei diese Ecke etwa (4, 5), so sind die projectivischen Richtungen, einerseits der Seiten (1), ... (4), anderseits der Seiten (5), ... $(n+1)$ der Umfangsrichtung beziehlich gleich und entgegengesetzt. Vergl. das Fünfeck mit einem einspringenden Winkel in Fig. 7. α., wo nur die Ecke (3, 4) im Winkelraume W der Seiten (3) und (4) liegt, während die vorhergehenden und folgenden Ecken in Winkelräumen V, V_1 ihrer zugehörigen Seitenpaare sich befinden, also die projectivischen Richtungen von (1), (2), (3) gleich, dagegen diejenigen von (4), (5), (6) der Umfangsrichtung entgegengesetzt sind.

3) Liegen nur *zwei* Ecken eines n-Ecks in Winkelräumen W, W_1 der zugehörigen Seiten, so sind die Geraden (1) und $(n+1)$ *gleichliegend.* Denn es seien diese Ecken etwa (4, 5) und (7, 8), so sind die projectivischen Richtungen von (1), ... (4) *und* von (8), ... $(n+1)$ gleich, und nur diejenigen von (5), (6), (7) entgegengesetzt der Umfangsrichtung. Vergl. das Fünfeck in Fig. 8., ebenfalls mit einem einspringenden Winkel, wo (1, 2) und (3, 4) die genannten Ecken sind.

4) Man darf nun offenbar allgemein behaupten: ***In irgend einem*** n***-Ecke sind für eine gewählte Ordnung der Seiten und Ecken die Geraden*** (1) *und* $(n+1)$ *gleich- oder ungleichliegend, je nachdem beziehlich eine gerade oder ungerade Anzahl von Ecken desselben in Winkelräumen* W, W_1 *der zugehörigen Seitenpaare liegen.* Vergl. Fig. 4., wo die Ecken (1, 2), (5, 6), (6, 7), (7, 8) die genannte Lage haben und (1) und $(n+1)$ gleichliegend sind.

Das Fünfeck in Fig. 7. *α.* giebt Gelegenheit zu bemerken, wie nicht blofs die Gestalt des n-Ecks, sondern auch die Reihenfolge und Zuordnung der Seiten und Ecken auf die Lage der Geraden (1) und $(n+1)$ Einfluſs hat. Denn ordnet man die Seiten und Ecken desselben Fünfecks so, wie es in Fig. 7. β. geschehen ist, so liegen die Ecken (2, 3) und (3, 4) in Winkelräumen W, W_1 der zugehörigen Seiten, und die Geraden (1) und (6) sind gleichliegend. Man wird sich übrigens leicht überzeugen, daſs bei jedem einspringenden Winkel eines n-Ecks, und so oft zwei unverlängerte Seiten desselben sich schneiden, eine oder mehrere seiner Ecken die genannte Lage haben.

Sind nunmehr auf die angegebene Weise bei irgend einem gegebenen n-Ecke und für eine bestimmte Ordnung seiner Seiten und Ecken die Geraden (1) und $(n+1)$ als *gleichliegend* nachgewiesen, so ist damit über die Möglichkeit, der Aufgabe zu genügen, noch nichts entschieden, da in diesem Falle nach §. 16. a. a. O. unter gewissen Bedingungen zwei entsprechende Punctenpaare, oder nur eines, oder auch gar keines in jenen Geraden vereinigt sein können. Es muſs daher, so lange nähere Bestimmungen fehlen, das Weitere nach Anleitung des §. 17. a. a. O. dem Versuche anheimgestellt bleiben. Sind dagegen die Geraden (1) und $(n+1)$ *ungleichliegend,* also jedenfalls zwei entsprechende Punctenpaare in denselben vereinigt (§. 16. a. a. O.), *so giebt es zwei* n*-Ecke, welche der Aufgabe genügen.*

Aus dem Bisherigen erhellt also wenigstens so viel, daſs *unter gewissen, leicht erkennbaren Umständen die vorliegende Aufgabe in der That möglich ist, und zwar bei Vielecken, deren Seitenzahl gröſser ist als vier.* Daſs sie beim Vierecke noch unmöglich ist, hat Herr Prof. *Möbius* im 3. Bd. p. 276 dieses Journals dargethan; eben dasselbe folgt unmittelbar aus der Lage und Beschaffenheit der projectivischen Geraden (1) und (5).

Wendet man vorerst die obige Betrachtungsweise auf das Viereck an, so findet sich, daſs für jede Gestalt desselben die Geraden (1) und (5) gleichliegend sind. Die zu ihrer projectivischen Bestimmtheit nöthigen drei Paare entsprechender Puncte kann man bequem auf folgende Art herstellen. Im convexen Vierecke Fig. 9. ist (4) ein Projectionsstrahl aus (1, 2), der die Geraden (1) und (2) in den entsprechenden Puncten a_1, a_2 trifft; (4) ist aber zugleich ein Projectionsstrahl aus (2, 3), und daher ist (1, 2), als Punct in (3), a_3; ferner ist die Diagonale aus (1, 2) nach (3, 4)

ein Projectionsstrahl von (3, 4), und (1, 2) heifst somit, als Punct auf (4), zugleich a_4; die (3) endlich, als Projectionsstrahl aus (4, 5), schneidet die (5) in a_5. Ganz auf dieselbe Weise kann man zeigen, dafs, wenn (3, 4) in Bezug auf (1) b_1 heifst, sodann (2, 3) der entsprechende Punct b_5 in (5) ist, und dafs, wenn man c_1 auf a_5 liegend annimmt, der entsprechende Punct c_5 mit b_1 vereinigt ist. Die Aufeinanderfolge der Puncte a_1, b_1, c_1 und a_5, b_5, c_5 bestätigt das obige Resultat in Betreff der Lage von (1) und (5). Es entspricht sonach der Strecke $a_1 b_1$ in (1) die Strecke in (5) von a_5 rechtshin bis zum unendlich entfernten Puncte dieser Geraden, und von da zurück bis nach b_5; der Strecke $b_1 c_1$ in (1) entspricht in (5) $b_5 c_5$; alle übrigen Puncte in (1), von c_1 rechtshin bis zu ihrem unendlich entfernten Puncte und von da zurück bis a_1, haben ihre entsprechenden in (5) auf der Strecke $c_5 a_5$. Also können keine entsprechenden Punctenpaare von (1) und (5) zusammentreffen, und es giebt kein Viereck, welches der Aufgabe Genüge leistete. Wörtlich dasselbe Verfahren giebt in jedem beliebig gestalteten Vierecke die drei entsprechenden Punctenpaare auf (1) und (5) in derselben gegenseitigen Lage und Folge, und der weitere Beweis bleibt, bis auf Vertauschung der Buchstaben, der gleiche. Daher hat man den Satz: *Keinem Vierecke kann ein andres Viereck zugleich ein- und umgeschrieben werden.*

Eine besondere Eigenschaft besitzt das Fünfeck, wenn seine Seiten und Ecken so geordnet und auf einander bezogen werden, wie es in Fig. 7. β. bereits geschehen ist; wobei nämlich in Bezug auf die Rangordnung der Ecken, als Projectionspuncte der Seiten, je zwei aufeinanderfolgende in einer Diagonale des Fünfecks liegen. Es sei Fig. 10. ein Fünfeck von beliebiger Gestalt; die Ordnung und Beziehung der Seiten und Ecken ist die angegebene. Um die drei entsprechenden Punctenpaare in (1) und (6) zu finden, kann man ähnlich, wie vorhin beim Vierecke verfahren. Die Seite (5), als Projectionsstrahl aus (1, 2), treffe die Seite (1) in a_1, so ist alsdann (3, 4) der entsprechende Punct a_2 in (2). Die Diagonale aus (2, 3) nach (3, 4) ist ein Projectionsstrahl aus (2, 3) und trifft die (3) in a_3; da aber dieselbe Diagonale auch ein Projectionsstrahl aus (3, 4) ist, so heifst (2, 3), als Punct auf (4), a_4. Ferner ist (1) ein Projectionsstrahl aus (4, 5) und schneidet die (5) in a_5; endlich die Gerade aus a_5 nach (5, 6) ist ein Projectionsstrahl aus dieser Ecke und begegnet der (6) in a_6, welcher Punct mit a_1 auf (1) vereinigt ist. Eben so findet man,

dafs der Punct (4, 5) zugleich b_1 und b_6, ferner (2, 3) zugleich c_1 und c_6 ist. *Sonach sind für diese Ordnung und Beziehung der Seiten und Ecken in jedem beliebigen Fünfecke die Geraden* (1) *und* (6) *gleichliegend, projectivisch gleich und mit allen entsprechenden Punctenpaaren aufeinander gefallen. Damit ist zugleich ausgesprochen, dafs es in diesem Falle unendlich viele Lösungen der Aufgabe giebt, indem man jeden beliebigen Punct in* (1) *als erste Ecke eines Fünfeckes annehmen darf, dessen Seiten und Ecken in der angewiesenen Ordnung beziehlich durch die Ecken des gegebenen Fünfecks gehen und in den Seiten desselben liegen.* Vergl. Fig. 9., wo a_1 (a_6) ein beliebiger Punct in der Seite (1) des überschlagenen Fünfeckes, das durch stärkere Zeichnung kenntlich gemacht ist, sein soll; Seiten und Ecken sind wie in Fig. 8. geordnet. Das Fünfeck $a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, (a_6)$ ist jenem zugleich ein- und umgeschrieben.

10.

Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale.

(Von Herrn Dr. *Gudermann* zu Münster.)

(Fortsetzung der Abhandlung No. 1. im 1sten Hefte dieses Bandes.)

Dritter Abschnitt.

§. 32.

Die Modular-Functionen von $\frac{iK'}{2}$ und $\frac{K \pm iK'}{2}$.

Wenn man in den Formeln des §. 14., welche wir hier wiederholen:

$$1.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}\frac{K}{2} = \sqrt{\frac{1}{1+k'}}, & \operatorname{tn}\frac{K}{2} = \sqrt{\frac{1}{k'}}, \\ \operatorname{cn}\frac{K}{2} = \sqrt{\frac{k'}{1+k'}}, & \operatorname{dn}\frac{K}{2} = \sqrt{k'}, \end{cases}$$

die beiden conjugirten Modul, und also auch die ihnen zugehörigen Modular-Quadranten mit einander vertauscht, so erhält man

$$\operatorname{sn}'\frac{K'}{2} = \sqrt{\frac{1}{1+k}}, \qquad \operatorname{tn}'\frac{K'}{2} = \sqrt{\frac{1}{k}},$$
$$\operatorname{cn}'\frac{K'}{2} = \sqrt{\frac{k}{1+k}}, \qquad \operatorname{dn}'\frac{K'}{2} = \sqrt{k},$$

und hieraus lassen sich die Werthe der Functionen des Arguments $\frac{iK'}{2}$ leicht herleiten. Es ist zunächst $\operatorname{sn}\frac{iK'}{2} = i\operatorname{tn}'\frac{K'}{2}$, $\operatorname{cn}\frac{iK'}{2} = \frac{1}{\operatorname{cn}'\frac{K'}{2}}$, $\operatorname{tn}\frac{iK'}{2} = i\operatorname{sn}'\frac{K'}{2}$ und $\operatorname{dn}\frac{iK'}{2} = \frac{\operatorname{dn}'\frac{K'}{2}}{\operatorname{cn}'\frac{K'}{2}}$; werden hierin die vorhin angegebenen Werthe substituirt, so erhält man die folgenden Bestimmungen:

$$2.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}\frac{iK'}{2} = i\sqrt{\frac{1}{k}}, & \operatorname{cn}\frac{iK'}{2} = \sqrt{\frac{1+k}{k}}, \\ \operatorname{tn}\frac{iK'}{2} = i.\sqrt{\frac{1}{1+k}}, & \operatorname{dn}\frac{iK'}{2} = \sqrt{(1+k)}. \end{cases}$$

Die Functionen des Argumentes $\frac{K \pm iK'}{2}$ werden am bequemsten berechnet nach den Formeln (1.)—(5.) des §. 28., indem man $a = \frac{K}{2}$ und $b = \frac{K'}{2}$ setzt.

Dann ist $1-\mathrm{dn}^2 a.\mathrm{sn}'^2 b = 1-k'.\frac{1}{1+k} = 1-\sqrt{\frac{1-k^2}{(1+k)^2}} = 1-\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}$
$= \frac{\sqrt{(1+k)}-\sqrt{(1-k)}}{\sqrt{(1+k)}} = \sqrt{\frac{2(1-k')}{1+k}}$. Ferner ist $\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}'b = \sqrt{\frac{1}{1+k'}}.\sqrt{k}$
$= \sqrt{\frac{k}{1+k'}}$, also ist

$$\frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}'b}{1-\mathrm{dn}^2 a\,\mathrm{sn}'^2 b} = \sqrt{\left(\frac{1+k}{2(1-k')}.\frac{k}{1+k'}\right)} = \sqrt{\frac{1+k}{2k}};$$

$$\mathrm{sn}'b\,\mathrm{cn}'b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a = \frac{\sqrt{k}}{1+k}.\frac{k'}{\sqrt{(1+k')}},$$

also

$$\frac{\mathrm{sn}'b\,\mathrm{cn}'b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{1-\mathrm{dn}^2 a\,\mathrm{sn}'^2 b} = \sqrt{\left(\frac{k.k'^2}{(1+k)^2(1+k')}.\frac{1+k}{2(1-k')}\right)} = \sqrt{\frac{1-k}{2k}};$$

folglich ist

$$3.\quad \begin{cases} \mathrm{sn}\left(\frac{K}{2}+\frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+k}{2k}} + i\sqrt{\frac{1-k}{2k}}, \\ \mathrm{sn}\left(\frac{K}{2}-\frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+k}{2k}} - i\sqrt{\frac{1-k}{2k}}. \end{cases}$$

Erhebt man diese Ausdrücke zum Quadrate, so erhält man:

$$\mathrm{sn}\left(\frac{K}{2}\pm\frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{\left(1\pm\frac{ik'}{k}\right)}.$$

Es ist $\mathrm{cn}\,a.\mathrm{cn}'b = \sqrt{\frac{kk'}{(1+k)(1+k')}}$, also $\frac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}'b}{1-\mathrm{dn}^2 a\,\mathrm{sn}'^2 b} = \sqrt{\frac{k'}{2k}}$;

ferner ist $\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}'b\,\mathrm{dn}'b = \sqrt{\left(\frac{k'}{1+k'}.\frac{k}{1+k}\right)}$, also $\frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}'b\,\mathrm{dn}'b}{1-\mathrm{dn}^2 a\,\mathrm{sn}'^2 b} =$
$\sqrt{\frac{k'}{2k}}$, daher ist

$$4.\quad \begin{cases} \mathrm{cn}\left(\frac{K}{2}+\frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{\frac{k'}{2k}} - i\sqrt{\frac{k'}{2k}} = (1-i).\sqrt{\frac{k'}{2k}}, \\ \mathrm{cn}\left(\frac{K}{2}-\frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{\frac{k'}{2k}} + i\sqrt{\frac{k'}{2k}} = (1+i).\sqrt{\frac{k'}{2k}}. \end{cases}$$

Da $(1\pm i)^2 = 1\pm 2i-1 = \pm 2i$, also $1\pm i = \sqrt{(\pm 2i)}$ ist, so können die beiden vorigen Formeln auch also geschrieben werden:

$$\mathrm{cn}\left(\frac{K}{2}\pm\frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{\left(\mp\frac{ik'}{k}\right)}.$$

Es ist $i\left(\frac{K'}{2}-\frac{iK}{2}\right) = \frac{K}{2}+\frac{iK'}{2}$, also ist $\mathrm{tn}\left(\frac{K}{2}+\frac{iK'}{2}\right) = i\,\mathrm{sn}'\left(\frac{K'}{2}-\frac{iK}{2}\right)$,

und da $\mathrm{sn}'\left(\frac{K'}{2}-\frac{iK}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+k'}{2k'}} - i\sqrt{\frac{1-k'}{2k'}}$ ist, so erhält man

$$5.\quad \begin{cases} \mathrm{tn}\left(\frac{K}{2}+\frac{iK}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-k'}{2k'}} + i\sqrt{\frac{1+k'}{2k'}}, \text{ und} \\ \mathrm{tn}\left(\frac{K}{2}-\frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-k'}{2k'}} - i\sqrt{\frac{1+k'}{2k'}}. \end{cases}$$

Erhebt man diese Ausdrücke zum Quadrate, so erhält man:

$$\operatorname{tn}\left(\frac{K}{2} \pm \frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{\left(-1 \pm \frac{ik}{k'}\right)}.$$

Für die cyklischen Differenten erhält man die Formeln

$$6. \quad \begin{cases} \operatorname{dn}\left(\frac{K}{2} + \frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{\frac{k'(1+k')}{2}} - i\sqrt{\frac{k'(1-k')}{2}}, \\ \operatorname{dn}\left(\frac{K}{2} - \frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{\frac{k'(1+k')}{2}} + i\sqrt{\frac{k'(1-k')}{2}}, \end{cases}$$

und erhebt man sie zum Quadrate, so erhält man

$$\operatorname{dn}\left(\frac{K}{2} \pm \frac{iK'}{2}\right) = k'\sqrt{\left(1 \mp \frac{ik}{k'}\right)}.$$

Endlich findet man:

$$7. \quad \begin{cases} \operatorname{am}\left(\frac{K}{2} + \frac{iK'}{2}\right) = \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt[4]{\frac{1+k}{1-k}}\right) + i\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\sqrt[4]{\frac{1-k}{1+k}}\right), \\ \operatorname{am}\left(\frac{K}{2} - \frac{iK'}{2}\right) = \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt[4]{\frac{1+k}{1-k}}\right) - i\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\sqrt[4]{\frac{1-k}{1+k}}\right), \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln (6.) des §. 28. jetzt $u = \frac{K}{2}$, so erhält man

$$8. \quad \begin{cases} \operatorname{sn}\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \sqrt{\frac{1}{1-k'}}, \\ \operatorname{cn}\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \mp i\sqrt{\frac{k'}{1-k'}}, \\ \operatorname{tn}\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \pm i\sqrt{\frac{1}{k'}}, \\ \operatorname{dn}\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \mp i\sqrt{k'}, \\ \operatorname{am}\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \frac{\pi}{2} \pm i\,\mathfrak{Arc\,Tang}\,(\sqrt{k'}). \end{cases}$$

Setzt man endlich in den Formeln (2.) des §. 27. $u = \frac{K'}{2}$, so entstehen

$$9. \quad \begin{cases} \operatorname{sn}\left(K \mp \frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{k}}, & \operatorname{tn}\left(K \mp \frac{iK'}{2}\right) = \mp i\sqrt{\frac{1}{1-k}}, \\ \operatorname{cn}\left(K \mp \frac{iK'}{2}\right) = \pm i\sqrt{\frac{1-k}{k}}, & \operatorname{dn}\left(K \mp \frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{(1-k)}. \end{cases}$$

§. 32. *a.*

Von der Verdoppelung und Halbirung des Arguments der cyklischen Modular-Functionen.

Setzt man in den Formeln für die cyklischen Functionen eines Binoms $a+b$ jetzt $b = a$, so hat man

$$1.\quad \begin{cases} \operatorname{sn} 2a = \dfrac{2\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{1-k^2\operatorname{sn}^4 a} = \dfrac{2\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{cn}^2 a + \operatorname{sn}^2 a \operatorname{dn}^2 a}, \\ \operatorname{cn} 2a = \dfrac{\operatorname{cn}^2 a - \operatorname{sn}^2 a \operatorname{dn}^2 a}{1-k^2\operatorname{sn}^4 a} = \dfrac{1-2\operatorname{sn}^2 a + k^2\operatorname{sn}^4 a}{1-k^2\operatorname{sn}^4 a}, \\ \operatorname{tn} 2a = \dfrac{2\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a}{1-\operatorname{tn}^2 a \operatorname{dn}^2 a}, \\ \operatorname{dn} 2a = \dfrac{\operatorname{dn}^2 a - k^2\operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 a}{1-k^2\operatorname{sn}^4 a} = \dfrac{1-2k^2\operatorname{sn}^2 a + k^2\operatorname{sn}^4 a}{1-k^2\operatorname{sn}^4 a}. \end{cases}$$

Aus diesen Formeln setzen wir zusammen die folgenden Ausdrücke:

$$2.\quad \begin{cases} 1+\operatorname{sn} 2a = \dfrac{(\operatorname{cn} a + \operatorname{sn} a \operatorname{dn} a)^2}{\operatorname{cn}^2 a + \operatorname{sn}^2 a \operatorname{dn}^2 a}, \\ 1-\operatorname{sn} 2a = \dfrac{(\operatorname{cn} a - \operatorname{sn} a \operatorname{dn} a)^2}{\operatorname{cn}^2 a + \operatorname{sn}^2 a \operatorname{dn}^2 a}, \\ 1+\operatorname{cn} 2a = \dfrac{2\operatorname{cn}^2 a}{1-k^2\operatorname{sn}^4 a}, \\ 1-\operatorname{cn} 2a = \dfrac{2\operatorname{sn}^2 a \operatorname{dn}^2 a}{1-k^2\operatorname{sn}^4 a}, \\ 1+\operatorname{dn} 2a = \dfrac{2\operatorname{dn}^2 a}{1-k^2\operatorname{sn}^4 a}, \\ 1-\operatorname{dn} 2a = \dfrac{2k^2\operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 a}{1-k^2\operatorname{sn}^4 a}, \\ \operatorname{dn} 2a + \operatorname{cn} 2a = \dfrac{2\operatorname{cn}^2 a \operatorname{dn}^2 a}{1-k^2\operatorname{sn}^4 a}, \\ \operatorname{dn} 2a - \operatorname{cn} 2a = \dfrac{2k'^2\operatorname{sn}^2 a}{1-k^2\operatorname{sn}^4 a}, \\ 1+k\operatorname{sn} 2a = \dfrac{(\operatorname{dn} a + k\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a)^2}{\operatorname{dn}^2 a + k^2\operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 a}, \\ 1-k\operatorname{sn} 2a = \dfrac{(\operatorname{dn} a - k\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a)^2}{\operatorname{dn}^2 a + k^2\operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 a}, \\ \operatorname{dn} 2a - k'\operatorname{sn} 2a = \dfrac{(\operatorname{dn} a + (1-k')\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a)(\operatorname{dn} a - (1+k')\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a)}{1-k^2\operatorname{sn}^4 a}, \\ \operatorname{dn} 2a + k'\operatorname{sn} 2a = \dfrac{(\operatorname{dn} a - (1-k')\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a)(\operatorname{dn} a + (1+k')\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a)}{1-k^2\operatorname{sn}^4 a}, \\ \operatorname{dn} 2a + k' = \dfrac{(1+k')(1-(1-k')\operatorname{sn}^2 a)^2}{1-k^2\operatorname{sn}^4 a}, \\ \operatorname{dn} 2a - k' = \dfrac{(1-k')(1-(1+k')\operatorname{sn}^2 a)^2}{1-k^2\operatorname{sn}^4 a}, \end{cases}$$

$$2.\quad \begin{cases} \operatorname{dn} 2a + k \operatorname{cn} 2a = \dfrac{(1+k)(1-k\operatorname{sn}^2 a)^2}{1-k^2\operatorname{sn}^4 a}, \\ \operatorname{dn} 2a - k \operatorname{cn} 2a = \dfrac{(1-k)(1+k\operatorname{sn}^2 a)^2}{1-k^2\operatorname{sn}^4 a}, \\ \text{oder} \\ \operatorname{dn} 2a + k \operatorname{cn} 2a = (1+k).\dfrac{1-k\operatorname{sn}^2 a}{1+k\operatorname{sn}^2 a}, \\ \operatorname{dn} 2a - k \operatorname{cn} 2a = (1-k).\dfrac{1+k\operatorname{sn}^2 a}{1-k\operatorname{sn}^2 a}. \end{cases}$$

Man könnte die Reihe dieser Formeln leicht noch vermehren; die vorstehenden sind aber die wichtigeren, und aus ihnen leiten wir her:

$$3.\quad \begin{cases} \operatorname{sn} a = \sqrt{\dfrac{1-\operatorname{cn} 2a}{1+\operatorname{dn} 2a}}, & \operatorname{snc} a = \sqrt{\dfrac{1+\operatorname{cn} 2a}{1+\operatorname{dn} 2a}}, \\ k\operatorname{sn} a = \sqrt{\dfrac{1-\operatorname{dn} 2a}{1+\operatorname{cn} 2a}}, & k\operatorname{snc} a = \sqrt{\dfrac{1-\operatorname{dn} 2a}{1-\operatorname{cn} 2a}}, \\ \operatorname{cn} a = \sqrt{\dfrac{\operatorname{dn} 2a + \operatorname{cn} 2a}{1+\operatorname{dn} 2a}}, \text{ also} & \operatorname{cnc} a = \sqrt{\dfrac{\operatorname{dn} 2a - \operatorname{cn} 2a}{1+\operatorname{dn} 2a}}, \\ \operatorname{tn} a = \sqrt{\dfrac{1-\operatorname{cn} 2a}{\operatorname{dn} 2a + \operatorname{cn} 2a}}, & \operatorname{tnc} a = \sqrt{\dfrac{1+\operatorname{cn} 2a}{\operatorname{dn} 2a - \operatorname{cn} 2a}}, \\ \operatorname{dn} a = \sqrt{\dfrac{\operatorname{dn} 2a + \operatorname{cn} 2a}{1+\operatorname{cn} 2a}}, & \operatorname{dnc} a = \sqrt{\dfrac{\operatorname{dn} 2a - \operatorname{cn} 2a}{1-\operatorname{cn} 2a}}. \end{cases}$$

Die vier obersten Formeln lassen sich auch also darstellen:

$$4.\quad \begin{cases} \operatorname{sn} a = \dfrac{\sqrt{(1+\operatorname{sn} 2a)} - \sqrt{(1-\operatorname{sn} 2a)}}{\sqrt{(1+k\operatorname{sn} 2a)} + \sqrt{(1-k\operatorname{sn} 2a)}}, \\ \operatorname{snc} a = \dfrac{\sqrt{(1+\operatorname{sn} 2a)} + \sqrt{(1-\operatorname{sn} 2a)}}{\sqrt{(1+k\operatorname{sn} 2a)} + \sqrt{(1-k\operatorname{sn} 2a)}}, \\ k\operatorname{sn} a = \dfrac{\sqrt{(1+k\operatorname{sn} 2a)} - \sqrt{(1-k\operatorname{sn} 2a)}}{\sqrt{(1+\operatorname{sn} 2a)} + \sqrt{(1-\operatorname{sn} 2a)}}, \\ k\operatorname{snc} a = \dfrac{\sqrt{(1+k\operatorname{sn} 2a)} - \sqrt{(1-k\operatorname{sn} 2a)}}{\sqrt{(1+\operatorname{sn} 2a)} - \sqrt{(1-\operatorname{sn} 2a)}}. \end{cases}$$

§. 33.

Fernere Relationen unter den cyklischen Functionen der Binome $a+b$ und $a-b$ und denen der Theile a und b.

Dem §. 19. gemäfs ist $\mathfrak{Tn}(a+b) = \dfrac{\mathfrak{Tn}a\,\mathfrak{Dn}b + \mathfrak{Tn}b\,\mathfrak{Dn}a}{1+\mathfrak{Tn}a\,\mathfrak{Dn}b\,\mathfrak{Tn}b\,\mathfrak{Dn}a}$; vertauscht man hierin den Modul k mit k', so verwandelt sich $\mathfrak{Tn}(a+b)$ in $\mathfrak{Tn}'(a+b) = \operatorname{sn}(a+b)$; ferner verwandelt sich der Zähler in $\dfrac{\operatorname{sn}a\operatorname{dn}b}{\operatorname{cn}b} + \dfrac{\operatorname{sn}b\operatorname{dn}a}{\operatorname{cn}a}$ oder in $\dfrac{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}b + \operatorname{sn}b\operatorname{cn}b\operatorname{dn}a}{\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b}$, und der Nenner verwandelt sich in

$\frac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b}$, daher haben wir den neuen Ausdruck:

$$1.\quad \begin{cases} \mathrm{sn}(a+b) = \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,b+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}, \\ \mathrm{sn}(a-b) = \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b-\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}. \end{cases}$$

Dividirt man den Zähler und Nenner durch $\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b$, so erhält man

$$2.\quad \begin{cases} \mathrm{sn}(a+b) = \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{snc}\,b}{\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,b+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b}, \\ \mathrm{sn}(a-b) = \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{snc}\,b}{\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,b-\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b}. \end{cases}$$

Setzt man in diesen Formeln $a+iK'$ für a, so verwandelt sich der Zähler

$\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{snc}\,b$ in $\frac{1+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{snc}\,b}{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a}$ und der Nenner

$\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,b+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b$ in $\frac{k\,(\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,b+\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{sn}\,b)}{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a}$,

ferner $\mathrm{sn}(a+b)$ in $\frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,(a+b)}$, daher haben wir noch

$$\mathrm{sn}(a+b) = \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,b+\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{sn}\,b}{1+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{snc}\,b},$$

$$\mathrm{sn}(a-b) = \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,b-\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{sn}\,b}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{snc}\,b}.$$

Schafft man in diesen Ausdrücken die Functionen des Complementes weg, so erhält man

$$\mathrm{sn}(a+b) = \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,b+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b},$$

$$\mathrm{sn}(a-b) = \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b-k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b}.$$

Dieselben Formeln erhält man, wenn man in den Formeln (1.) setzt ka für a, kb für b und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k, und die Sätze des §. 30. anwendet; dieselben Formel kommen aber auch schon im §. 13. vor.

Aus den Formeln (2.) folgt:

$$3.\quad \begin{cases} 1+\mathrm{sn}(a+b) = \frac{(\mathrm{snc}\,b+\mathrm{sn}\,a)(\mathrm{snc}\,a+\mathrm{sn}\,b)}{\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,b+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b} = \frac{(\mathrm{cn}\,b+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b)(\mathrm{cn}\,a+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a)}{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}, \\ 1+\mathrm{sn}(a-b) = \frac{(\mathrm{snc}\,b+\mathrm{sn}\,a)(\mathrm{snc}\,a-\mathrm{sn}\,b)}{\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,b-\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b} = \frac{(\mathrm{cn}\,b+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b)(\mathrm{cn}\,a-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a)}{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b-\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}, \\ 1-\mathrm{sn}(a+b) = \frac{(\mathrm{snc}\,b-\mathrm{sn}\,a)(\mathrm{snc}\,a-\mathrm{sn}\,b)}{\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,b+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b} = \frac{(\mathrm{cn}\,b-\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b)(\mathrm{cn}\,a-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a)}{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}, \\ 1-\mathrm{sn}(a-b) = \frac{(\mathrm{snc}\,b-\mathrm{sn}\,a)(\mathrm{snc}\,a+\mathrm{sn}\,b)}{\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,b-\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b} = \frac{(\mathrm{cn}\,b-\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b)(\mathrm{cn}\,a+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a)}{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b-\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}. \end{cases}$$

Setzt man in diesen Formeln ka für a, kb für b und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k, so verwandeln sie sich dem §. 30. gemäfs in

$$4.\quad \begin{cases} 1+k\,\mathrm{sn}(a+b) = \dfrac{(\mathrm{dn}\,b+k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b)(\mathrm{dn}\,a+k\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a)}{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b}, \\ 1+k\,\mathrm{sn}(a-b) = \dfrac{(\mathrm{dn}\,b+k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b)(\mathrm{dn}\,a-k\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a)}{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b-k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b}, \\ 1-k\,\mathrm{sn}(a+b) = \dfrac{(\mathrm{dn}\,b-k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b)(\mathrm{dn}\,a-k\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a)}{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}, \\ 1-k\,\mathrm{sn}(a-b) = \dfrac{(\mathrm{dn}\,b-k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b)(\mathrm{dn}\,a+k\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a)}{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b-k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}. \end{cases}$$

Setzt man in der zweiten und vierten von den Formeln (3.) $K-a$ für a, so verwandeln sie sich in

$$1+\mathrm{snc}(a+b) = \frac{(\mathrm{snc}\,b+\mathrm{snc}\,a)(\mathrm{sn}\,a-\mathrm{sn}\,b)}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,b-\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{sn}\,b},$$

$$1-\mathrm{snc}(a+b) = \frac{(\mathrm{snc}\,b-\mathrm{snc}\,a)(\mathrm{sn}\,a+\mathrm{sn}\,b)}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,b-\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{sn}\,b},$$

und setzt man nun $k'a$ für a, $k'b$ für b und $\frac{ik}{k'}$ statt des Moduls k, so erhält man nach §. 31. auf der Stelle

$$1+\mathrm{cn}(a+b) = \frac{(\mathrm{cn}\,b+\mathrm{cn}\,a)(\mathrm{cnc}\,a-\mathrm{cnc}\,b)}{\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{cn}\,b-\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cnc}\,b},$$

$$1-\mathrm{cn}(a+b) = \frac{(\mathrm{cn}\,b-\mathrm{cn}\,a)(\mathrm{cnc}\,a+\mathrm{cnc}\,b)}{\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{cn}\,b-\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cnc}\,b}.$$

Es ist aber $\mathrm{cnc}\,a-\mathrm{cnc}\,b = \frac{k'(\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a)}{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}$ und der Nenner

$\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{cn}\,b-\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cnc}\,b = \frac{k'(\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a)}{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}$, daher hat man

$$5.\quad \begin{cases} 1+\mathrm{cn}(a+b) = \dfrac{(\mathrm{cn}\,b+\mathrm{cn}\,a)(\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a)}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}, \\ 1+\mathrm{cn}(a-b) = \dfrac{(\mathrm{cn}\,b+\mathrm{cn}\,a)(\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a)}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}, \\ 1-\mathrm{cn}(a+b) = \dfrac{(\mathrm{cn}\,b-\mathrm{cn}\,a)(\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a)}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}, \\ 1-\mathrm{cn}(a-b) = \dfrac{(\mathrm{cn}\,b-\mathrm{cn}\,a)(\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a)}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}. \end{cases}$$

Der Ausdruck von $\mathrm{cn}(a\pm b)$, woraus die vorstehenden Formeln hergeleitet werden können, ist

$$6.\quad \begin{cases} \mathrm{cn}(a+b) = \dfrac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cnc}\,a-\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{cnc}\,b}{\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{cn}\,b-\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cnc}\,b}, \text{ also} \\ \mathrm{cn}(a-b) = \dfrac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cnc}\,a+\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{cnc}\,b}{\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{cn}\,b+\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cnc}\,b}. \end{cases}$$

Nach §. 30. verwandeln sich diese Formeln in

$$7.\quad \begin{cases} \mathrm{dn}(a+b) = \dfrac{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,a - \mathrm{dn}\,b\,\mathrm{tn}\,b}{\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{tn}\,a - \mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,b}, \\ \mathrm{dn}(a-b) = \dfrac{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,a + \mathrm{dn}\,b\,\mathrm{tn}\,b}{\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{tn}\,a + \mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,b}. \end{cases}$$

Die Formeln (2.), (6.), (7.) und die Formeln für $\mathrm{tn}(a \pm b)$ in §. 11. sind die einfachsten, nach welchen man aus Ausdrücken für die Modular-Functionen zweier reellen Argumente a und b die Ausdrücke für die Modular-Functionen von $a+b$ und $a-b$ zusammensetzen kann.

Aus den Formeln (7.) leiten wir her:

$$8.\quad \begin{cases} 1+\mathrm{dn}(a+b) = \dfrac{(\mathrm{dn}\,b+\mathrm{dn}\,a)(\mathrm{tn}\,a-\mathrm{tn}\,b)}{\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{tn}\,a - \mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,b}, \\ 1+\mathrm{dn}(a-b) = \dfrac{(\mathrm{dn}\,b+\mathrm{dn}\,a)(\mathrm{tn}\,a+\mathrm{tn}\,b)}{\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{tn}\,a + \mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,b}, \\ 1-\mathrm{dn}(a+b) = \dfrac{(\mathrm{dn}\,b-\mathrm{dn}\,a)(\mathrm{tn}\,a+\mathrm{tn}\,b)}{\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{tn}\,a - \mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,b}, \\ 1-\mathrm{dn}(a-b) = \dfrac{(\mathrm{dn}\,b-\mathrm{dn}\,a)(\mathrm{tn}\,a-\mathrm{tn}\,b)}{\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{tn}\,a + \mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,b}. \end{cases}$$

Aus den Formeln (3.) folgt durch Division

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{sn}(a+b)}{1-\mathrm{sn}(a+b)}} = \sqrt{\frac{\mathrm{snc}\,b+\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{snc}\,b-\mathrm{sn}\,a}} \cdot \sqrt{\frac{\mathrm{snc}\,a+\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{snc}\,a-\mathrm{sn}\,b}},$$

und wenn man auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen nimmt, so hat man $\mathfrak{L}\,\mathrm{am}(a \pm b) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{snc}\,b}\right) \pm \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{snc}\,a}\right)$.

Diese Formel ist einerlei mit den Formeln (1.) des §. 23. Aus den Formeln (3.) leiten wir aber auch noch her

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{sn}(a+b)}{1+\mathrm{sn}(a-b)}} = \sqrt{\frac{\mathrm{snc}\,a+\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{snc}\,a-\mathrm{sn}\,b}}\,\sqrt{\frac{\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,b-\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,b+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b}},$$

und also, wenn man wieder auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen nimmt, entweder

$$9.\quad \begin{cases} \log\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{sn}(a+b)}{1+\mathrm{sn}(a-b)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{snc}\,a}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,b}\right) \text{ oder} \\ \log\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{sn}(a+b)}{1+\mathrm{sn}(a-b)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{snc}\,a}{\mathrm{sn}\,b}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,b}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b}\right). \end{cases}$$

Setzt man hierin $-a$ für a und $-b$ für b, so erhält man

$$10.\quad \log\sqrt{\frac{1-\mathrm{sn}(a-b)}{1-\mathrm{sn}(a+b)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{snc}\,a}\right) + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,b}\right).$$

Aus den Formeln (5.) erhält man

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{cn}(a+b)}{1-\mathrm{cn}(a+b)}} = \sqrt{\frac{\mathrm{cn}\,b+\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{cn}\,b-\mathrm{cn}\,a}}\,\sqrt{\frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a}} \quad \text{und}$$

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{cn}(a-b)}{1+\mathrm{cn}(a+b)}} = \sqrt{\frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a}}\sqrt{\frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}},$$

$$\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}(a+b)}{1-\mathrm{cn}(a-b)}} = \sqrt{\frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a}}\sqrt{\frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}}.$$

Nimmt man wieder auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen, so erhält man

$$\text{11.}\quad \begin{cases} \log\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{cn}(a\pm b)}{1-\mathrm{cn}(a\pm b)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{cn}\,b}\right) \mp \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{cnc}\,b}{\mathrm{cnc}\,a}\right), \\ \log\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{cn}(a-b)}{1+\mathrm{cn}(a+b)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{cnc}\,b}{\mathrm{cnc}\,a}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{tn}\,b\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}\right), \\ \log\sqrt{\dfrac{1-\mathrm{cn}(a+b)}{1-\mathrm{cn}(a-b)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{cnc}\,b}{\mathrm{cnc}\,a}\right) + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{tn}\,b\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}\right). \end{cases}$$

Aus den Formeln (8.) folgt zunächst:

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}(a+b)}{1-\mathrm{dn}(a+b)}} = \sqrt{\frac{\mathrm{dn}\,b+\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{dn}\,b-\mathrm{dn}\,a}}\sqrt{\frac{\mathrm{tn}\,a-\mathrm{tn}\,b}{\mathrm{tn}\,a+\mathrm{tn}\,b}},$$

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}(a-b)}{1+\mathrm{dn}(a+b)}} = \sqrt{\frac{\mathrm{tn}\,a+\mathrm{tn}\,b}{\mathrm{tn}\,a-\mathrm{tn}\,b}}\sqrt{\frac{\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{tn}\,a-\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,b}{\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{tn}\,a+\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,b}},$$

$$\sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}(a+b)}{1-\mathrm{dn}(a-b)}} = \sqrt{\frac{\mathrm{tn}\,a+\mathrm{tn}\,b}{\mathrm{tn}\,a-\mathrm{tn}\,b}}\sqrt{\frac{\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{tn}\,a+\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,b}{\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{tn}\,a-\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,b}},$$

und also, wenn man auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen nimmt,

$$\text{12.}\quad \begin{cases} \log\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{dn}(a\pm b)}{1-\mathrm{dn}(a\pm b)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{dn}\,b}\right) \mp \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{tn}\,b}{\mathrm{tn}\,a}\right), \\ \log\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{dn}(a-b)}{1+\mathrm{dn}(a+b)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{tn}\,b}{\mathrm{tn}\,a}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,b}{\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{tn}\,a}\right), \\ \log\sqrt{\dfrac{1-\mathrm{dn}(a+b)}{1-\mathrm{dn}(a-b)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{tn}\,b}{\mathrm{tn}\,a}\right) + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,b}{\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{tn}\,a}\right). \end{cases}$$

Aus den gewöhnlichen Formeln für $\mathrm{sn}(a\pm b)$, $\mathrm{cn}(a\pm b)$, $\mathrm{dn}(a\pm b)$ hätten wir die so eben hergeleiteten Ausdrücke lange nicht so bequem herleiten können. Die Kenntnifs dieser Ausdrücke ist vorzüglich dann nöthig, wenn a reell und b imaginär ist. Setzen wir z. B. in der letzten Formel bi für b, so haben wir auf der Stelle in einer reellen Form

$$\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}(a+bi)}{1-\mathrm{dn}(a-bi)}} = \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{sn}'\,b}{\mathrm{tn}\,a}\right) + \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}\,\mathrm{sn}'\,b\,\mathrm{snc}'\,b\right).$$

Setzt man in den Formeln (9.) und (10.) ka für a, kb für b und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k, so werden sie

$$\text{13.}\quad \begin{cases} \log\sqrt{\dfrac{1+k\,\mathrm{sn}(a\pm b)}{1-k\,\mathrm{sn}(a\pm b)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\,(k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,b) \pm \mathfrak{Arc\,Tang}\,(k\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{snc}\,a), \\ \log\sqrt{\dfrac{1+k\,\mathrm{sn}(a+b)}{1+k\,\mathrm{sn}(a-b)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\,(k\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{snc}\,a) - \mathfrak{Arc\,Tang}\,(k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,b), \\ \log\sqrt{\dfrac{1-k\,\mathrm{sn}(a-b)}{1-k\,\mathrm{sn}(a+b)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\,(k\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{snc}\,a) + \mathfrak{Arc\,Tang}\,(k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,b). \end{cases}$$

Aus diesen Formeln erhält man nach §. 31. auf der Stelle:

$$14.\quad \begin{cases} \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1+\frac{ik}{k'}\operatorname{cnc}(a\pm b)}{1-\frac{ik}{k'}\operatorname{cnc}(a\pm b)}} \\ = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k}{k'}\operatorname{cnc} a\operatorname{cn} b\right) \pm \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k}{k'}\operatorname{cnc} b\operatorname{cn} a\right), \\ \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1+\frac{ik}{k'}\operatorname{cnc}(a+b)}{1+\frac{ik}{k'}\operatorname{cnc}(a-b)}} \\ = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k}{k'}\operatorname{cnc} b\operatorname{cn} a\right) - i\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k^2}{k'^2}\operatorname{cnc} a\operatorname{cnc} b\operatorname{cn} a\operatorname{cn} b\right), \\ \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1-\frac{ik}{k'}\operatorname{cnc}(a-b)}{1-\frac{ik}{k'}\operatorname{cnc}(a+b)}} \\ = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k}{k'}\operatorname{cnc} b\operatorname{cn} a\right) + i\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k^2}{k'^2}\operatorname{cnc} a\operatorname{cnc} b\operatorname{cn} a\operatorname{cn} b\right). \end{cases}$$

Vertauscht man in den Gleichungen (9.) und (10.) die beiden conjugirten Modul, und setzt man ferner ai für a und bi für b, so erhält man:

$$15.\quad \begin{cases} \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1+i\operatorname{tn}(a+b)}{1+i\operatorname{tn}(a-b)}} = \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn} b\operatorname{dn} a) - i\,\mathfrak{Arc\,Tang}(\operatorname{tn} a\operatorname{tn} b\operatorname{dn} a\operatorname{dn} b), \\ \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1-i\operatorname{tn}(a-b)}{1-i\operatorname{tn}(a+b)}} = \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn} b\operatorname{dn} a) + i\,\mathfrak{Arc\,Tang}(\operatorname{tn} a\operatorname{tn} b\operatorname{dn} a\operatorname{dn} b). \end{cases}$$

§. 34.

Aus den Formeln (1.) des §. 11 erhält man durch Addition und Subtraction

$$1.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(a+b)+\operatorname{sn}(a-b) = \frac{2\operatorname{sn} a\operatorname{cn} b\operatorname{dn} b}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}, \\ \operatorname{sn}(a+b)-\operatorname{sn}(a-b) = \frac{2\operatorname{sn} b\operatorname{cn} a\operatorname{dn} a}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}. \end{cases}$$

Setzt man hierin $a+iK'$ für a, so erhält man auf der Stelle nach §. (28.)

$$2.\quad \begin{cases} \frac{1}{\operatorname{sn}(a-b)}+\frac{1}{\operatorname{sn}(a+b)} = \frac{2\operatorname{sn} a\operatorname{cn} b\operatorname{dn} b}{\operatorname{sn}^2 a-\operatorname{sn}^2 b}, \\ \frac{1}{\operatorname{sn}(a-b)}-\frac{1}{\operatorname{sn}(a+b)} = \frac{2\operatorname{sn} b\operatorname{cn} a\operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 a-\operatorname{sn}^2 b}. \end{cases}$$

Weiter hat man die Formeln:

$$3.\quad \begin{cases} \operatorname{cn}(a-b)+\operatorname{cn}(a+b) = \frac{2\operatorname{cn} a\operatorname{cn} b}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}, \\ \operatorname{cn}(a-b)-\operatorname{cn}(a+b) = \frac{2\operatorname{sn} a\operatorname{sn} b\operatorname{dn} a\operatorname{dn} b}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b} \end{cases}$$

und

$$4.\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{cn}(a+b)}+\dfrac{1}{\mathrm{cn}(a-b)} = \dfrac{2\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b}{\mathrm{cn}^2 a\,\mathrm{cn}^2 b - k'^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}, \\ \dfrac{1}{\mathrm{cn}(a+b)}-\dfrac{1}{\mathrm{cn}(a-b)} = \dfrac{2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}{\mathrm{cn}^2 a\,\mathrm{cn}^2 b - k'^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}. \end{cases}$$

Für die Differenten erhält man die Formeln:

$$5.\quad \begin{cases} \mathrm{dn}(a-b)+\mathrm{dn}(a+b) = \dfrac{2\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}, \\ \mathrm{dn}(a-b)-\mathrm{dn}(a+b) = \dfrac{2k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,b}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b} \end{cases}$$

und noch nach §. 31.

$$6.\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{du}(a+b)}+\dfrac{1}{\mathrm{du}(a-b)} = \dfrac{2\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}{\mathrm{dn}^2 a - k^2\,\mathrm{sn}^2 b\,\mathrm{cn}^2 a}, \\ \dfrac{1}{\mathrm{du}(a+b)}-\dfrac{1}{\mathrm{du}(a-b)} = \dfrac{2k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,b}{\mathrm{dn}^2 a - k^2\,\mathrm{sn}^2 b\,\mathrm{cn}^2 a}. \end{cases}$$

Die Formeln für die Tangenten sind

$$7.\quad \begin{cases} \mathrm{tn}(a+b)+\mathrm{tn}(a-b) = \dfrac{2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}{\mathrm{cn}^2 a\,\mathrm{cn}^2 b - k'^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}, \\ \mathrm{tn}(a+b)-\mathrm{tn}(a-b) = \dfrac{2\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}^2 a\,\mathrm{cn}^2 b - k'^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b} \end{cases}$$

und

$$8.\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{tn}(a-b)}+\dfrac{1}{\mathrm{tn}(a+b)} = \dfrac{2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}{\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2 b}, \\ \dfrac{1}{\mathrm{tn}(a-b)}-\dfrac{1}{\mathrm{tn}(a+b)} = \dfrac{2\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2 b}. \end{cases}$$

§. 35.

Aus den Formeln für $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$ und $\cos\beta$ im §. 12. leitet man her die Formeln für $\sin 2\alpha$, $\sin 2\beta$, $\cos 2\alpha$ und $\cos 2\beta$; da $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ und $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ ist, so findet man auf der Stelle:

$$1.\quad \begin{cases} \sin[\mathrm{am}(a+b)+\mathrm{am}(a-b)] = \dfrac{2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}, \\ \sin[\mathrm{am}(a+b)-\mathrm{am}(a-b)] = \dfrac{2\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,a}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}, \\ \cos[\mathrm{am}(a+b)+\mathrm{am}(a-b)] = \dfrac{\mathrm{cn}^2 a - \mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{dn}^2 b}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}, \\ \cos[\mathrm{am}(a+b)-\mathrm{am}(a-b)] = \dfrac{\mathrm{cn}^2 b - \mathrm{sn}^2 b\,\mathrm{dn}^2 a}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}, \end{cases}$$

und hieraus gehen durch Addition und Subtraction hervor die folgenden:

$$2.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(a+b)\operatorname{cn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}b+\operatorname{sn}b\operatorname{cn}b\operatorname{dn}a}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}, \\ \operatorname{cn}(a+b)\operatorname{sn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}b-\operatorname{sn}b\operatorname{cn}b\operatorname{dn}a}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}, \\ \operatorname{cn}(a+b)\operatorname{cn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{cn}^2a-\operatorname{sn}^2b\operatorname{dn}^2a}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b} \\ \qquad\qquad = \dfrac{\operatorname{cn}^2a\operatorname{cn}^2b-k'^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b} = \dfrac{\operatorname{cn}^2a-\operatorname{cnc}^2b}{1+\frac{k^2}{k'^2}\operatorname{cn}^2a\operatorname{cnc}^2b}, \\ \operatorname{sn}(a+b)\operatorname{sn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{sn}^2a-\operatorname{sn}^2b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}. \end{cases}$$

Die beiden letzten Gleichungen erhält man auch, wenn man die Gleichungen (3.) durch (4.) ferner (1.) durch (2.) im §. 34. dividirt.

Aus diesen Formeln leitet man nach §. 27., §. 30. und §. 31. noch die folgenden her:

$$3.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(a+b)\operatorname{dn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{sn}a\operatorname{dn}a\operatorname{cn}b+\operatorname{sn}b\operatorname{dn}b\operatorname{cn}a}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}, \\ \operatorname{sn}(a-b)\operatorname{dn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{sn}a\operatorname{dn}a\operatorname{cn}b-\operatorname{sn}b\operatorname{dn}b\operatorname{cn}a}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}, \\ \operatorname{dn}(a+b)\operatorname{dn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{dn}^2a-k^2\operatorname{sn}^2b\operatorname{cn}^2a}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b} = \dfrac{\operatorname{dn}^2a+k'^2\operatorname{tn}^2b}{1+\operatorname{dn}^2a\operatorname{tn}^2b}, \\ \operatorname{cn}(a-b)\operatorname{dn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b+k'^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}, \\ \operatorname{cn}(a+b)\operatorname{dn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b-k'^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}, \\ \operatorname{tn}(a+b)\operatorname{tn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{sn}^2a-\operatorname{sn}^2b}{\operatorname{cn}^2a\operatorname{cn}^2b-k'^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b} = \dfrac{\operatorname{tn}^2a-\operatorname{tn}^2b}{1-k'^2\operatorname{tn}^2a\operatorname{tn}^2b}, \\ \dfrac{\operatorname{tn}(a+b)}{\operatorname{cn}(a-b)} = \dfrac{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}b+\operatorname{sn}b\operatorname{cn}b\operatorname{dn}a}{\operatorname{cn}^2a\operatorname{cn}^2b-k'^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}, \\ \dfrac{\operatorname{tn}(a-b)}{\operatorname{cn}(a+b)} = \dfrac{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}b-\operatorname{sn}b\operatorname{cn}b\operatorname{dn}a}{\operatorname{cn}^2a\operatorname{cn}^2b-k'^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}. \end{cases}$$

§. 36.

Aus den vorhin gefundenen Formeln leiten wir noch her die folgenden:

$$1.\quad \begin{cases} 1+\operatorname{sn}(a+b)\operatorname{sn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{cn}^2b+\operatorname{sn}^2a\operatorname{dn}^2b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}, \\ 1-\operatorname{sn}(a+b)\operatorname{sn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{cn}^2a+\operatorname{sn}^2b\operatorname{dn}^2a}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}, \end{cases}$$

$$2.\quad \begin{cases} 1+\operatorname{cn}(a+b)\operatorname{cn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{cn}^2 b+\operatorname{cn}^2 a}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}, \\ 1-\operatorname{cn}(a+b)\operatorname{cn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{sn}^2 a\operatorname{dn}^2 b+\operatorname{sn}^2 b\operatorname{dn}^2 a}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}, \end{cases}$$

$$3.\quad \begin{cases} 1+k^2\operatorname{sn}(a+b)\operatorname{sn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{dn}^2 b+k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{cn}^2 b}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}, \\ 1-k^2\operatorname{sn}(a+b)\operatorname{sn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{dn}^2 a+k^2\operatorname{sn}^2 b\operatorname{cn}^2 a}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}, \end{cases}$$

$$4.\quad \begin{cases} 1+\operatorname{dn}(a+b)\operatorname{dn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{dn}^2 b+\operatorname{dn}^2 a}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}, \\ 1-\operatorname{dn}(a+b)\operatorname{dn}(a-b) = \dfrac{k^2(\operatorname{sn}^2 a\operatorname{cn}^2 b+\operatorname{sn}^2 b\operatorname{cn}^2 a)}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}, \end{cases}$$

$$5.\quad \begin{cases} 1+\operatorname{tn}(a+b)\operatorname{tn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{cn}^2 a-\operatorname{sn}^2 a\operatorname{dn}^2 b}{\operatorname{cn}^2 a-\operatorname{sn}^2 b\operatorname{dn}^2 a}, \\ 1-\operatorname{tn}(a+b)\operatorname{tn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{cn}^2 b-\operatorname{sn}^2 b\operatorname{dn}^2 a}{\operatorname{cn}^2 a-\operatorname{sn}^2 b\operatorname{dn}^2 a}, \end{cases}$$

$$6.\quad \begin{cases} k'^2-k^2\operatorname{cn}(a+b)\operatorname{cn}(a-b) = \dfrac{k'^2-k^2\operatorname{cn}^2 a\operatorname{cn}^2 b}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}, \\ k'^2+k^2\operatorname{cn}(a+b)\operatorname{cn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{dn}^2 b\operatorname{dn}^2 a-k^2k'^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}. \end{cases}$$

Addirt man zu den Gleichungen (1.) die Gleichungen für $\operatorname{sn}(a+b)\pm\operatorname{sn}(a-b)$ und subtrahirt man auch, so erhält man:

$$7.\quad \begin{cases} (1\pm\operatorname{sn}(a+b))(1\pm\operatorname{sn}(a-b)) = \dfrac{(\operatorname{cn} b\pm\operatorname{sn} a\operatorname{dn} b)^2}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}, \\ (1\pm\operatorname{sn}(a+b))(1\mp\operatorname{sn}(a-b)) = \dfrac{(\operatorname{cn} a\pm\operatorname{sn} b\operatorname{dn} a)^2}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}. \end{cases}$$

In ähnlicher Weise oder nach §. 30. aus den vorigen erhält man:

$$8.\quad \begin{cases} (1\pm k\operatorname{sn}(a+b))(1\pm k\operatorname{sn}(a-b)) = \dfrac{(\operatorname{dn} b\pm k\operatorname{sn} a\operatorname{cn} b)^2}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}, \\ (1\pm k\operatorname{sn}(a+b))(1\mp k\operatorname{sn}(a-b)) = \dfrac{(\operatorname{dn} a\pm k\operatorname{sn} b\operatorname{cn} a)^2}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}. \end{cases}$$

Für die Cosinus findet man:

$$9.\quad \begin{cases} (1\pm\operatorname{cn}(a+b))(1\pm\operatorname{cn}(a-b)) = \dfrac{(\operatorname{cn} a\pm\operatorname{cn} b)^2}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}, \\ (1\pm\operatorname{cn}(a-b))(1\mp\operatorname{cn}(a+b)) = \dfrac{(\operatorname{sn} a\operatorname{dn} b\pm\operatorname{sn} b\operatorname{dn} a)^2}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}. \end{cases}$$

Für die Differenten erhält man hieraus nach §. 30. auf der Stelle:

$$10.\quad \begin{cases} (1\pm \mathrm{dn}(a+b))(1\pm \mathrm{dn}(a-b)) = \dfrac{(\mathrm{dn}\,a \pm \mathrm{dn}\,b)^2}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}, \\ (1\pm \mathrm{dn}(a-b))(1\mp \mathrm{dn}(a+b)) = \dfrac{k^2(\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b \pm \mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a)^2}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}. \end{cases}$$

Ferner ist für die Cosinns:

$$11.\quad \begin{cases} (k'\pm ik\,\mathrm{cn}(a+b))(k'\pm ik\,\mathrm{cn}(a-b)) = \dfrac{(k'\pm ik\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b)^2}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}, \\ (k'\pm ik\,\mathrm{cn}(a-b))(k'\mp ik\,\mathrm{cn}(a+b)) = \dfrac{(\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b \pm ikk'\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b)^2}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}, \end{cases}$$

und für die Tangenten findet sich:

$$12.\quad \begin{cases} (1\pm i\,\mathrm{tn}(a+b))(1\pm i\,\mathrm{tn}(a-b)) = \dfrac{(\mathrm{cn}\,a \pm i\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b)^2}{\mathrm{cn}^2 a\,\mathrm{cn}^2 b - k'^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}, \\ (1\pm i\,\mathrm{tn}(a+b))(1\mp i\,\mathrm{tn}(a-b)) = \dfrac{(\mathrm{cn}\,b \pm i\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a)^2}{\mathrm{cn}^2 a\,\mathrm{cn}^2 b - k'^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}. \end{cases}$$

§. 37.

Einige von den in §. 35. entwickelten Producten lassen sich noch einfacher darstellen, wenn man die Modular-Functionen der Argumente $2a$ und $2b$ einführt; es hat hiermit eine ähnliche Bewandtnifs, wie mit den analogen Formeln der cyklischen Functionen. Es ist z. B.

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a = \frac{\cos 2b - \cos 2a}{2}.$$

Nach §. 32. *a.* ist $\mathrm{sn}(a\pm b) = \sqrt{\dfrac{1-\mathrm{cn}(2a\pm 2b)}{1+\mathrm{dn}(2a\pm 2b)}}$, daher ist zunächst

$$\mathrm{sn}(a+b).\,\mathrm{sn}(a-b) = \sqrt{\left[\frac{(1-\mathrm{cn}(2a+2b))(1-\mathrm{cn}(2a-2b))}{(1+\mathrm{dn}(2a+2b))(1+\mathrm{dn}(2a-2b))}\right]},$$

weil aber nach §. 36. ist

$$(1-\mathrm{cn}(2a+2b))(1-\mathrm{cn}(2a-2b)) = \frac{(\mathrm{cn}\,2a-\mathrm{cn}\,2b)^2}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 2a\,\mathrm{sn}^2 2b} \text{ und}$$

$$(1+\mathrm{dn}(2a+2b))(1+\mathrm{dn}(2a-2b)) = \frac{(\mathrm{dn}\,2a+\mathrm{dn}\,2b)^2}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 2a\,\mathrm{sn}^2 2b},$$

so erhält man durch die Substitution dieser Werthe

$$\mathrm{sn}(a+b).\,\mathrm{sn}(a-b) = \pm\frac{\mathrm{cn}\,2a-\mathrm{cn}\,2b}{\mathrm{dn}\,2a+\mathrm{dn}\,2b}.$$

Das Vorzeichen läfst sich leicht bestimmen; da nämlich für $b=0$ aus der Formel folgt $\mathrm{sn}^2 a = \pm\dfrac{\mathrm{cn}\,2a-1}{\mathrm{dn}\,2a+1}$, und dieser Ausdruck positiv sein mufs, so ist das untere Vorzeichen zu nehmen, und also ohne alle Zweideutigkeit

$$1.\quad \mathrm{sn}(a+b).\,\mathrm{sn}(a-b) = \frac{\mathrm{cn}\,2b-\mathrm{cn}\,2a}{\mathrm{dn}\,2b+\mathrm{dn}\,2a}.$$

Nach §. 30. verwandelt sich diese Formel, wenn ka für a, kb für b und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k gesetzt wird, in

$$2.\quad k^2.\,\mathrm{sn}(a+b).\,\mathrm{sn}(a-b) = \frac{\mathrm{dn}\,2b-\mathrm{dn}\,2a}{\mathrm{cn}\,2b+\mathrm{cn}\,2a}.$$

Setzt man in der Formel (1.) $k'a$ für a, $k'b$ für b und $\frac{ik}{k'}$ statt des Moduls k, so verwandelt sie sich in $\mathrm{cnc}(a+b).\,\mathrm{cnc}(a-b) = \frac{\mathrm{snc}\,2b-\mathrm{snc}\,2a}{\frac{1}{\mathrm{dn}\,2b}+\frac{1}{\mathrm{dn}\,2a}}$, und dieser Ausdruck reducirt sich zunächst auf

$$3.\quad \mathrm{cnc}(a+b).\,\mathrm{cnc}(a-b) = \frac{\mathrm{cn}\,2b\,\mathrm{dn}\,2a-\mathrm{cn}\,2a\,\mathrm{dn}\,2b}{\mathrm{dn}\,2b+\mathrm{dn}\,2a}.$$

Substituirt man hierin $K-a$ für a, also $2K-2a$ für $2a$, so verwandelt sich nach §. 15. $\mathrm{cn}\,2a$ in $-\mathrm{cn}\,2a$ und $\mathrm{dn}\,2a$ bleibt ungeändert, ferner verwandelt sich $\mathrm{cnc}(a-b)$ in $\mathrm{cn}(a+b)$ und $\mathrm{cnc}(a+b)$ in $\mathrm{cn}(a-b)$, daher haben wir die Formel

$$4.\quad \mathrm{cn}(a+b).\,\mathrm{cn}(a-b) = \frac{\mathrm{cn}\,2b\,\mathrm{dn}\,2a+\mathrm{cn}\,2a\,\mathrm{dn}\,2b}{\mathrm{dn}\,2b+\mathrm{dn}\,2a}.$$

Aus (1.) und (4.) erhält man durch Subtraction und Addition

$$5.\quad \begin{cases} \cos(\mathrm{am}(a+b)+\mathrm{am}(a-b)) = \frac{\mathrm{cn}\,2a\,(1+\mathrm{dn}\,2b)-\mathrm{cn}\,2b\,(1-\mathrm{dn}\,2a)}{\mathrm{dn}\,2b+\mathrm{dn}\,2a}, \\ \cos(\mathrm{am}(a+b)-\mathrm{am}(a-b)) = \frac{\mathrm{cn}\,2b\,(1+\mathrm{dn}\,2a)-\mathrm{cn}\,2a\,(1-\mathrm{dn}\,2b)}{\mathrm{dn}\,2b+\mathrm{dn}\,2a}. \end{cases}$$

Hieraus leitet man her

$$1+\cos(\mathrm{am}(a+b)+\mathrm{am}(a-b)) = \frac{(1+\mathrm{cn}\,2a)(1+\mathrm{dn}\,2b)-(1+\mathrm{cn}\,2b)(1-\mathrm{dn}\,2a)}{\mathrm{dn}\,2b+\mathrm{dn}\,2a},$$

$$1-\cos(\mathrm{am}(a+b)+\mathrm{am}(a-b)) = \frac{(1-\mathrm{cn}\,2a)(1+\mathrm{dn}\,2b)-(1-\mathrm{cn}\,2b)(1-\mathrm{dn}\,2a)}{\mathrm{dn}\,2b+\mathrm{dn}\,2a}.$$

Aus (1.) und (4.) erhält man durch Division

$$6.\quad \mathrm{tn}(a+b).\,\mathrm{tn}(a-b) = \frac{\mathrm{cn}\,2b-\mathrm{cn}\,2a}{\mathrm{cn}\,2b\,\mathrm{dn}\,2a+\mathrm{cn}\,2a\,\mathrm{dn}\,2b}.$$

Setzt man in der Formel (1.) $K-a$ für a, so verwandelt sie sich in

$$\mathrm{snc}(a+b)\,\mathrm{snc}(a-b) = \frac{\mathrm{cn}(a+b)\,\mathrm{cn}(a-b)}{\mathrm{dn}(a+b)\,\mathrm{dn}(a-b)} = \frac{\mathrm{cn}\,2b+\mathrm{cn}\,2a}{\mathrm{dn}\,2b+\mathrm{dn}\,2a},$$

und wird die Formel (4.) hierdurch dividirt, so erhält man

$$7.\quad \mathrm{dn}(a+b)\,\mathrm{dn}(a-b) = \frac{\mathrm{cn}\,2b\,\mathrm{dn}\,2a+\mathrm{cn}\,2a\,\mathrm{dn}\,2b}{\mathrm{cn}\,2b+\mathrm{cn}\,2a}.$$

Dasselbe Resultat findet man auch unmittelbar durch Anwendung der Sätze des §. 30. auf die Formel (5.).

Auch die Verhältnisse der gleichnamigen Functionen von $a+b$ und $a-b$ lassen sich in eben so einfachen Ausdrücken darstellen.

Setzt man in der Gleichung (1.) $a+\frac{iK'}{2}$ für a, $b+\frac{iK'}{2}$ für b, so bleibt $a-b$ ungeändert, und $a+b$ verwandelt sich in $a+b+iK'$, also $\mathrm{sn}(a+b)$ in $\frac{1}{k\,\mathrm{sn}(a+b)}$, $2a$ verwandelt sich in $2a+iK'$ und $2b$ in $2b+iK'$, daher erhalten wir

$$\frac{\mathrm{sn}(a-b)}{k\,\mathrm{sn}(a+b)} = \left(\frac{-i\,\mathrm{dn}2b}{k\,\mathrm{sn}2b}+\frac{i\,\mathrm{dn}2a}{k\,\mathrm{sn}2a}\right):\left(\frac{-i}{\mathrm{tn}2b}+\frac{-i}{\mathrm{tn}2a}\right),$$

also

$$\frac{\mathrm{sn}(a-b)}{\mathrm{sn}(a+b)} = \frac{\mathrm{dn}2b\,\mathrm{sn}2a-\mathrm{dn}2a\,\mathrm{sn}2b}{\mathrm{sn}2a\,.\,\mathrm{sn}2b}:\frac{\mathrm{sn}2a\,\mathrm{cn}2b+\mathrm{sn}2b\,\mathrm{cn}2a}{\mathrm{sn}2a\,\mathrm{sn}2b},$$

daher reducirt sich der Ausdruck auf

$$8.\quad \frac{\mathrm{sn}(a-b)}{\mathrm{sn}(a+b)} = \frac{\mathrm{dn}2b\,\mathrm{sn}2a-\mathrm{dn}2a\,\mathrm{sn}2b}{\mathrm{sn}2a\,\mathrm{cn}2b+\mathrm{sn}2b\,\mathrm{cn}2a},$$

und die Anwendung des §. 30. auf diese Formel verwandelt sie sogleich in

$$9.\quad \frac{\mathrm{sn}(a-b)}{\mathrm{sn}(a+b)} = \frac{\mathrm{cn}2b\,\mathrm{sn}2a-\mathrm{cn}2a\,\mathrm{sn}2b}{\mathrm{dn}2b\,\mathrm{sn}2a+\mathrm{dn}2a\,\mathrm{sn}2b}.$$

Aus diesen beiden Formeln folgt noch

$$\frac{\mathrm{sn}(a+b)}{\mathrm{sn}(a-b)} = \sqrt{\frac{\mathrm{dn}2b\,\mathrm{sn}2a+\mathrm{dn}2a\,\mathrm{sn}2b}{\mathrm{dn}2b\,\mathrm{sn}2a-\mathrm{dn}2a\,\mathrm{sn}2b}}\cdot\sqrt{\frac{\mathrm{sn}2a\,\mathrm{cn}2b+\mathrm{sn}2b\,\mathrm{cn}2a}{\mathrm{sn}2a\,\mathrm{cn}2b-\mathrm{sn}2b\,\mathrm{cn}2a}}.$$

Dieser Ausdruck ist nöthig, wenn $\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(a+bi)}{\mathrm{sn}(a-bi)}}$ in einer reellen Form dargestellt werden soll. Zieht man aus der vorigen Gleichung noch einmal die Quadratwurzel, und nimmt man auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen so erhält man

$$\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(a+b)}{\mathrm{sn}(a-b)}} = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dn}2a}{\mathrm{sn}2a}\cdot\frac{\mathrm{sn}2b}{\mathrm{dn}2b}\right)+\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}2b}{\mathrm{tn}2a}\right)$$

oder

$$10.\quad \begin{cases} \log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(a+b)}{\mathrm{sn}(a-b)}} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}2b}{\mathrm{tn}2a}\right)+\frac{1}{2}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{cnc}2b}{\mathrm{cnc}2a}\right) \text{ und} \\ \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(a+bi)}{\mathrm{sn}(a-bi)}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{sn}'2b}{\mathrm{tn}2a}\right)+\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k'}{k}\cdot\frac{\mathrm{cnc}'2b}{\mathrm{cnc}\,2a}\right). \end{cases}$$

Vertauscht man in den Gleichungen (8.) und (9.) die beiden conjugirten Modul und setzt man ai für a, wie auch bi für b, so erhält man

$$11.\quad \frac{\mathrm{tn}(a-b)}{\mathrm{tn}(a+b)} = \frac{\mathrm{sn}2a\,\mathrm{dn}2b-\mathrm{sn}2b\,\mathrm{dn}2a}{\mathrm{sn}2a+\mathrm{sn}2b} = \frac{\mathrm{sn}2a-\mathrm{sn}2b}{\mathrm{sn}2a\,\mathrm{dn}2b+\mathrm{sn}2b\,\mathrm{dn}2a},$$

und die Gleichungen (10.) werden nun

12.
$$\begin{cases} \log\sqrt{\frac{\mathrm{tn}(a+b)}{\mathrm{tn}(a-b)}} = \frac{1}{2}\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,2b}{\mathrm{sn}\,2a}\right) + \frac{1}{2}\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{cnc}\,2b}{\mathrm{cnc}\,2a}\right), \\ \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{tn}(a+bi)}{\mathrm{tn}(a-bi)}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}'\,2b}{\mathrm{sn}\,2a}\right) + \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k'}{k}\cdot\frac{\mathrm{cnc}'\,2b}{\mathrm{cnc}\,2a}\right). \end{cases}$$

Werden die Gleichungen (8.) und (9.) durch (11.) dividirt, so entsteht

13.
$$\frac{\mathrm{cn}(a-b)}{\mathrm{cn}(a+b)} = \frac{\mathrm{sn}\,2a+\mathrm{sn}\,2b}{\mathrm{sn}\,2a\,\mathrm{cn}\,2b+\mathrm{sn}\,2b\,\mathrm{cn}\,2a} = \frac{\mathrm{sn}\,2a\,\mathrm{cn}\,2b-\mathrm{sn}\,2b\,\mathrm{cn}\,2a}{\mathrm{sn}\,2a-\mathrm{sn}\,2b},$$

und aus den Gleichungen (10.) und (12.) erhält man durch Subtraction

14.
$$\begin{cases} \log\sqrt{\frac{\mathrm{cn}(a-b)}{\mathrm{cn}(a+b)}} = \frac{1}{2}\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,2b}{\mathrm{sn}\,2a}\right) - \frac{1}{2}\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,2b}{\mathrm{tn}\,2a}\right), \\ \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{cn}(a-bi)}{\mathrm{cn}(a+bi)}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}'\,2b}{\mathrm{sn}\,2a}\right) - \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{sn}'\,2b}{\mathrm{tn}\,2a}\right). \end{cases}$$

Nach §. 30. verwandelt sich die Formel (13.) in

15.
$$\frac{\mathrm{dn}(a-b)}{\mathrm{dn}(a+b)} = \frac{\mathrm{sn}\,2a+\mathrm{sn}\,2b}{\mathrm{sn}\,2a\,\mathrm{dn}\,2b+\mathrm{sn}\,2b\,\mathrm{dn}\,2a} = \frac{\mathrm{sn}\,2a\,\mathrm{dn}\,2b-\mathrm{sn}\,2b\,\mathrm{dn}\,2a}{\mathrm{sn}\,2a-\mathrm{sn}\,2b},$$

und aus den Formeln (14.) wird

16.
$$\begin{cases} \log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(a-b)}{\mathrm{dn}(a+b)}} = \frac{1}{2}\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,2b}{\mathrm{sn}\,2a}\right) - \frac{1}{2}\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{cnc}\,2b}{\mathrm{cnc}\,2a}\right), \\ \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(a-bi)}{\mathrm{dn}(a+bi)}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}'\,2b}{\mathrm{sn}\,2a}\right) - \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k'}{k}\cdot\frac{\mathrm{cnc}'\,2b}{\mathrm{cnc}\,2a}\right). \end{cases}$$

Setzt man in der Formel (1.) $\frac{K}{2}-b$ für a und $\frac{K}{2}-a$ für b, so verwandelt sich $a+b$ in $K-(a+b)$ und $a-b$ bleibt ungeändert; da sich nun $2a$ verwandelt in $K-2b$ und $2b$ in $K-2a$, so erhalten wir

$$\mathrm{snc}(a+b)\,.\,\mathrm{sn}(a-b) = \frac{\mathrm{cnc}\,2a-\mathrm{cnc}\,2b}{\mathrm{dnc}\,2a+\mathrm{dnc}\,2b}.$$

Vertauschen wir nun die beiden conjugirten Modul, zugleich ai für a und bi für b setzend, so erhalten wir

$$\frac{\mathrm{tn}(a-b)}{\mathrm{dn}(a+b)} = \frac{k}{k'}\cdot\frac{\mathrm{cnc}\,2a-\mathrm{cnc}\,2b}{k\,\mathrm{snc}\,2a+k\,\mathrm{snc}\,2b},$$

oder einfacher

17.
$$\begin{cases} \frac{\mathrm{tn}(a-b)}{\mathrm{dn}(a+b)} = \frac{\mathrm{sn}\,2a\,\mathrm{dn}\,2b-\mathrm{sn}\,2b\,\mathrm{dn}\,2a}{\mathrm{cn}\,2a\,\mathrm{dn}\,2b+\mathrm{cn}\,2b\,\mathrm{dn}\,2a} \quad \text{und} \\ \frac{\mathrm{tn}(a+b)}{\mathrm{dn}(a-b)} = \frac{\mathrm{sn}\,2a\,\mathrm{dn}\,2b+\mathrm{sn}\,2b\,\mathrm{dn}\,2a}{\mathrm{cn}\,2a\,\mathrm{dn}\,2b+\mathrm{cn}\,2b\,\mathrm{dn}\,2a}. \end{cases}$$

Setzen wir in der ersten Formel wieder $\frac{K}{2}-a$ für b und $\frac{K}{2}-b$ für a, so erhalten wir

$$\frac{\mathrm{tn}(a-b)}{\mathrm{dnc}(a+b)} = \frac{\mathrm{snc}\,2b\,\mathrm{dnc}\,2a-\mathrm{snc}\,2a\,\mathrm{dnc}\,2b}{\mathrm{cnc}\,2b\,\mathrm{dnc}\,2a+\mathrm{cnc}\,2a\,\mathrm{dnc}\,2b},$$

oder nach einer leichten Reduction:

$$18.\quad \begin{cases} \operatorname{tn}(a-b)\operatorname{dn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{cn}2b-\operatorname{cn}2a}{\operatorname{sn}2b+\operatorname{sn}2a} = \dfrac{\operatorname{sn}2a-\operatorname{sn}2b}{\operatorname{cn}2b+\operatorname{cn}2a}, \\ \operatorname{tn}(a+b)\operatorname{dn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{cn}2b-\operatorname{cn}2a}{\operatorname{sn}2a-\operatorname{sn}2b} = \dfrac{\operatorname{sn}2a+\operatorname{sn}2b}{\operatorname{cn}2b+\operatorname{cn}2a}, \end{cases}$$

Multiplicirt man die Formeln (17. mit (7.), so erhält man

$$19.\quad \begin{cases} \operatorname{tn}(a-b)\operatorname{dn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{sn}2a\operatorname{dn}2b-\operatorname{sn}2b\operatorname{dn}2a}{\operatorname{cn}2b+\operatorname{cn}2a} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}(2a-2b), \\ \operatorname{tn}(a+b)\operatorname{dn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{sn}2a\operatorname{dn}2b+\operatorname{sn}2b\operatorname{dn}2a}{\operatorname{cn}2b+\operatorname{cn}2a} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}(2a+2b). \end{cases}$$

Multiplicirt man die Formeln (1.) und (2.), und subtrahirt man das Product von Eins, so erhält man

$$20.\quad 1-k^2\operatorname{sn}^2(a+b)\operatorname{sn}^2(a-b) = \frac{2(\operatorname{dn}2b\operatorname{cn}2b+\operatorname{dn}2a\operatorname{cn}2a)}{(\operatorname{dn}2b+\operatorname{dn}2a)(\operatorname{cn}2b+\operatorname{cn}2a)}.$$

Zusatz. Wenn die Argumente a und b nicht verdoppelt werden, so ist

$$\log\sqrt{\frac{\operatorname{sn}(a+b)}{\operatorname{sn}(a-b)}} = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\operatorname{sn}b\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a}{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}b\operatorname{dn}b}\right),$$

oder einfacher

$$21.\quad \begin{cases} \log\sqrt{\dfrac{\operatorname{sn}(a+b)}{\operatorname{sn}(a-b)}} = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\dfrac{\operatorname{tn}b\operatorname{dn}a}{\operatorname{tn}a\operatorname{dn}b}\right) = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\dfrac{\operatorname{cnc}b}{\operatorname{cn}b}\cdot\dfrac{\operatorname{cn}a}{\operatorname{cnc}a}\right) \text{ und} \\ \dfrac{1}{i}\log\sqrt{\dfrac{\operatorname{sn}(a+bi)}{\operatorname{sn}(a-bi)}} = \operatorname{arc}\operatorname{tang}\left(\dfrac{\operatorname{dn}a}{\operatorname{tn}a}\operatorname{sn}'b\operatorname{snc}'b\right). \end{cases}$$

Hieraus folgt auf der Stelle

$$22.\quad \begin{cases} \log\sqrt{\dfrac{\operatorname{tn}(a+b)}{\operatorname{tn}(a-b)}} = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\dfrac{\operatorname{sn}b\operatorname{snc}b}{\operatorname{sn}a\operatorname{snc}a}\right); \\ \dfrac{1}{i}\log\sqrt{\dfrac{\operatorname{tn}(a+bi)}{\operatorname{tn}(a-bi)}} = \operatorname{arc}\operatorname{tang}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sn}a\operatorname{snc}a}\cdot\dfrac{\operatorname{tn}'b}{\operatorname{dn}'b}\right). \end{cases}$$

Für die Cosinus erhalten wir die Formel

$$23.\quad \begin{cases} \log\sqrt{\dfrac{\operatorname{cn}(a-b)}{\operatorname{cn}(a+b)}} = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}(\operatorname{tn}a\operatorname{dn}a\operatorname{tn}b\operatorname{dn}b) = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\dfrac{\operatorname{sn}a}{\operatorname{snc}a}\cdot\dfrac{\operatorname{sn}b}{\operatorname{snc}b}\right) \\ \qquad = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}2a.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}2b), \quad \text{also} \\ \dfrac{1}{i}\log\sqrt{\dfrac{\operatorname{cn}(a-bi)}{\operatorname{cn}(a+bi)}} = \operatorname{arc}\operatorname{tang}(\operatorname{tn}a\operatorname{dn}a\operatorname{tn}'b\operatorname{dn}'b) = \operatorname{arc}\operatorname{tang}\left(\dfrac{\operatorname{sn}a}{\operatorname{snc}a}\cdot\dfrac{\operatorname{sn}'b}{\operatorname{snc}'b}\right) \\ \qquad = \operatorname{arc}\operatorname{tang}(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}2a.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}'2b). \end{cases}$$

Die Differenten endlich geben die Formeln

$$24.\quad \begin{cases} \log\sqrt{\dfrac{\operatorname{dn}(a-b)}{\operatorname{dn}(a+b)}} = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}(k^2\operatorname{sn}a\operatorname{snc}a\operatorname{sn}b\operatorname{snc}b), \\ \dfrac{1}{i}\log\sqrt{\dfrac{\operatorname{dn}(a-bi)}{\operatorname{dn}(a+bi)}} = \operatorname{arc}\operatorname{tang}\left(k^2\operatorname{sn}a\operatorname{snc}a.\dfrac{\operatorname{tn}'b}{\operatorname{dn}'b}\right). \end{cases}$$

§. 38.

Nach §. 11. (Formel 12.) ist

$$\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{dn}(a+b) = k'^2 + k^2\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{cn}(a+b);$$

multiplicirt man diese Gleichung mit $\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{tn}\,b\,\mathrm{tn}(a+b)$, so erhält man: $\mathrm{tn}a\,\mathrm{dn}a.\,\mathrm{tn}b\,\mathrm{dn}b.\,\mathrm{tn}(a+b)\,\mathrm{dn}(a+b) = k'^2\mathrm{tn}a\,\mathrm{tn}b\,\mathrm{tn}(a+b) + k^2\mathrm{sn}a\,\mathrm{sn}b\,\mathrm{sn}(a+b)$, und da $\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a = \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{am}\,2a$, $\mathrm{tn}\,b\,\mathrm{dn}\,b = \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{am}\,2b$ und $\mathrm{tn}(a+b)\,\mathrm{dn}(a+b) = \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{am}(2a+2b)$ ist, so kann die Formel auch also vorgestellt werden:

$$1.\quad \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{am}\,2a.\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{am}\,2b.\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{am}(2a+2b) = k'^2\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{tn}\,b\,\mathrm{tn}(a+b) + k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}(a+b)$$

oder, wenn man die beiden conjugirten Modul mit einander vertauscht und sich der Formel (2.) des §. 22. erinnert,

$$2.\quad \mathfrak{Tang}\tfrac{1}{2}\mathfrak{Am}\,2a.\,\mathfrak{Tang}\tfrac{1}{2}\mathfrak{Am}\,2b.\,\mathfrak{Tang}\tfrac{1}{2}\mathfrak{Am}(2a+2b) = k^2\,\mathfrak{Sn}\,a\,\mathfrak{Sn}\,b\,\mathfrak{Sn}(a+b) + k'^2\,\mathrm{sn}'\,a\,\mathrm{sn}'\,b\,\mathrm{sn}'(a+b).$$

Wir leiten diese Gleichungen noch auf eine andere Art her, und finden durch dasselbe Verfahren noch zwei neue Gleichungen, in welchen statt der Summe der beiden Glieder auf der rechten Seite ihr Unterschied vorkommt. Nach §. 37. ist:

$$k^2\,\mathrm{sn}(a+b).\,\mathrm{sn}(a-b) = \frac{\mathrm{dn}\,2b - \mathrm{dn}\,2a}{\mathrm{cn}\,2b + \mathrm{cn}\,2a}$$

und

$$k'^2\,\mathrm{tn}(a+b).\,\mathrm{tn}(a-b) = \frac{\mathrm{dn}\,2a\,\mathrm{cn}\,2b - \mathrm{dn}\,2b\,\mathrm{cn}\,2a}{\mathrm{cn}\,2b + \mathrm{cn}\,2a};$$

wir multipliciren die erste Gleichung mit $\mathrm{sn}\,2a = \mathrm{tn}\,2a.\mathrm{cn}\,2a$ und die zweite mit $\mathrm{tn}\,2a$ selbst, dann ist:

$$k^2\,\mathrm{sn}(a+b).\,\mathrm{sn}(a-b).\,\mathrm{sn}\,2a = \mathrm{tn}\,2a.\frac{\mathrm{dn}\,2b\,\mathrm{cn}\,2a - \mathrm{dn}\,2a\,\mathrm{cn}\,2a}{\mathrm{cn}\,2b + \mathrm{cn}\,2a},$$

$$k'^2\mathrm{tn}(a+b).\,\mathrm{tn}(a-b).\,\mathrm{tn}\,2a = \mathrm{tn}\,2a.\frac{\mathrm{dn}\,2a\,\mathrm{cn}\,2b - \mathrm{dn}\,2b\,\mathrm{cn}\,2a}{\mathrm{cn}\,2b + \mathrm{cn}\,2a},$$

und hieraus erhalten wir durch Addition und Subtraction:

$$k^2\,\mathrm{sn}(a+b)\,\mathrm{sn}(a-b)\,\mathrm{sn}\,2a + k'^2\,\mathrm{tn}(a+b)\,\mathrm{tn}(a-b)\,\mathrm{tn}\,2a = \mathrm{tn}\,2a\,\mathrm{dn}\,2a.\frac{\mathrm{cn}\,2b - \mathrm{cn}\,2a}{\mathrm{cn}\,2b + \mathrm{cn}\,2a},$$

$$k'^2\,\mathrm{tn}(a+b)\,\mathrm{tn}(a-b)\,\mathrm{tn}\,2a - k^2\,\mathrm{sn}(a+b)\,\mathrm{sn}(a-b)\,\mathrm{sn}\,2a = \mathrm{tn}\,2a\,\mathrm{dn}\,2a - \frac{2\,\mathrm{sn}\,2a\,\mathrm{dn}\,2b}{\mathrm{cn}\,2b + \mathrm{cn}\,2a}.$$

Setzt man in diesen Formeln a für $a+b$, b für $a-b$, also $a+b$ für $2a$ und $a-b$ für $2b$, so werden sie

$$k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a+b) + k'^2 \operatorname{tn} a \operatorname{tn} b \operatorname{tn}(a+b)$$
$$= \operatorname{tn}(a+b) \operatorname{dn}(a+b) . \frac{\operatorname{cn}(a-b) - \operatorname{cn}(a+b)}{\operatorname{cn}(a-b) + \operatorname{cn}(a+b)}$$
$$k'^2 \operatorname{tn} a \operatorname{tn} b \operatorname{tn}(a+b) - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a+b)$$
$$= \operatorname{tn}(a+b) \operatorname{dn}(a+b) - \frac{2 \operatorname{sn}(a+b) \operatorname{dn}(a-b)}{\operatorname{cn}(a-b) + \operatorname{cn}(a+b)}.$$

Da aber $\frac{\operatorname{cn}(a-b) - \operatorname{cn}(a+b)}{\operatorname{cn}(a-b) + \operatorname{cn}(a+b)} = \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \operatorname{tn} b \operatorname{dn} b$ ist, so ist die erste von diesen beiden Gleichungen also einerlei mit der obigen Gleichung (1.). Da ferner nach §. 35. ist $\operatorname{sn}(a+b) \operatorname{dn}(a-b) = \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{dn} b \operatorname{cn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}$, so ist $\frac{2 \operatorname{sn}(a+b) \operatorname{dn}(a-b)}{\operatorname{cn}(a-b) + \operatorname{cn}(a+b)} = \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{dn} b \operatorname{cn} a}{\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b} = \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a + \operatorname{tn} b \operatorname{dn} b$, und also

$$\operatorname{tn}(a+b) \operatorname{dn}(a+b) - \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a - \operatorname{tn} b \operatorname{dn} b$$
$$= k'^2 \operatorname{tn} a \operatorname{tn} b \operatorname{tn}(a+b) - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a+b),$$

oder in anderen Zeichen

3.
$$\begin{cases} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \operatorname{am}(2a+2b) = \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2} \operatorname{am} 2a + \operatorname{tang} \frac{1}{2} \operatorname{am} 2b + k'^2 \operatorname{tn} a \operatorname{tn} b \operatorname{tn}(a+b) - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a+b), \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2} \operatorname{am}(2a-2b) = \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2} \operatorname{am} 2a - \operatorname{tang} \frac{1}{2} \operatorname{am} 2b - k'^2 \operatorname{tn} a \operatorname{tn} b \operatorname{tn}(a-b) + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a-b). \end{cases}$$

Vertauscht man in diesen Gleichungen die beiden conjugirten Modul mit einander, so lassen sie sich also vorstellen

4.
$$\begin{cases} \mathfrak{Tang} \frac{1}{2} \mathfrak{Am}(2a+2b) = \\ \mathfrak{Tang} \frac{1}{2} \mathfrak{Am} 2a + \mathfrak{Tang} \frac{1}{2} \mathfrak{Am} 2b + k^2 \mathfrak{Sn} a \mathfrak{Sn} b \mathfrak{Sn}(a+b) - k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{sn}' b \operatorname{sn}'(a+b), \\ \mathfrak{Tang} \frac{1}{2} \mathfrak{Am}(2a-2b) = \\ \mathfrak{Tang} \frac{1}{2} \mathfrak{Am} 2a - \mathfrak{Tang} \frac{1}{2} \mathfrak{Am} 2b - k^2 \mathfrak{Sn} a \mathfrak{Sn} b \mathfrak{Sn}(a-b) + k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{sn}' b \operatorname{sn}'(a-b). \end{cases}$$

§. 39.

Wir ziehen nun die Gleichungen (3.) und (1.) des §. 38. näher in Betracht; was von ihnen gilt, kann dann leicht auf die Gleichungen (4.) und (2.) übertragen werden. Durch die Addition der Gleichungen (3.) erhalten wir zunächst

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{am}(2a+2b) + \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{am}(2a-2b)$$
$$= \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{am} 2a + k'^2 \mathfrak{Sn}' a \mathfrak{Sn}' b \left(\frac{\mathfrak{Sn}'(a+b) - \mathfrak{Sn}'(a-b)}{2} \right)$$
$$- k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \left(\frac{\operatorname{sn}(a+b) - \operatorname{sn}(a-b)}{2} \right),$$

oder, wenn die cyklischen und hyperbolischen Sinus von $a+b$ und $a-b$ entwickelt werden,

$$5.\quad \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}(2a+2b)+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}(2a-2b)}{2}$$
$$=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}2a+\frac{k'^2\,\mathfrak{Sn}'a\,\mathfrak{Cn}'a\,\mathfrak{Dn}'a\,\mathfrak{Sn}'^2b}{1-k'^2\,\mathfrak{Sn}'^2a\,\mathfrak{Sn}'^2b}-\frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\operatorname{sn}^2b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}.$$

In dieser Gleichung läfst sich auch das Glied $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}2a=\operatorname{tn}a\operatorname{dn}a$ mit dem einen oder anderen der beiden übrigen Glieder zu einem Gliede zusammenziehen. Es ist

$$\operatorname{tn}a\operatorname{dn}a-\frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\operatorname{sn}^2b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}=\operatorname{tn}a\operatorname{dn}a\left(1-\frac{k^2\operatorname{cn}^2a\operatorname{sn}^2b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}\right)$$
$$=\frac{\operatorname{tn}a\operatorname{dn}a\operatorname{dn}^2b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b},$$

daher verwandelt sich die Gleichung (5.) in

$$6.\quad \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}(2a+2b)+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}(2a-2b)}{2}$$
$$=\frac{k'^2\,\mathfrak{Sn}'a\,\mathfrak{Cn}'a\,\mathfrak{Dn}'a.\mathfrak{Sn}'^2b}{1-k'^2\,\mathfrak{Sn}'^2a\,\mathfrak{Sn}'^2b}+\frac{\operatorname{tn}a\operatorname{dn}a\operatorname{dn}^2b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}.$$

Eben so findet man $\mathfrak{Tn}a\,\mathfrak{Dn}a+\frac{k^2\,\mathfrak{Sn}a\,\mathfrak{Cn}a\,\mathfrak{Dn}a\,\mathfrak{Sn}^2b}{1-k^2\,\mathfrak{Sn}^2a\,\mathfrak{Sn}^2b}=\frac{\mathfrak{Tn}a\,\mathfrak{Dn}a\,\mathfrak{Dn}^2b}{1-k^2\,\mathfrak{Sn}^2a\,\mathfrak{Sn}^2b}$, und da $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}2a=\mathfrak{Tang}\frac{1}{2}\mathfrak{Am}'2a=\mathfrak{Tn}'a\,\mathfrak{Dn}'a$ ist, so erhalten wir

$$7.\quad \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}(2a+2b)+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}(2a-2b)}{2}$$
$$=\frac{\mathfrak{Tn}'a\,\mathfrak{Dn}'a\,\mathfrak{Dn}'^2b}{1-k'^2\,\mathfrak{Sn}'^2a\,\mathfrak{Sn}'^2b}-\frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\operatorname{sn}^2b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}.$$

Die so eben entwickelten Gleichungen (5.), (6.), (7.), welche weiter unten eine wichtigere Bedeutung bekommen werden, lassen sich auch aus der Gleichung (1.) des §. 38. herleiten, und wir übergehen diese Herleitung nicht, weil sie zu einer neuen Darstellung der vorigen Gleichungen führt. Setzt man in der erwähnten Gleichung (1.) $-b$ für b und addirt man die neue Gleichung zu ihr, so erhält man zunächst

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}2a\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}2b.\left[\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}(2a+2b)+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}(2a-2b)}{2}\right]$$
$$=k'^2\,\mathfrak{Sn}'a\,\mathfrak{Sn}'b.\left[\frac{\mathfrak{Sn}'(a+b)+\mathfrak{Sn}'(a-b)}{2}\right]+k^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b.\left[\frac{\operatorname{sn}(a+b)+\operatorname{sn}(a-b)}{2}\right].$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite wird, wenn er entwickelt wird,

$$=\frac{k'^2\,\mathfrak{Sn}'^2a\,\mathfrak{Cn}'b\,\mathfrak{Dn}'b\,\mathfrak{Sn}'b}{1-k'^2\,\mathfrak{Sn}'^2a\,\mathfrak{Sn}'^2b}+\frac{k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{cn}b\operatorname{dn}b\operatorname{sn}b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b},$$

und da $\text{tang}\frac{1}{2}\text{am}\,2a\,\text{tang}\frac{1}{2}\text{am}\,2b = \text{tn}\,a\,\text{dn}\,a\,\text{tn}\,b\,\text{dn}\,b = \mathfrak{Tn}'a\,\mathfrak{Dn}'a\mathfrak{Tn}'b\,\mathfrak{Dn}'b$ ist, so erhält man, wenn die Gleichung hierdurch dividirt wird, die einfachere Darstellung

$$8.\quad \frac{\text{tang}\frac{1}{2}\text{am}\,(2a+2b)+\text{tang}\frac{1}{2}\text{am}\,(2a-2b)}{2}$$
$$= \frac{k'^2\,\mathfrak{Sn}'a\,\mathfrak{Cn}'a\,\mathfrak{Cn}'^2b}{\mathfrak{Dn}'a\,(1-k'^2\,\mathfrak{Sn}'^2a\,\mathfrak{Sn}'^2b)} + \frac{k^2\,\text{sn}\,a\,\text{cn}\,a\,\text{cn}^2b}{\text{dn}\,a\,(1-k^2\,\text{sn}^2a\,\text{sn}^2b)},$$

und dieser Ausdruck ist nicht minder bemerkenswerth, als die vorigen; da derselbe hier ohne Kenntnifs des Zusammenhanges mit den vorigen Gleichungen gefunden worden ist, so ist eben dieser Zusammenhang noch anzugeben.

Durch eine leichte Reduction findet man:

$$\frac{\mathfrak{Cn}'^2b}{1-k'^2\,\mathfrak{Sn}'^2a\,\mathfrak{Sn}'^2b} = 1+\frac{\mathfrak{Dn}'^2a\,\mathfrak{Sn}'^2b}{1-k'^2\,\mathfrak{Sn}'^2a\,\mathfrak{Sn}'^2b}\quad\text{und}$$
$$\frac{\text{cn}^2b}{1-k^2\,\text{sn}^2a\,\text{sn}^2b} = 1-\frac{\text{dn}^2a\,\text{sn}^2b}{1-k^2\,\text{sn}^2a\,\text{sn}^2b};$$

werden diese Werthe in der Gleichung (8.) substituirt, so entsteht zunächst:

$$\frac{\text{tang}\frac{1}{2}\text{am}\,(2a+2b)+\text{tang}\frac{1}{2}\text{am}\,(2a-2b)}{2}$$
$$= \frac{k'^2\,\mathfrak{Sn}'a\,\mathfrak{Cn}'a}{\mathfrak{Dn}'a} + \frac{k^2\,\text{sn}\,a\,\text{cn}\,a}{\text{dn}\,a} + \frac{k'^2\,\mathfrak{Sn}'a\,\mathfrak{Cn}'a\,\mathfrak{Dn}'a\,\mathfrak{Sn}'^2b}{1-k'^2\,\mathfrak{Sn}'^2a\,\mathfrak{Sn}'^2b} - \frac{k^2\,\text{sn}\,a\,\text{cn}\,a\,\text{dn}\,a\,\text{sn}^2b}{1-k^2\,\text{sn}^2a\,\text{sn}^2b},$$

da aber

$$\frac{k'^2\,\mathfrak{Sn}'a\,\mathfrak{Cn}'a}{\mathfrak{Dn}'a} + \frac{k^2\,\text{sn}\,a\,\text{cn}\,a}{\text{dn}\,a} = \frac{k'^2\,\text{sn}\,a}{\text{cn}\,a\,\text{dn}\,a} + \frac{k^2\,\text{sn}\,a\,\text{cn}\,a}{\text{dn}\,a}$$
$$= \frac{\text{tn}\,a}{\text{dn}\,a}(k'^2+k^2\,\text{cn}^2a) = \frac{\text{tn}\,a\,\text{dn}^2a}{\text{dn}\,a} = \text{tn}\,a\,\text{dn}\,a = \text{tang}\tfrac{1}{2}\text{am}\,2a$$

ist, so ist die Gleichung (8.) in die Gleichung (5.) verwandelt worden.

§. 40.

Einige Relationen unter cyklischen Modular-Functionen mit drei und auch vier beliebigen Argumenten.

Relationen unter cyklischen Modular-Functionen, worin drei ganz beliebige Argumente vorkommen, erhält man sehr leicht, und man kann sie in grofser Menge aus den vorhin entwickelten Relationen unter den Functionen $a, b, a+b$ schon dadurch herleiten, dafs man $a=\alpha-\beta$, $b=\beta-\gamma$, also $a+b=\alpha-\gamma$ setzt. Macht man z. B. in der Gleichung

$$\text{dn}\,a\,\text{dn}\,b\,\text{dn}\,(a+b) = k'^2+k^2\,\text{cn}\,a\,\text{cn}\,b\,\text{cn}\,(a+b)$$

des §. 11. diese Substitution, so erhält man auf der Stelle die Gleichung:

1. $\mathrm{dn}(\alpha-\beta)\,\mathrm{dn}(\beta-\gamma)\,\mathrm{dn}(\gamma-\alpha) = k'^2 + k^2\,\mathrm{cn}(\alpha-\beta)\,\mathrm{cn}(\beta-\gamma)\,\mathrm{cn}(\gamma-\alpha)$, unter cyklischen Modular-Functionen, worin drei ganz beliebige Argumente α, β, γ vorkommen. Die drei Differenzen $\alpha-\beta$, $\beta-\gamma$ und $\gamma-\alpha$, worauf sich die in der Formel vorkommenden Functionen beziehen, machen die Summe Null aus; man kann aber leicht eine noch allgemeinere Relation herleiten, worin vier Argumente vorkommen, wovon eines allein so grofs ist, als die Summe der drei übrigen. Es sei $\alpha+\beta+\gamma=\delta$; setzen wir nun $\alpha+\beta=g$, dann ist $g+\gamma=\delta$, oder $g=\delta-\gamma$. Nach §. 11. ist nun, insofern $g=\alpha+\beta$ ist:

$$\mathrm{cn}\,g = \mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta - \mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,g, \qquad \mathrm{dn}\,g = \mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta - k^2\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,g,$$

und weil auch $g=\delta-\gamma$ ist, so ist

$$\mathrm{cn}\,g = \mathrm{cn}\,\delta\,\mathrm{cn}\,\gamma + \mathrm{sn}\,\delta\,\mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{dn}\,g, \qquad \mathrm{dn}\,g = \mathrm{dn}\,\delta\,\mathrm{dn}\,\gamma + k^2\,\mathrm{sn}\,\delta\,\mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{cn}\,g.$$

Durch die Multiplication der Formeln $\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta = \mathrm{cn}\,g + \mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,g$ und $\mathrm{cn}\,\gamma\,\mathrm{cn}\,\delta = \mathrm{cn}\,g - \mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{sn}\,\delta\,\mathrm{dn}\,g$ erhält man zunächst die Gleichung:

$$\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\gamma\,\mathrm{cn}\,\delta$$
$$= \mathrm{cn}^2 g + (\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta - \mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{sn}\,\delta)\,\mathrm{cn}\,g\,\mathrm{dn}\,g - \mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{sn}\,\delta\,\mathrm{dn}^2 g;$$

multiplicirt man aber die Formeln $\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta = \mathrm{dn}\,g + k^2\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,g$ und $\mathrm{dn}\,\gamma\,\mathrm{dn}\,\delta = \mathrm{dn}\,g - k^2\,\mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{sn}\,\delta\,\mathrm{cn}\,g$, so erhält man die zweite Gleichung

$$\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\gamma\,\mathrm{dn}\,\delta$$
$$= \mathrm{dn}^2 g + k^2(\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta - \mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{sn}\,\delta)\,\mathrm{cn}\,g\,\mathrm{dn}\,g - k^4\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{sn}\,\delta\,\mathrm{cn}^2 g,$$

und wenn man von ihr die mit k^2 multiplicirte erste Gleichung subtrahirt, beachtend, dafs $\mathrm{dn}^2 g - k^2\,\mathrm{cn}^2 g = k'^2$ ist, so wird das Argument g dadurch völlig eliminirt, und man erhält

$$\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\gamma\,\mathrm{dn}\,\delta - k^2\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\gamma\,\mathrm{cn}\,\delta = k'^2 + k'^2 k^2\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{sn}\,\delta,$$

oder

$$2. \qquad \frac{\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\gamma\,\mathrm{dn}\,\delta - k^2\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\gamma\,\mathrm{cn}\,\delta}{k'^2} = 1 + k^2\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{sn}\,\delta.$$

Setzt man in dieser Formel $\alpha-\beta$ für α, $\beta-\gamma$ für β und $\gamma-\alpha$ für γ, so ist $\delta=0$, also $\mathrm{cn}\,\delta = \mathrm{dn}\,\delta = 1$ und $\mathrm{sn}\,\delta = 0$; die rechte Seite reducirt sich also auf ihr erstes Glied Eins, und man kommt unter dieser Voraussetzung also auf die Gleichung (1.) wieder zurück. Die gröfsere Allgemeinheit dieser Formel (2.) besteht also darin, dafs die Summe $\delta = \alpha+\beta+\gamma$ eine beliebige sein kann, indessen kommen in der Gleichung (2.) im Grunde nur drei verschiedene Argumente α, β, γ vor, da $\delta = \alpha+\beta+\gamma$ sein soll.

§. 41.

Ausdrücke von der Form $1-k^2\,\mathrm{sn}A\,\mathrm{sn}B\,\mathrm{s..}C\,\mathrm{sn}D$, in welcher A, B, C, D vier beliebige Gröfsen sind, haben eine noch allgemeinere Form, als der in der Formel (2.) des §. 40. vorkommende ähnliche Ausdruck. Wir können, ohne die Allgemeinheit dieser Form zu vermindern, setzen:

$$A=\alpha+\beta,\quad B=\alpha-\beta,\quad C=\alpha'+\beta'\quad\text{und}\quad D=\alpha'-\beta',$$

wenn wir uns unter α, β, α', β', vier ganz willkührliche Gröfsen vorstellen. Nach §. 35. ist

$$\mathrm{sn}(\alpha+\beta).\mathrm{sn}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{sn}^2\alpha-\mathrm{sn}^2\beta}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\beta},$$

$$\mathrm{sn}(\alpha'+\beta').\mathrm{sn}(\alpha'-\beta')=\frac{\mathrm{sn}^2\alpha'-\mathrm{sn}^2\beta'}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha'\,\mathrm{sn}^2\beta'};$$

substituiren wir diese Ausdrücke, so finden wir für

$$1-k^2\,\mathrm{sn}(\alpha+\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha-\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha'+\beta')\,\mathrm{sn}(\alpha'-\beta')$$

einen Bruch, dessen Nenner das Product $(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\beta)(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha'\,\mathrm{sn}^2\beta')$, und dessen Zähler ist:

$$1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\beta-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha'\,\mathrm{sn}^2\beta'+k^4\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{sn}^2\alpha'\,\mathrm{sn}^2\beta'-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\alpha'$$
$$-k^2\,\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{sn}^2\beta'+k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\beta'+k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha'\,\mathrm{sn}^2\beta;$$

ein Theil dieses Zählers, nämlich

$$1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\alpha'-k^2\,\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{sn}^2\beta'+k^4\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\alpha'\,\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{sn}^2\beta'$$

ist gleich dem Producte $(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\alpha')(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{sn}^2\beta')$, und die vier übrigen Theile desselben $-k^2(\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\beta+\mathrm{sn}^2\alpha'\,\mathrm{sn}^2\beta'-\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\beta'-\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{sn}^2\alpha')$ sind gleich dem Producte $-k^2(\mathrm{sn}^2\alpha-\mathrm{sn}^2\alpha')(\mathrm{sn}^2\beta-\mathrm{sn}^2\beta')$; daher entsteht die Formel:

$$1-k^2\,\mathrm{sn}(\alpha+\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha-\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha'+\beta')\,\mathrm{sn}(\alpha'-\beta')=$$
$$\frac{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\alpha')(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{sn}^2\beta')}{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\beta)(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha'\,\mathrm{sn}^2\beta')}\cdot\left(1-k^2\,\frac{\mathrm{sn}^2\alpha-\mathrm{sn}^2\alpha'}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\alpha'}\cdot\frac{\mathrm{sn}^2\beta-\mathrm{sn}^2\beta'}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{sn}^2\beta'}\right),$$

welche, weil $\mathrm{sn}(\alpha+\alpha')\,\mathrm{sn}(\alpha-\alpha')=\frac{\mathrm{sn}^2\alpha-\mathrm{sn}^2\alpha'}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\alpha'}$ und $\mathrm{sn}(\beta+\beta')\,\mathrm{sn}(\beta-\beta')$ $=\frac{\mathrm{sn}^2\beta-\mathrm{sn}^2\beta'}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{sn}^2\beta'}$ ist, sich zusammenzieht auf:

$$1.\quad\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}(\alpha+\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha-\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha'+\beta')\,\mathrm{sn}(\alpha'-\beta')}{1-k^2\,\mathrm{sn}(\alpha+\alpha')\,\mathrm{sn}(\alpha-\alpha')\,\mathrm{sn}(\beta+\beta')\,\mathrm{sn}(\beta-\beta')}$$
$$=\frac{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\alpha')(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{sn}^2\beta')}{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\beta)(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha'\,\mathrm{sn}^2\beta')},$$

und eine Relation unter cyklischen Modular-Sinus ausdrückt, welche sich auf vier ganz beliebige Argumente α, β, α', β' beziehen.

Setzen wir in dieser Formel $\alpha + iK'$ für α, so verwandelt sich $\mathrm{sn}(\alpha+\beta)$ in $\frac{1}{k\,\mathrm{sn}(\alpha+\beta)}$ u. s. w.; daher verwandelt sich die vorige Formel zunächst in:

$$\frac{\mathrm{sn}(\alpha+\alpha')\,\mathrm{sn}(\alpha-\alpha')}{\mathrm{sn}(\alpha+\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha-\beta)} \cdot \frac{\mathrm{sn}(\alpha+\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha-\beta) - \mathrm{sn}(\alpha'+\beta')\,\mathrm{sn}(\alpha'-\beta')}{\mathrm{sn}(\alpha+\alpha')\,\mathrm{sn}(\alpha-\alpha') - \mathrm{sn}(\beta+\beta')\,\mathrm{sn}(\beta-\beta')} = \frac{\mathrm{sn}^2\alpha - \mathrm{sn}^2\alpha'}{\mathrm{sn}^2\alpha - \mathrm{sn}^2\beta} \cdot \frac{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{sn}^2\beta'}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha'\,\mathrm{sn}^2\beta'}.$$

Da aber

$$\frac{\mathrm{sn}(\alpha+\alpha')\,\mathrm{sn}(\alpha-\alpha')}{\mathrm{sn}^2\alpha - \mathrm{sn}^2\alpha'} = (1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\alpha')^{-1} \text{ und}$$

$$\frac{\mathrm{sn}(\alpha+\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha-\beta)}{\mathrm{sn}^2\alpha - \mathrm{sn}^2\beta} = (1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\beta)^{-1}$$

ist, so reducirt sich die Gleichung auf

$$2. \quad \frac{\mathrm{sn}(\alpha+\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha-\beta) - \mathrm{sn}(\alpha'+\beta')\,\mathrm{sn}(\alpha'-\beta')}{\mathrm{sn}(\alpha+\alpha')\,\mathrm{sn}(\alpha-\alpha') - \mathrm{sn}(\beta+\beta')\,\mathrm{sn}(\beta-\beta')} = \frac{(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\alpha')(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{sn}^2\beta')}{(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\beta)\,(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha'\,\mathrm{sn}^2\beta')},$$

welche die merkwürdige Beschaffenheit hat, dafs die Ausdrücke auf der rechten Seite in ihr und in der vorigen Gleichung (1.) ganz dieselben sind, während die Ausdrücke auf der linken Seite sehr verschiedene Gestalt haben.

§. 42.

Setzt man in der Formel (1.) $\alpha' = \alpha$ und $\beta' = \beta$, so verwandelt sie sich in die specielle Formel

$$1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(\alpha+\beta)\,\mathrm{sn}^2(\alpha-\beta) = \frac{(1 - k^2\,\mathrm{sn}^4\alpha)(1 - k^2\,\mathrm{sn}^4\beta)}{(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\beta)^2},$$

worin nur noch zwei beliebige Argumente α und β vorkommen; dieser Formel gemäfs ist aber auch

$$1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(\alpha'+\beta')\,\mathrm{sn}^2(\alpha'-\beta') = \frac{(1 - k^2\,\mathrm{sn}^4\alpha')(1 - k^2\,\mathrm{sn}^4\beta')}{(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha'\,\mathrm{sn}^2\beta')^2},$$

$$1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(\alpha+\alpha')\,\mathrm{sn}^2(\alpha-\alpha') = \frac{(1 - k^2\,\mathrm{sn}^4\alpha)(1 - k^2\,\mathrm{sn}^4\alpha')}{(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\alpha')^2},$$

$$1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(\beta+\beta')\,\mathrm{sn}^2(\beta-\beta') = \frac{(1 - k^2\,\mathrm{sn}^4\beta)(1 - k^2\,\mathrm{sn}^4\beta')}{(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{sn}^2\beta')^2},$$

und dividirt man das Product der beiden ersten Gleichungen durch das Product der dritten und vierten, so erhält man durch Ausziehung der Quadrat-Wurzel die Formel

3. $$\sqrt{\frac{[1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\alpha+\beta)\,\mathrm{sn}^2(\alpha-\beta)]\,[1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\alpha'+\beta')\,\mathrm{sn}^2(\alpha'-\beta')]}{[1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\alpha+\alpha')\,\mathrm{sn}^2(\alpha-\alpha')]\,[1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\beta+\beta')\,\mathrm{sn}^2(\beta-\beta')]}}$$
$$= \frac{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\alpha')\,(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{sn}^2\beta')}{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\beta)\,(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha'\,\mathrm{sn}^2\beta')},$$

worin der Ausdruck auf der rechten Seite wieder mit denen in den Gleichungen (1.) und (2.) übereinstimmt. *Es haben demnach die vier der Form nach sehr verschiedenen Ausdrücke:*

$$\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}(\alpha+\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha-\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha'+\beta')\,\mathrm{sn}(\alpha'-\beta')}{1-k^2\,\mathrm{sn}(\alpha+\alpha')\,\mathrm{sn}(\alpha-\alpha')\,\mathrm{sn}(\beta+\beta')\,\mathrm{sn}(\beta-\beta')},$$
$$\frac{\mathrm{sn}(\alpha+\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha-\beta)-\mathrm{sn}(\alpha'+\beta')\,\mathrm{sn}(\alpha'-\beta')}{\mathrm{sn}(\alpha+\alpha')\,\mathrm{sn}(\alpha-\alpha')-\mathrm{sn}(\beta+\beta')\,\mathrm{sn}(\beta-\beta')},$$
$$\frac{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\alpha')\,(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{sn}^2\beta')}{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\beta)\,(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha'\,\mathrm{sn}^2\beta')},$$
$$\sqrt{\frac{[1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\alpha+\beta)\,\mathrm{sn}^2(\alpha-\beta)]\,[1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\alpha'+\beta')\,\mathrm{sn}^2(\alpha'-\beta')]}{[1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\alpha+\alpha')\,\mathrm{sn}^2(\alpha-\alpha')]\,[1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\beta+\beta')\,\mathrm{sn}^2(\beta-\beta')]}},$$

in welchen α, β, α', β' vier ganz beliebige Elemente sind, immer einen und denselben Werth.

§. 43.

Setzen wir in der Gleichung

$$\frac{\mathrm{sn}(\alpha+\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha-\beta)-\mathrm{sn}(\alpha'+\beta')\,\mathrm{sn}(\alpha'-\beta')}{\mathrm{sn}(\alpha+\alpha')\,\mathrm{sn}(\alpha-\alpha')-\mathrm{sn}(\beta+\beta')\,\mathrm{sn}(\beta-\beta')}$$
$$= \frac{1-k^2\,\mathrm{sn}(\alpha+\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha-\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha'+\beta')\,\mathrm{sn}(\alpha'-\beta')}{1-k^2\,\mathrm{sn}(\alpha+\alpha')\,\mathrm{sn}(\alpha-\alpha')\,\mathrm{sn}(\beta+\beta')\,\mathrm{sn}(\beta-\beta')}$$

nun

$$\alpha=\frac{A+C-B}{2},\quad \beta=\frac{A+B-C}{2},\quad \alpha'=\frac{B+C-A}{2},\quad \beta'=\beta=\frac{B+A-C}{2},$$

so ist $\alpha+\beta=A$, $\alpha-\beta=C-B$, $\alpha'+\beta'=B$, $\alpha'-\beta'=C-A$, $\alpha+\alpha'=C$, $\alpha-\alpha'=A-B$ und $\beta-\beta'=0$; und werden diese Werthe substituirt, so erhält man auf der Stelle die Gleichung

$$\frac{\mathrm{sn}A\,\mathrm{sn}(C-B)-\mathrm{sn}B\,\mathrm{sn}(C-A)}{\mathrm{sn}C\,\mathrm{sn}(A-B)}=1-k^2\,\mathrm{sn}A\,\mathrm{sn}(C-B)\,\mathrm{sn}B\,\mathrm{sn}(C-A),$$

oder in ein wenig veränderter Gestalt

1. $$\mathrm{sn}A\,\mathrm{sn}(C-B)+\mathrm{sn}B\,\mathrm{sn}(A-C)+\mathrm{sn}C\,\mathrm{sn}(B-A)$$
$$=-k^2\,\mathrm{sn}A\,\mathrm{sn}B\,\mathrm{sn}C\,\mathrm{sn}(C-B)\,\mathrm{sn}(A-C)\,\mathrm{sn}(B-A).$$

Setzt man in dieser Gleichung, welche nur noch drei willkührliche Argumente A, B, C enthält, $A+iK'$ für A, $B+iK'$ für B und $C+iK'$ für C, so verwandelt sie sich sofort in

2. $$\frac{\mathrm{sn}(C-B)}{\mathrm{sn}A}+\frac{\mathrm{sn}(A-C)}{\mathrm{sn}B}+\frac{\mathrm{sn}(B-A)}{\mathrm{sn}C}+\frac{\mathrm{sn}(C-B)}{\mathrm{sn}A}\cdot\frac{\mathrm{sn}(A-C)}{\mathrm{sn}B}\cdot\frac{\mathrm{sn}(B-A)}{\mathrm{sn}C}=0.$$

Setzt man in diesen Gleichungen zuerst $K-A$ für A, $K-B$ für B und $K-C$ für C, und wendet man dann die Sätze des §. 31. auf sie an, so erhält man auf der Stelle

$$3.\quad \operatorname{cn}A\operatorname{cnc}(C-B)+\operatorname{cn}B\operatorname{cnc}(A-C)+\operatorname{cn}C\operatorname{cnc}(B-A)$$
$$=\frac{k^2}{k'^2}\operatorname{cn}A\operatorname{cn}B\operatorname{cn}C\operatorname{cnc}(C-B)\operatorname{cnc}(A-C)\operatorname{cnc}(B-A)$$

und

$$4.\quad \frac{\operatorname{cnc}(C-B)}{\operatorname{cn}A}+\frac{\operatorname{cnc}(A-C)}{\operatorname{cn}B}+\frac{\operatorname{cnc}(B-A)}{\operatorname{cn}C}+\frac{\operatorname{cnc}(C-B)}{\operatorname{cn}A}\cdot\frac{\operatorname{cnc}(A-C)}{\operatorname{cn}B}\cdot\frac{\operatorname{cnc}(B-A)}{\operatorname{cn}C}=0.$$

Vertauscht man in den Formeln (1.) und (2.) die beiden conjugirten Modul, und setzt man dann Ai für A, Bi für B und Ci für C, so erhält man

$$5.\quad \operatorname{tn}A\operatorname{tn}(C-B)+\operatorname{tn}B\operatorname{tn}(A-C)+\operatorname{tn}C\operatorname{tn}(B-A)$$
$$=-k'^2\operatorname{tn}A\operatorname{tn}B\operatorname{tn}C\operatorname{tn}(C-B)\operatorname{tn}(A-C)\operatorname{tn}(B-A)$$

und

$$6.\quad \frac{\operatorname{tn}(C-B)}{\operatorname{tn}A}+\frac{\operatorname{tn}(A-C)}{\operatorname{tn}B}+\frac{\operatorname{tn}(B-A)}{\operatorname{tn}C}+\frac{\operatorname{tn}(C-B)}{\operatorname{tn}A}\cdot\frac{\operatorname{tn}(A-C)}{\operatorname{tn}B}\cdot\frac{\operatorname{tn}(B-A)}{\operatorname{tn}C}=0.$$

Die Anwendung des §. 30. auf die Formeln (3.) und (4.) giebt

$$7.\quad \operatorname{dn}A\operatorname{tn}(C-B)+\operatorname{dn}B\operatorname{tn}(A-C)+\operatorname{dn}C\operatorname{tn}(B-A)$$
$$=\operatorname{dn}A\operatorname{dn}B\operatorname{dn}C\operatorname{tn}(C-B)\operatorname{tn}(A-C)\operatorname{tn}(B-A)$$

und

$$8.\quad \frac{\operatorname{tn}(C-B)}{\operatorname{dn}A}+\frac{\operatorname{tn}(A-C)}{\operatorname{dn}B}+\frac{\operatorname{tn}(B-A)}{\operatorname{dn}C}=k'^2\frac{\operatorname{tn}(C-B)}{\operatorname{dn}A}\cdot\frac{\operatorname{tn}(A-C)}{\operatorname{dn}B}\cdot\frac{\operatorname{tn}(B-A)}{\operatorname{dn}C}.$$

Zusatz. Setzt man $k=0$ in den vorstehenden Formeln, so erhält man für die trigonometrischen Functionen die Formeln:

1. $\sin A\sin(C-B)+\sin B\sin(A-C)+\sin C\sin(B-A)=0$ [aus (1.)],
2. $\cos A\sin(C-B)+\cos B\sin(A-C)+\cos C\sin(B-A)=0$ [aus (3.)],
3. $\dfrac{\sin(C-B)}{\sin A}+\dfrac{\sin(A-C)}{\sin B}+\dfrac{\sin(B-A)}{\sin C}+\dfrac{\sin(C-B).\sin(A-C).\sin(B-A)}{\sin A.\sin B.\sin C}=0$ (aus 2.),
4. $\dfrac{\sin(C-B)}{\cos A}+\dfrac{\sin(A-C)}{\cos B}+\dfrac{\sin(B-A)}{\cos C}+\dfrac{\sin(C-B).\sin(A-C).\sin(B-A)}{\cos A.\cos B.\cos C}=0$ (aus 4.),
5. $\operatorname{tang}A\operatorname{tang}(C-B)+\operatorname{tang}B\operatorname{tang}(A-C)+\operatorname{tang}C\operatorname{tang}(B-A)$
$+\operatorname{tang}A\operatorname{tang}B\operatorname{tang}C\operatorname{tang}(C-B)\operatorname{tang}(A-C)\operatorname{tang}(B-A)=0$ (aus 5.),
6. $\dfrac{\operatorname{tang}(C-B)}{\operatorname{tang}A}+\dfrac{\operatorname{tang}(A-C)}{\operatorname{tang}B}+\dfrac{\operatorname{tang}(B-A)}{\operatorname{tang}C}+\dfrac{\operatorname{tang}(C-B).\operatorname{tang}(A-C)\operatorname{tang}(B-A)}{\operatorname{tang}A\operatorname{tang}B\operatorname{tang}C}=0,$
7. $\operatorname{tang}(C-B)+\operatorname{tang}(A-C)+\operatorname{tang}(B-A)$
$=\operatorname{tang}(C-B)\operatorname{tang}(A-C)\operatorname{tang}(B-A).$

Von diesen trigonometrischen Formeln können (1.), (2.) und (7.) am einfachsten hergeleitet werden; von den Formeln (1.) und (2.) hat meines Wissens zuerst *Gauſs,* in der *Theoria motus corporum coelestium* etc. eine nützliche Anwendung gemacht; die Formeln (3.), (4.), (5.) und (6.) scheinen noch nirgendwo früher aufgestellt worden zu sein.

§. 44.

Wir benutzen die im §. 42. ausgesprochenen Sätze auch zur Umformung des Ausdrucks

$$U = \sqrt{\frac{1+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,(u+v+a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,(u+v-a)}},$$

welcher weiter unten vorkommt, und bei welchem vieles auf die Kenntnifs der Formen ankommt, in welchen er dargestellt werden kann. Setzen wir in den Gleichungen des §. 42.

$\alpha+\beta = u$, $\alpha-\beta = v$, $\alpha'+\beta' = u+v-a$ und $\alpha'-\beta' = a$,

dann ist rückwärts

$$\alpha = \alpha' = \frac{u+v}{2}, \quad \beta = \frac{u-v}{2}, \quad \beta' = \frac{u+v}{2} - a,$$

und hieraus folgt noch

$\alpha+\alpha' = u+v$, $\alpha-\alpha' = 0$, $\beta+\beta' = u-a$ und $\beta-\beta' = a-v = -(v-a)$.

Werden die hier angegebenen zusammengehörenden Werthe in den Gleichungen des §. 42. substituirt, so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$1-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,(u+v-a) = \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v - \mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,(u+v-a)}{\mathrm{sn}\,(u-a)\,\mathrm{sn}\,(v-a)}$$

$$= \frac{\left(1-k^2\,\mathrm{sn}^4\frac{u+v}{2}\right)\left(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{u-v}{2}\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}-a\right)\right)}{\left(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{u+v}{2}\,\mathrm{sn}^2\frac{u-v}{2}\right).\left(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{u+v}{2}\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}-a\right)\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v)\,(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,(u+v-a))}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(u-a)\,\mathrm{sn}^2\,(v-a)}};$$

setzen wir in diesen Formeln noch $-a$ für a, so verwandeln sie sich in:

$$1+k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,(u+v+a) = \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v + \mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,(u+v+a)}{\mathrm{sn}\,(u+a)\,\mathrm{sn}\,(v+a)}$$

$$= \frac{\left(1-k^2\,\mathrm{sn}^4\frac{u+v}{2}\right)\left(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{u-v}{2}\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}+a\right)\right)}{\left(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{u+v}{2}\,\mathrm{sn}^2\frac{u-v}{2}\right).\left(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{u+v}{2}\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}+a\right)\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v)\,(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,(u+v+a))}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(u+a)\,\mathrm{sn}^2\,(v+a)}};$$

dividirt man nun diese Gleichungen durch die vorigen, so erhält man die vier folgenden verschiedenen Ausdrücke von U:

1. $U=\sqrt{\frac{1+k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v-a)}}$,

2. $U=\sqrt{\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v-\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v-a)}}\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(u-a)\,\mathrm{sn}(v-a)}{\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+a)}}$,

3. $U=\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{u-v}{2}\,.\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}+a\right)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{u-v}{2}\,.\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}-a\right)}}\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{u+v}{2}\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}-a\right)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{u+v}{2}\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}+a\right)}}$,

4. $U=\sqrt[4]{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2(u+v+a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2(u+v-a)}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u-a)\,\mathrm{sn}^2(v-a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u+a)\,\mathrm{sn}^2(v+a)}}$,

wovon übrigens der erste die einfachste Gestalt hat.

Die Gleichung

$$1+k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)=\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)}{\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+a)},$$

welche sich nach Wegschaffung des Divisors verwandelt in:

$$\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v=\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+a)-\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)$$
$$+k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+a)\,\mathrm{sn}(u+v+a),$$

stellen wir noch auf eine bemerkenswerthe andere Weise dar. Multipliciren wir sie mit $k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v$ und subtrahiren wir beide Seiten von Eins, so erhalten wir:

$$1-k^2\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{sn}^2v=1-k^2\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{sn}v\,\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+a)+k^2\mathrm{sn}u\,\mathrm{sn}v\,\mathrm{sn}a\,\mathrm{sn}(u+v+a)$$
$$-k^4\,\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{sn}^2v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+a)\,\mathrm{sn}(u+v+a),\quad\text{oder}$$
$$1-k^2\,\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{sn}^2v=$$
$$(1-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+a))(1+k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)).$$

Setzen wir $-a$ für a, so ist also auch

$$1-k^2\,\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{sn}^2v=$$
$$(1-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u-a)\,\mathrm{sn}(v-a))(1-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v-a)).$$

Werden diese beiden Producte identificirt, so erhält man

$$\frac{1+k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v-a)}=\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u-a)\,\mathrm{sn}(v-a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+a)}.$$

Zu den vier vorhergehenden Ausdrücken der Gröfse U kommt also noch der fünfte

$$5.\quad U=\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u-a)\,\mathrm{sn}(v-a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+a)}}.$$

Macht man in den Formeln des §. 42. die folgenden Substitutionen:

$$\alpha=\frac{u+v}{2},\quad \alpha'=\frac{u+v}{2}-a,\quad \beta=\beta'=\frac{u-v}{2},\quad\text{also}\quad \alpha+\beta=u,\quad \alpha-\beta=v,$$

$\alpha'+\beta'=u-a$, $\alpha'-\beta'=v-a$, $\alpha+\alpha'=u+v-a$, $\alpha-\alpha'=a$, $\beta+\beta'=u-v$, $\beta-\beta'=0$, so erhält man die Gleichungen:

$$1-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u-a)\,\mathrm{sn}(v-a)=\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v-\mathrm{sn}(u-a)\,\mathrm{sn}(v-a)}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v-a)}$$

$$=\frac{\left(1-k^2\,\mathrm{sn}^4\,\frac{u-v}{2}\right)\left(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,\frac{u+v}{2}\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}-a\right)\right)}{\left(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,\frac{u+v}{2}\,\mathrm{sn}^2\,\frac{u-v}{2}\right)\left(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,\frac{u-v}{2}\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}-a\right)\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v)(1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u-a)\,\mathrm{sn}^2(v-a))}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2(u+v-a)}}.$$

Setzt man hierin $-a$ für a, und dividirt man die einen Gleichungen durch die andern, so erhält man noch die folgenden Ausdrücke der Gröfse U:

6. $$U=\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(u+v+a)}{\mathrm{sn}(u+v-a)}}\cdot\sqrt{\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v-\mathrm{sn}(u-a)\,\mathrm{sn}(v-a)}{\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+a)-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v}},$$

7. $$U=\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,\frac{u+v}{2}\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}-a\right)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,\frac{u+v}{2}\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}+a\right)}}\cdot\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,\frac{u-v}{2}\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}+a\right)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,\frac{u-v}{2}\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}-a\right)}},$$

8. $$U=\sqrt[4]{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2(u+v+a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2(u+v-a)}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u-a)\,\mathrm{sn}^2(v-a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u+a)\,\mathrm{sn}^2(v+a)}}.$$

Macht man aber die Substitutionen

$$\alpha=\frac{u+v-a}{2},\quad \beta=\frac{u-v-a}{2},\quad \alpha'=\frac{u+v-a}{2},\quad \beta'=\frac{u-v+a}{2},$$

so verwandelt sich der Ausdruck (5.) für U auf ähnliche Art in

9. $$U=\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(u-a)\,\mathrm{sn}\,v-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(v-a)}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(v+a)-\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+a)}},$$

10. $$U=\sqrt[4]{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,v\,\mathrm{sn}^2(u-a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,v\,\mathrm{sn}^2(u+a)}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2(v-a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2(v+a)}}.$$

Eben so, wie die Formel

$$1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v=$$
$$(1-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+a))(1+k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a))$$

gefunden wurde, findet man auch

$$1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2(u+v+a)=$$
$$(1-k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+a)\,\mathrm{sn}(u+v+a))(1+k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v+a)\,\mathrm{sn}\,a).$$

§. 45.

Wir stellen den Ausdruck U in noch drei anderen Gestalten dar. Es ist nach §. 40.:

$$1+k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,(u+v+a) = \frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,(u+v+a)-k^2\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,(u+v'+a)}{k'^2}.$$

Setzt man hierin $-a$ für a, so erhält man noch eine zweite Gleichung; dividirt man durch sie die erste, und zieht man die Quadratwurzel aus, so hat man schon:

11. $$U=\sqrt{\frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,(u+v+a)-k^2\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,(u+v+a)}{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,(u+v-a)-k^2\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,(u+v-a)}}.$$

Dividirt man den Zähler und Nenner durch

$$\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,(u+v+a)\,\mathrm{dn}\,(u+v-a),$$

so erhält man noch auf der Stelle

$$U=\sqrt{\frac{\mathrm{dn}\,(u+v+a)}{\mathrm{dn}\,(u+v-a)}}\cdot\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{snc}\,u\,\mathrm{snc}\,v\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,(u+v+a)}{1-k^2\,\mathrm{snc}\,u\,\mathrm{snc}\,v\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,(u+v-a)}}.$$

Setzt man nun $u+u'=K$, $v+v'=K$, $a+a'=K$, so ist $u+v+a=3K-(u'+v'+a')$, also $K-(u+v+a)=u'+v'+a'-2K$; ferner $u+v-a=2K-u'-v'+a'-K=K-(u'+v'-a')$; daher erhalten wir:

12. $$\begin{cases} U=\sqrt{\frac{\mathrm{dnc}\,(u'+v'+a')}{\mathrm{dnc}\,(u'+v'-a)}}\sqrt{\frac{1+k^2\,\mathrm{sn}\,u'\,\mathrm{sn}\,v'\,\mathrm{sn}\,a'\,\mathrm{sn}\,(u'+v'+a')}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,u'\,\mathrm{sn}\,v'\,\mathrm{sn}\,a'\,\mathrm{sn}\,(u'+v'-a')}}, & \text{oder} \\ U=\sqrt{\frac{\mathrm{dn}\,(u'+v'-a')}{\mathrm{dn}\,(u'+v'+a')}}\cdot\sqrt{\frac{1+k^2\,\mathrm{sn}\,u'\,\mathrm{sn}\,v'\,\mathrm{sn}\,a'\,\mathrm{sn}\,(u'+v'+a')}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,u'\,\mathrm{sn}\,v'\,\mathrm{sn}\,a'\,\mathrm{sn}\,(u'+v'-a')}}. \end{cases}$$

Wird also in dem Ausdrucke U statt jedes der drei Elemente a, u, v sein Complement gesetzt, so wird dadurch U mit $\sqrt{\frac{\mathrm{dn}\,(u+v-a)}{\mathrm{dn}\,(u+v+a)}}=\sqrt{\frac{\mathrm{dn}\,(u'+v'+a')}{\mathrm{dn}\,(u'+v'-a')}}$ multiplicirt.

Der Ausdruck U kann auch unter die Form $U=\sqrt{\frac{P+Q}{P-Q}}$ gebracht werden, so dafs $\log U=\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{Q}{P}\right)$ ist, und er mufs sogar unter diese Form gebracht werden, wenn das Argument a den Factor i enthält, damit dann $\frac{1}{i}\log U$ wieder in einer reellen Gestalt dargestellt werden könne. Setzen wir aber:

$$P+Q=1+k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,(u+v+a) \quad \text{und}$$
$$P-Q=1-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,(u+v-a),$$

so ist

$$P=1+k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\left(\frac{\mathrm{sn}\,(u+v+a)-\mathrm{sn}\,(u+v-a)}{2}\right) \quad \text{und}$$
$$Q=k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\left(\frac{\mathrm{sn}\,(u+v+a)+\mathrm{sn}\,(u+v-a)}{2}\right).$$

Da nun aber

$$\frac{\mathrm{sn}(u+v+a)-\mathrm{sn}(u+v-a)}{2} = \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}(u+v)\,\mathrm{dn}(u+v)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u+v)\,\mathrm{sn}^2 a} \quad \text{und}$$

$$\frac{\mathrm{sn}(u+v+a)+\mathrm{sn}(u+v-a)}{2} = \frac{\mathrm{sn}(u+v)\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u+v)\,\mathrm{sn}^2 a}$$

ist, so ist

$$P = 1+\frac{k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}(u+v)\,\mathrm{dn}(u+v)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u+v)\,\mathrm{sn}^2 a} \quad \text{und}$$

$$Q = \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u+v)\,\mathrm{sn}^2 a};$$

daher ist

$$\log U = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2(u+v)+k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}(u+v)\,\mathrm{dn}(u+v)}\right).$$

Der Nenner des angegebenen Bruches läfst sich noch auf zwei verschiedene Arten zusammenziehen, indem man entweder $1-\mathrm{cn}^2(u+v)$ für $\mathrm{sn}^2(u+v)$ oder $1-\mathrm{dn}^2(u+v)$ für $k^2\mathrm{sn}^2(u+v)$ substituirt. Machen wir die letzte Substitution, so ist der Nenner:

$$\mathrm{cn}^2 a+\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{dn}(u+v)\left(\mathrm{dn}(u+v)+k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}(u+v)\right),$$

und da nach §. 11. Formel (8.) ist:

$$\mathrm{dn}(u+v)+k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}(u+v) = \mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v,$$

so erhalten wir:

$$13.\quad \log U = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v)}{\mathrm{cn}^2 a+\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{dn}(u+v)}\right).$$

Das Resultat der zweiten vorhin angegebenen Substitution können wir auch aus dem so eben gefundenen Resultate herleiten. Da nach §. 11. Formel (12.) ist

$$\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{dn}(u+v) = k'^2+k^2\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{cn}(u+v),$$

so ist der Nenner, wenn dieser Werth substituirt wird,

$$\mathrm{cn}^2 a+k'^2\,\mathrm{sn}^2 a+k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{cn}(u+v),$$

und weil $\mathrm{cn}^2 a+k'^2\,\mathrm{sn}^2 a = \mathrm{dn}^2 a$ ist, so erhalten wir:

$$14.\quad \log U = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v)}{\mathrm{dn}^2 a+k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{cn}(u+v)}\right).$$

Zusatz. Wird ai für a gesetzt und der geänderte Werth von U mit U' bezeichnet, so giebt die Formel (13.):

$$15.\quad \frac{1}{i}\log U' = \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k^2\,\mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v)}{1-\mathrm{sn}'^2 a\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{dn}(u+v)}\right),$$

und die Formel (14.) verwandelt sich nun in:

$$16. \quad \frac{1}{i}\log U' = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k^2 \operatorname{tn}' a \operatorname{dn}' a \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+v)}{\operatorname{dn}'^2 a - k^2 \operatorname{sn}'^2 a \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \operatorname{cn}(u+v)}\right).$$

Setzt man ka für a, ku für u, kv für v und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k, so verwandelt sich, wenn die Sätze des §. 30. angewandt werden, der Ausdruck U wieder in sich selbst.

§. 46.

Die charakteristischen Gleichungen der Modular-Functionen.

Zum Beschlusse dieses Abschnitts leiten wir die characteristischen Gleichungen der Modular-Functionen her.

Setzen wir in der Gleichung (3.) des §. 4. jetzt $p = -1$ und $q = -k^2$ dem §. 6. gemäfs, ferner $x = \operatorname{sn} v$, $y = \operatorname{sn} w$ und $z = \operatorname{sn} u$, da $u = v + w$ sein soll, so erhalten wir die Gleichung

$$1. \quad \operatorname{sn}^2 v + 2\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u . \operatorname{sn} v \operatorname{sn} w + \operatorname{sn}^2 w + k^2 \operatorname{sn}^2 u . \operatorname{sn}^2 v \operatorname{sn}^2 w = \operatorname{sn}^2 u,$$

welche in Hinsicht auf die Gröfsen $\operatorname{sn} v$ und $\operatorname{sn} w$ symmetrisch ist. Setzen wir in dieser Gleichung $K - v$ für v und $K - w$ für w, so verwandelt sich u in $2K - u$, also $\operatorname{cn} u$ in $-\operatorname{cn} u$, und die Gleichung wird also

$$\operatorname{snc}^2 v - 2\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u . \operatorname{snc} v \operatorname{snc} w + \operatorname{snc}^2 w + k^2 \operatorname{sn}^2 u . \operatorname{snc}^2 v \operatorname{snc}^2 w = \operatorname{sn}^2 u.$$

Die Anwendung der Sätze des §. 31. verwandelt diese Formel in

$$\operatorname{cn}^2 v - 2\operatorname{snc} u \frac{\operatorname{dnc} u}{k'} . \operatorname{cn} v \operatorname{cn} w + \operatorname{cn}^2 w - \frac{k^2}{k'^2} \operatorname{cnc}^2 u . \operatorname{cn}^2 v \operatorname{cn}^2 w = \operatorname{cnc}^2 u.$$

Da aber $\operatorname{snc} u \operatorname{dnc} u = \frac{k' \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^2 u}$, $\frac{k^2}{k'^2} \operatorname{cnc}^2 u = \frac{k^2 \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u}$ ist, so haben wir als characteristische Gleichung der cyklischen Modular-Cosinus

$$2. \quad \operatorname{cn}^2 v - \frac{2\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^2 u} . \operatorname{cn} v \operatorname{cn} w + \operatorname{cn}^2 w - \frac{k^2 \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u} . \operatorname{cn}^2 v \operatorname{cn}^2 w = \frac{k'^2 \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u}.$$

Durch Anwendung der Sätze des §. 30. verwandelt sich diese Gleichung sofort in

$$3. \quad \operatorname{dn}^2 v - \frac{2\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u} . \operatorname{dn} v \operatorname{dn} w + \operatorname{dn}^2 w - \operatorname{tn}^2 u . \operatorname{dn}^2 v \operatorname{dn}^2 w = -k'^2 \operatorname{tn}^2 u.$$

Vertauscht man in der Gleichung (1.) die beiden conjugirten Modul, vi für v und wi für w setzend, so erhält man

$$4. \quad \operatorname{tn}^2 v + 2\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u} . \operatorname{tn} v \operatorname{tn} w + \operatorname{tn}^2 w + k'^2 \operatorname{tn}^2 u \operatorname{tn}^2 v \operatorname{tn} w = \operatorname{tn}^2 u,$$

als characteristische Gleichung der cyklischen Modular-Tangenten.

Die characteristischen Gleichungen haben also für jede Art der cyklischen Modular-Functionen die Form

$$x^2 + 2axy + y^2 + b.x^2y^2 = e,$$

worin x und y zwei gleichnamige cyklische Modular-Functionen der Argumente v und w bezeichnen; die Gleichung ist jeden Falles symmetrisch und vom vierten Grade, in Ansehung der einzelnen Gröfsen x und y selbst ist sie aber nur vom zweiten Grade.

Für die hyperbolischen Modular-Functionen gilt dasselbe Gesetz, da man, um die charakteristischen Gleichungen für sie zu finden, in den vorhin gefundenen Gleichungen nur vi für v und wi für w, also ui für u zu setzen braucht.

(Die Fortsetzung folgt im nächsten Hefte.)

11.

Einiges in Bezug auf den im II. Bande d. J. No. 63. S. 291. aufgestellten Lehrsatz.

(Von Hrn. Dr. *F. Heinen.*)

---

1. Sind an zwei beliebige Puncte A_m, A_{m+1} die beliebigen (positiven) Zahlen a_m, a_{m+1} angeschrieben, und theilt man die Verbindungslinie $A_m A_{m+1}$ im umgekehrten Verhältnisse dieser Zahlen, so möge der von A_m um a_{m+1} entfernt liegende Theilungspunct S_{m+1} der Schwerpunct der Zahlpuncte A_m, A_{m+1} für die Zahlen a_m, a_{m+1} heifsen. Ist überhaupt irgend eine Anzahl n von Zahlpuncten A_1, A_2, A_3, ... A_n, welche mit den beliebigen Zahlen a_1, a_2, a_3, ... a_n bezeichnet sind, im Raume gegeben, und ordnet man die Puncte in irgend einer Weise, z. B. nach der Ordnung der gewählten Bezeichnung, bestimmt alsdann für die beiden ersten Zahlpuncte A_1, A_2 den Schwerpunct S_2 und bezeichnet ihn mit der Summe $a_1 + a_2 = s_2$, bestimmt ferner den Schwerpunct S_3 von S_2 und A_3, und bezeichnet ihn mit der Summe $s_2 + a_3 = s_3$ und fährt so fort, bis man zuletzt einen Punct S_n erhält, welcher mit der Summe sämmtlicher Zahlen s_n zu bezeichnen wäre, so möge der Punct S_n der Schwerpunct des Systems der Zahlpuncte A_1, A_2, ... A_n für die Zahlen a_1, a_2, ... a_n heifsen, und es ist bekannt, dafs, in welcher Art auch die Puncte ursprünglich geordnet sein mögen, man immer denselben Punct S_n erhält.

2. Verbindet man irgend zwei Zahlpuncte A_m, A_{m+2}, welche mit den beliebigen Zahlen a_m, a_{m+1} bezeichnet sind, durch eine Gerade $A_m A_{m+1}$ und zieht man von einem beliebigen Puncte P nach A_m, A_{m+1} und nach ihrem Schwerpuncte S_{m+1} die Geraden PA_m, PA_{m+1}, PS_{m+1}, so hat man stets

$$\text{I.}\quad a_m . PA_m^2 + a_{m+1} . PA_{m+1}^2 = (a_m + a_{m+1}) PS_{m+1}^2 + \frac{a_{m+1} \cdot a_m}{a_m + a_{m+1}} . A_m A_{m+1}^2 .$$

Denn in dem Dreiecke $PS_{m+1} A_m$ ist

$$PA_m^2 = PS_{m+1}^2 + S_{m+1} A_m^2 - 2 PS_{m+1} . S_{m+1} A_m . \cos(PS_{m+1} A_m),$$

oder

$$PA_m^2 =$$

$$PS_{m+1}^2 + \frac{a_{m+1}^2}{a^m + a^{m+1}} . A_m A_{m+1}^2 - \frac{2\,a_{m+1}}{a_m + a_{m+1}} . A_m A_{m+1} . PS_{m+1} . \cos(PS_{m+1} A_m) .$$

Eben so ergiebt sich aus dem Dreiecke $PS_{m+1} A_{m+1}$, dafs

$$PA_{m+1}^2 =$$

$$PS_{m+1}^2 + \frac{a_m^2}{a_m + a_{m+1}} . A_m A_{m+1}^2 - \frac{2\,a_m}{a_m + a_{m+1}} . A_m A_{m+1} . PS_{m+1} \cos(PS_{m+1} A_{m+1})$$

ist. Beachtet man nun, dafs $\cos(PS_{m+1} A_m) = -\cos(PS_{m+1} A_{m+1})$ ist, multiplicirt die erste dieser Gleichungen mit a_m, die letzte mit a_{m+1} und addirt sie alsdann, so erhält man die zu beweisende Relation.

3. Ist im Raume irgend eine Anzahl n von beliebigen Zahlpuncten $A_1, A_2, A_3, \ldots . A_n$ gegeben, welche mit den beliebigen Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots \ldots a_n$ bezeichnet sind, und ordnet man die Puncte auf beliebige Weise, z. B. in der Ordnung der gewählten Bezeichnung, zieht alsdann aus dem ersten nach dem zweiten die Gerade $A_1 A_2$, bezeichnet den Schwerpunct S_2 der Zahlpuncte A_1, A_2 mit der Summe $a_1 + a_2 = s_2$, zieht von S_2 nach dem dritten Zahlpuncte A_3 die Gerade $S_2 A_3$, bezeichnet den Schwerpunct S_3 von S_2, A_3 mit der Summe $s_2 + a_3 = s_3$, und fährt so fort, bis man zuletzt eine Linie $S_{n-1} A_n$ und auf ihr den Schwerpunct des Systems S_n erhält, multiplicirt hierauf die Quadrate der Geraden $A_1 A_2$, $S_2 A_3$, $S_3 A_4$, ... $S_{n-1} A_n$ der Reihe nach mit den Brüchen $\frac{a_2 . a_1}{s_2}$, $\frac{a_3 . s_2}{s_3}$, $\frac{a_4 . s_3}{s_4}$, ... $\frac{a_n . s_{n-1}}{s_n}$, so hat die Summe

$$\frac{a_2 . a_1}{s_2} A_1 A_2^2 + \frac{a_3 . s_2}{s_3} . S_2 A_3^2 + \frac{a_4 . s_3}{s_4} . S_3 A_4^2 + \ldots . \frac{a_n . s_{n-1}}{s_n} . S_{n-1} A_n^2$$

stets dieselbe Gröfse, in welcher Ordnung man auch die Zahlpuncte ursprünglich hat auf einander folgen lassen; und zwar ist sie gleich der Summe der Producte der Zahlen, mit welchen die einzelnen Puncte bezeichnet sind, in die Quadrate der Entfernungen derselben vom Schwerpuncte des Systems.

Zieht man nämlich von einem beliebigen Puncte P nach den Zahlpuncten $A_1, A_2, \ldots . A_n$ und nach $S_2, S_3, \ldots . S_n$ die Geraden PA_1, $PA_2, \ldots . PA_n$, $PS_2, PS_3, \ldots . PS_n$, so leitet man aus dem vorhergehenden Satze unmittelbar folgende Gleichungen ab:

$$a_1.PA_1^2 + a_2.PA_2^2 = s_2.PS_2^2 + \frac{a_2 \cdot a_1}{s_2} A_1A_1^2,$$

$$s_2.PS_2^2 + a_3.PA_3^2 = s_3.PS_3^2 + \frac{a_3 \cdot s_2}{s_3} S_2A_3^2,$$

. . . . . .

$$s_{n-2}.PS_{n-2}^2 + a_{n-1}.PA_{n-1}^2 = s_{n-1}.PS_{n-1}^2 + \frac{a_{n-1} \cdot s_{n-2}}{s_{n-1}} S_{n-2}A_{n-1}^2,$$

$$s_{n-1}.PS_{n-1}^2 + a_n.PA_n^2 = s_n.PS_n^2 + \frac{a_n \cdot s_{n-1}}{s_n} S_{n-1}A_n.$$

Werden diese Gleichungen addirt, so erhält man, indem man bemerkt, dafs jedesmal das erste Glied auf der rechten Seite in einer Gleichung gleich ist dem ersten auf der linken in der folgenden,

$$\text{II.} \quad a_1.PA_1^2 + a_2.PA_2^2 + \ldots . a_n.PA_n^2$$
$$= \frac{a_2 \cdot a_1}{s_2}.A_1A_2^2 + \frac{a_3 \cdot s_2}{s_3} S_2A_3^2 + \ldots . \frac{a_n \cdot s_{n-1}}{s_n} S_{n-1}A_n^2 + s_n.PS_n^2.$$

Lassen wir nun den willkührlich angenommenen Punct P mit dem Schwerpuncte des Systemes S_n zusammenfallen, so ist $PS_n = 0$ und wir erhalten durch Vertauschung von P mit S_n,

$$\text{III.} \quad a_1.S_nA_1^2 + a_2.S_nA_2^2 + \ldots . a_n.S_n.A_n^2$$
$$= \frac{a_2 \cdot a_1}{s_2}.A_1A_2^2 + \frac{a_3 \cdot s_2}{s_3} S_2A_3^2 + \ldots . \frac{a_n \cdot s_{n-1}}{s_n} S_{n-1}A_n^2;$$

wie oben behauptet worden ist.

3. Von den vielen Folgerungen, welche sich aus den vorhin aufgestellten Formeln leicht ziehen lassen, wollen wir nur folgende anführen.

„Beschreibt man aus dem Schwerpuncte eines Systemes von be„liebig im Raume gegebenen Zahlpuncten mit beliebigem Halbmesser eine „Kugel, zieht alsdann von einem beliebigen Puncte der Kugelfläche nach „den gegebenen Puncten gerade Linien, und multiplicirt die Quadrate derse„ben mit den den Puncten zugehörigen Zahlen, so bleibt die Summe die„ser Producte immer dieselbe, wie man auch den Punct auf der Kugel„fläche annehmen möge."

Der Beweis dieser Verallgemeinerung des bekannten Apollonischen Satzes ergiebt sich unmittelbar aus (II.) und (III.), indem man aus diesen Gleichungen erhält:

$$\text{IV.} \quad a_1.PA_1^2 + a_2.PA_2^2 + \ldots . a_n.PA_n^2$$
$$= a_1.S_nA_1^2 + a_2.S_nA_2^2 + \ldots . a_n.S_nA_n^2 + s_nPS_n^2.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite bleibt offenbar so lange constant, als PS_n eine unveränderliche Gröfse behält.

Bemerken wir, dafs die Coëfficienten $a_1, a_2, \ldots . a_n, s_n$ alle positiv sind, so lesen wir in der vorigen Gleichung noch folgenden Lehrsatz:

„Zieht man von dem Schwerpuncte eines Systems von Zahlpuncten „nach den einzelnen Puncten gerade Linien und multiplicirt die Quadrate „dieser Geraden mit den zugehörigen Zahlen, so ist die Summe dieser „Producte kleiner als die Summe ähnlich gebildeter Producte für jeden „beliebigen andern Punct, der nicht mit dem Schwerpuncte zusammenfällt."

Es ist übrigens dieser Satz nur ein specieller Fall eines allgemeinen und umfassenden Satzes, welcher sich in dem Programme des Clever Gymnasiums von 1834 aufgestellt findet.

„Bezeichnet man für ein System von Zahlpuncten die Summe der „Producte der zugehörigen Zahlen in die Quadrate der Entfernungen ei- „nes beliebigen Punctes P von den gegebenen Puncten mit E, und die „Summe der Producte derselben Zahlen, zu zwei genommen, in die Qua- „drate der Abstände der entsprechenden Puncte von einander mit Q, so „hat man für die Entfernung des Schwerpunctes des Systems S_n von je- „nem Puncte P stets:

$$PS_n = \frac{1}{s_n}\sqrt{(s_n.E - Q)},$$

„in welcher Gleichung s_n wieder, wie oben, die Summe der den Zahl- „puncten zugehörigen Zahlen bezeichnet."

Nimmt man nämlich den willkührlichen Punct P allmählig in den verschiedenen Puncten des Systems an und vertauscht demgemäfs in der Gleichung (IV.) P nach und nach mit $A_1, A_2, A_3, \ldots . A_n$, so erhält man, da die Linien $A_1A_1, A_2A_2, \ldots . A_nA_n$ sämmtlich $= 0$ sind, die n Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&a_2.A_1A_2^2 + a_3.A_1A_3^2 + \ldots . a_n.A_1A_n^2 \\
&= a_1.S_nA_1^2 + a_2.S_nA_2^2 + \ldots . a_n.S_nA_n^2 + s_n.A_1S_n^2, \\
&a_1.A_2A_1^2 + a_3.A_2A_3^2 + \ldots . a_n.A_2A_n^2 \\
&= a_1.S_nA_1^2 + a_2.S_nA_2^2 + \ldots . a_n.S_nA_n^2 + s_n.A_2R_n^2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_1.A_nA_1^2 + a_2.A_nA_2^2 + \ldots . a_{n-1}.A_nA_{n-1}^2 \\
&= a_1.S_nA_1^2 + a_2.S_nA_2^2 + \ldots . a_n.S_nA_n^2 + s_n.A_nS_n^2.
\end{aligned}$$

Multiplicirt man nun die erste Gleichung mit a_1, die zweite mit a_2, ...

die $n$te mit a_n und addirt sämmtliche Gleichungen, indem man bemerkt, dafs $a_{m-1}.a_m.A_{m-1}A_m^2 = a_m.a_{m-1}.A_m A_{m-1}^2$ ist, so erhält man, wenn man durch 2 auf beiden Seiten dividirt,

$$\text{V.}\quad a_1.a_2.A_1A_2^2 + a_1.a_3.A_1A_3^2 + \ldots. a_2.a_3.A_2A_3^2 + \ldots. a_3.a_4.A_3A_4^2 + \ldots.$$
$$\ldots. a_{n-1}.a_n.A_{n-1}A_n^2 = s_n[a_1.S_nA_1^2 + a_2.S_nA_2^2 + \ldots. a_n.S_nA_n^2],$$

oder nach (IV.)

$$= s_n[a_1.PA_1^2 + a_2.PA_2^2 + \ldots. a_n.PA_n^2 - s_n.PS_n^2],$$

mithin, der angezeigten Bezeichnung gemäfs:

$$Q = s_n[E - s_n.PS_n^2],$$

folglich

$$\text{VI.}\quad PS_n = \frac{1}{s_n}\sqrt{(s_n.E - Q)}.$$

Mittelst dieser Formel läfst sich also die Entfernung des Schwerpunctes von einem willkührlich angenommenen Puncte blofs durch die gegenseitige Lage der gegebenen Puncte und ihre zugehörigen Zahlen bestimmen. Durch seine Entfernungen von drei Puncten ist seine Lage bekanntlich völlig bestimmt und es verschwinden alle fremdartigen Stücke aus der obern Gleichung, wenn man für dieselben drei Puncte des Systems annimmt. Analytische Beweise dieser Formel haben *Lagrange* in der *Théorie des fonctions. pag. 362.* und in der *Mec. analytique. T. I. Sect. III. No. 20.*, so wie *Laplace* in der *Mec. celeste. II. Chap. III. No. 15.* zu dem gedachten Zwecke gegeben. Es läfst sich aber dieselbe Formel auch zur unmittelbaren Berechnung der Mittelkraft eines Systems von Kräften anwenden, welche sich in einem Puncte schneiden und der Gröfse und Richtung nach durch gerade Linien dargestellt sind, indem diese stets gleich ist der Entfernung des Schwerpunctes der Endpuncte dieser Linien von dem gemeinschaftlichen Angriffspuncte, multiplicirt mit der Anzahl der Kräfte. Dieser und andere bezügliche Sätze finden sich ebenfalls in dem oben gedachten Programme.

4. Betrachten wir den besondern Fall, in welchem alle Coëfficienten $a_1, a_2, a_3, \ldots. a_n = 1$ sind, so verwandelt sich die Gleichung (III.) in:

$$S_nA_1^2 + S_nA_2^2 + \ldots. S_nA_3^2 = \tfrac{1}{2}A_1A_2^2 + \tfrac{2}{3}S_2A_3^2 + \ldots. \frac{n-1}{2}S_{n-1}A_n^2,$$

und enthält mithin den Beweis des im II. Bd. d. J. No. 63. aufgestellten Lehrsatzes.

Wir können unter derselben Voraussetzung eine Reihe geometrischer Sätze aus den obigen Formeln herleiten; z. B. folgende:

„In jedem Tetraeder ist: 1. Die Summe der Quadrate zweier gegenüberstehenden Kanten, nebst dem Vierfachen derjenigen Geraden, welche ihre Mitten verbindet, gleich der Summe der Quadrate der übrigen Kanten. 2. Die Summe der Quadrate der drei Geraden, welche die Mitten der gegenüberstehenden Kanten verbinden, oder der Entfernungen des Schwerpunctes von den vier Spitzen, ist gleich dem vierten Theil der Summe der Quadrate der sechs Kanten."

Ferner:

„In jedem Parallelepiped ist die Summe der Quadrate der vier Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der zwölf Kanten."

Und ähnliche.

Wir wollen indessen hierauf nicht weiter eingehen; dagegen einen andern, soviel wir wissen, neuen Lehrsatz hier anknüpfen, indem er als ein zweckmäfsiges Beispiel dienen dürfte, um den Gebrauch der obigen Formeln zu zeigen.

„Begegnen drei Geraden, welche sich in einem Puncte P unter „rechten Winkeln schneiden, einer Kugel, deren Mittelpunct C sei, und „verbindet man, indem man das System dieser Geraden um den gemeinschaftlichen Durchschnittspunct P sich drehen läfst, in jeder seiner „Lagen, je drei der Durchschnittspuncte mit der Kugel durch Sehnen zu „Dreiecken, so ist der geometrische Ort für die Schwerpuncte dieser Dreiecke eine Kugel, deren Mittelpunct auf der festen Geraden PC und „zwar von C aus in einer Entfernung liegt, welche gleich $\frac{2}{3}PC$ ist. Eben so „ist der geometrische Ort der Schwerpuncte der Pyramiden, deren Grundflächen jene Dreiecke sind, und deren Spitzen in dem Puncte P liegen, „eine Kugel, deren Mittelpunct auf PC in einer Entfernung von C aus „liegt, welche gleich $\frac{3}{4}PC$ ist. Der Halbmesser der ersten Kugel ist, „wenn R den Halbmesser der Kugel C bedeutet, gleich $\frac{1}{3}\sqrt{(3R^2-2PC^2)}$, „der der letztern $\frac{1}{4}\sqrt{(3R^2-2PC^2)}$."

Bezeichnen wir nämlich Fig. 11. drei der Durchschnittspuncte der drei Geraden mit der Kugel durch D, E, F und den Schwerpunct des durch sie bestimmten Dreiecks DFE mit S, so haben wir zunächst, weil die Dreiecke DPF, DPE, FPE bei P rechtwinklig sind,

$$DF^2 = PD^2 + PF^2, \qquad FE^2 = PF^2 + PE^2, \qquad DE^2 = PE^2 + PD^2,$$

also

$$1. \quad DF^2 + FE^2 + DE^2 = 2(PF^2 + PE^2 + PD^2).$$

Zieht man nun von P nach S die Gerade PS, so ist nach Formel (V.)

$$2. \quad DF^2 + FE^2 + DE^2 = 3(PF^2 + PE^2 + PD^2 - 3.PS^2),$$

mithin, wenn man beide Gleichungen verbindet,

$$3. \quad DF^2 + FE^2 + DE^2 = 18\,PS^2.$$

Man erhält aber auch, wenn man die Halbmesser CF, CE, CD und nach S die Linie CS zieht, nach derselben Formel:

$$4. \quad DF^2 + FE^2 + DE^2 = 3(3R^2 - 3.CS^2) = 9(R^2 - CS^2),$$

also aus (3.) und (4.):

$$2PS^2 = R^2 - CS^2 \qquad \text{oder} \qquad 5. \quad 2PS^2 + CS^2 = R^2.$$

Denken wir uns nun den Punct P mit der Zahl 2 und den Punct C mit der Zahl 1 bezeichnet, und ziehen von dem Puncte S nach dem Schwerpuncte T dieser Zahlpuncte, welcher also um $\frac{2}{3}PC$ von C aus auf PC liegt, die Gerade ST, so ist nach Formel (I.)

$$2.PS^2 + CS^2 = \tfrac{2}{3}PC^2 + 3.ST^2,$$

mithin, gemäfs der Gleichung (5.),

$$3\,SF^2 + \tfrac{2}{3}PC^2 = R^2 \qquad \text{oder} \qquad SF = \tfrac{1}{3}\sqrt{(3R^2 - 2PC^2)}.$$

Um den zweiten Theil unseres Satzes zu beweisen, könnten wir wieder direct verfahren; wir gelangen aber auf folgende Weise kürzer zum Ziele.

Es sei S' der Schwerpunct der Pyramide $PDET$, welcher bekanntlich auf der Linie PS liegt, und durch S', in der Ebene SPC, die Linie $S'T'$ parallel mit ST gezogen, so ist $\frac{PT'}{PT} = \frac{ST'}{ST} = \frac{PS'}{PS} = \frac{3}{4}$; also $PT' = \frac{3}{4}PT = \frac{1}{4}PC$ oder $CT' = \frac{3}{4}CP$, und $ST' = \frac{3}{4}ST = \frac{1}{4}\sqrt{(3R^2 - 2CP^2)}$.

Liegt der Punct P auf der Kugelfläche, so ist $CP = R$, also $ST = \frac{R}{3}$ und $ST' = \frac{1}{4}R$. Eine interessante Beziehung.

Nehmen wir an, die drei Geraden berührten die Kugel, so ist $PE = PF = PD$, also $PC^2 = 3\,PE^2 = 3(PC^2 - R^2)$, oder $2PC^2 = 3R^2$; mithin ist sowohl ST als $S'T' = 0$, ferner $CT = \frac{2}{3}PC = \frac{2}{3}R\sqrt{\frac{3}{2}} = R\sqrt{\frac{2}{3}}$ und $CT' = \frac{3}{4}PC = \frac{3}{4}R\sqrt{\frac{3}{2}}$. Es liegen also die Schwerpuncte S, S' in diesem Falle immer auf der Linie PC in den für CT, CT' angegebenen Entfernungen von C.

Ist $PC > R\sqrt{\frac{3}{2}}$, so wird der obige Werth von ST imaginair, und wir sehen also, dafs $PC = R\sqrt{\frac{3}{2}}$ die gröfste Entfernung ist, in welcher der gemeinschaftliche Durchschnittspunct dreier unter sich rechtwinkliger Geraden liegen kann, wenn sie sämmtlich der Kugel C begegnen sollen.

Schliefslich möge noch ein analytischer Beweis des obigen Satzes, da er nicht weniger einfach sein dürfte, hier eine Stelle finden.

Nehmen wir nämlich den Anfangspunct rechtwinkliger Coordinaten im Puncte P und die drei sich rechtwinklig in P durchschneidenden Geraden PD, PE, PF als Axen der x, y, z an, und bezeichnen die Coordinaten des Mittelpunctes der Kugel durch α, β, γ, so haben wir, welche immer auch die Lage der Axen gegen PC sein möge, für die Gleichung der Kugel:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 = R^2;$$

also für die Coordinaten der Durchschnittspuncte der Kugel mit den drei Axen, in jeder Lage derselben:

$$\begin{aligned} x &= \alpha \pm \sqrt{(R^2-(\beta^2+\gamma^2))}, \quad y = 0, \quad z = 0; \\ y &= \beta \pm \sqrt{(R^2-(\alpha^2+\gamma^2))}, \quad x = 0, \quad z = 0; \\ z &= \gamma \pm \sqrt{(R^2-(\alpha^2+\beta^2))}, \quad y = 0, \quad z = 0. \end{aligned}$$

Bezeichnen nun X, Y, Z die Coordinaten des Schwerpunctes S eines der durch drei dieser Durchschnittspuncte bestimmten Dreiecks, so ist bekanntlich hiernach

$$\begin{aligned} X &= \tfrac{1}{3}[\alpha \pm \sqrt{(R^2-(\beta^2+\gamma^2))}], \\ Y &= \tfrac{1}{3}[\beta \pm \sqrt{(R^2-(\alpha^2+\gamma^2))}], \\ Z &= \tfrac{1}{3}[\gamma \pm \sqrt{(R^2-(\alpha^2+\beta^2))}]. \end{aligned}$$

Die Coordinaten des ersten Drittels T der Linien PC, von P aus, sind aber $x = \frac{\alpha}{3}$, $x = \frac{\beta}{3}$, $z = \frac{\gamma}{3}$. Setzt man nun diese Werthe der Coordinaten der Puncte S und T in die allgemeine Formel

$$D^2 = ST^2 = (X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2,$$

so findet man sogleich

$$\begin{aligned} ST^2 &= \tfrac{1}{9}(R^2-(\beta^2+\gamma^2)) + \tfrac{1}{9}(R^2-(\alpha^2+\gamma^2)) + \tfrac{1}{9}(R^2-(\alpha^2+\beta^2)) \\ &= \tfrac{1}{3}(R^2-\tfrac{2}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)), \end{aligned}$$

oder, da $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = PC^2$ ist,

$$ST^2 = \tfrac{1}{9}(3R^2-2PC^2),$$

also

$$ST = \tfrac{1}{3}\sqrt{(3R^2-2PC^2)}.$$

Eben so ergiebt sich, wenn man bemerkt, dafs man für die Coordinaten X', Y', Z' des Schwerpunctes S' einer der in Rede stehenden Pyramiden die Ausdrücke

$$X' = \tfrac{1}{4}[\alpha \pm \sqrt{(R^2 - (\beta^2 + \gamma^2))}],$$
$$Y' = \tfrac{1}{4}[\beta \pm \sqrt{(R^2 - (\alpha^2 + \gamma^2))}],$$
$$Z' = \tfrac{1}{4}[\gamma \pm \sqrt{(R^2 - (\alpha^2 + \beta^2))}]$$

hat und dafs die Coordinaten des ersten Viertels T' auf PC, von P aus, $x = \frac{1}{4}\alpha$, $y = \frac{1}{4}\beta$, $z = \frac{1}{4}\gamma$ sind, für $S'T'^2$, durch Substitution in dieselbe Formel:

$$S'T'^2 = \tfrac{1}{16}(3R^2 - 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)) \quad \text{oder} \quad S'T' = \tfrac{1}{4}\sqrt{(3R^2 - 2PC^2)}.$$

Da in den Werthen von ST und $S'T'$ nichts vorkommt, was auf die Lage der Axen Bezug haben könnte, so ist unser Satz bewiesen.

Cleve, im August 1835.

12.

Auflösung der 10. Aufgabe im Anhange zum 1. Bande des Steinerschen Werkes „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit etc."

(Vom Herrn *A. Kramer*, Stud. philos. zu Berlin.)

„Zwei beliebige projectivische Geraden A, A_1, *in einer Ebene so zu legen, dafs sie einen Kreis erzeugen (§. 40. 1.)"*

Es seien A und A_1 (Fig. 12.) zwei Tangenten eines Kreises und $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}_1$ die Berührungspuncte. Nach §. 37. des *Steiner*'schen Werkes sind die genannten Geraden in Bezug auf die Puncte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_1$ ...., in welchen sie von andern Tangenten des Kreises $a, b, d, \ldots$ geschnitten werden, projectivisch, und namentlich sind in ihrem Durchschnitte die den Berührungspuncten $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}_1$ entsprechenden Puncte $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{f}$ vereinigt. Die beziehlich mit A_1, A parallelen Tangenten r, q sind die sogenannten Parallelstrahlen dieser Graden. Die Durchschnitte derselben $\mathfrak{r}, \mathfrak{q}$ liegen so, dafs die Linie $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ durch den Mittelpunct M des Kreises geht und die Abschnitte $\mathfrak{f}\mathfrak{r}$, nq_1 einander gleich sind. Ferner liegen in A, A_1 die Berührungspuncte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ und die Puncte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}$ beziehlich auf einerlei Seite der vereinigten Puncte $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{e}_1$, und zwar befinden sich $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ beziehlich zwischen $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$.

Die bisher an Fig. 12. beobachteten Eigenschaften, sowohl der Graden A, A_1 selbst als ihrer Lage, müssen offenbar stattfinden, so oft zwei projectivische Geraden so gelegt worden sind, dafs sie einen Kreis erzeugen; jene Eigenschaften lassen sich daher umgekehrt als die Bedingungen auffassen, unter welchen allein es möglich ist, zwei projectivische Geraden auf die verlangte Weise zu legen. Es ist nun im Voraus zu bemerken, dafs projectivisch ähnliche oder gleiche Geraden aus der gegenwärtigen Untersuchung wegfallen, weil sie (§. 40. a. a. O.) stets nur Parabeln erzeugen können. Daher ist im Folgenden der Ausdruck „beliebige projectivische Geraden" nur mit der Einschränkung zu verstehen, dafs die Geraden weder projectivisch ähnlich noch gleich sein dürfen. Wie nun aber, wenn

in zwei Graden die projectivische Beziehung durch drei Paare entsprechender Puncte, a, b, d und a_1, b_1, d_1, bestimmt ist, die Durchschschnitte r, q_1 der Parallelstrahlen und die sämmtlichen übrigen entsprechenden Punctenpaare aufgefunden werden können, ist in §. 24. III., a. a. O. erörtert.

Die zwei Puncte f, e, zweier beliebiger projectivischen Geraden A, A_1, welche in dem Durchschnitte der letztern zu vereinigen sind, damit ein Kreis erzeugt werde, unterliegen nach dem Obigen einer doppelten Bedingung. Um nun sämmtliche Punctenpaare f, e, ... in A, A_1 zu finden, welche dieser Bedingung vollständig genügen, denke man sich die Geraden aufeinander gelegt, und zwar so, dafs die Puncte r, q_1 zusammentreffen. Liegen (Fig. 13.) A, A_1 gleichliegend aufeinander (§. 16. a. a. O.) so treffen keine solche Punctenpaare zusammen, nach deren Vereinigung im Durchschnitte der genannten Geraden diese einen Kreis erzeugen können, da jedem zusammenliegenden Punctenpaare f, d_1 ein jenseits r, q_1 liegendes Paar d, f_1 entspricht. Sind A, A_1 ungleichliegend aufeinandergebracht (Fig. 14.), so fallen, zu verschiedenen Seiten und in gleichen Abständen von r, q_1, zwei entsprechende Punctenpaare g, g_1 und h, h_1 zusammen (§. 15. I. a. a. O.). Von den in der Strecke $g\,h$ ($g_1\,h_1$) zusammenliegenden Punctenpaaren, z. B. c, b_1, darf deshalb keines im Durchschnitte der Geraden vereinigt werden, weil ihre entsprechenden b, c_1 und die Puncte r, q_1 nicht auf einerlei Seite jener Puncte c, b liegen. Dagegen wird zu beiden Seiten der Strecke $g\,h$ (g_1, h_1) jedes zusammenliegende Punctenpaar f, e_1; b, c_1 u. s. w. der Forderung Genüge thun.

Hat man nun eines der genannten Punctenpaare, etwa f, e_1, im Durchschnitte der Geraden A, A_1 vereinigt (Fig. 12.), so ist noch übrig, den Winkel zu bestimmen, unter welchem dieselben zu einander geneigt sein müssen, damit sie einen Kreis erzeugen. Dafs derselbe nicht willkührlich sei, sieht man daraus, dafs das begrenzte Stück $a\,a_1$ irgend eines Projectionsstrahles a der Summe der Abstände $a\,e$ und $a_1\,f_1$ gleich sein mufs; oder auch daraus, dafs die zwei aus der Mitte M von $r\,q_1$ nach den Berührungspuncten e, f_1 gezogenen Linien $M\,e$, $M\,f_1$ beziehlich auf A, A_1 senkrecht stehn müssen. Letztere Eigenschaft beruht darauf, dafs, wenn A, A_1 einen Kreis erzeugen, M der Mittelpunct des Kreises ist, und ferner auf der Eigenthümlichkeit des Kreises, dafs der nach dem Berührungspuncte einer Tangente gezogene Radius senkrecht auf der letztern steht. Da nun das constante Rechteck $e\,r.e_1\,q_1$ oder $a\,r.a_1\,q_1 = r\,M_2$ ist (§. 12. und §. 37.

a. a. O.), so hat man A, A_1 so gegeneinander zu neigen, dafs der Abstand der Puncte r, q_1 von einander gleich ist der doppelten mittleren Proportionalen zwischen den Seiten des constanten Rechtecks $ar.a_1q_1$, also $=2rg$ oder $=2rb$; und zwar ist dieser Abstand rq_1, falls A, A_1 einen Kreis erzeugen, derselbe, man mag von den oben näher bezeichneten Punctenpaaren f, e_1; b, c_1; u. s. w. im Durchschnitte der Geraden vereinigen, welches man will.

Vereinigt man ein in der Lage, wie sie Fig. 14. darstellt, näher als f, e_1 an g, g_1, folglich auch an r, q_1 liegendes Punctenpaar a, i_1 im Durchschnitte von A, A_1, so wächst der Winkel, welchen die genannten Geraden bilden. Denn nach dem Vorigen mufs auch jetzt $rq_1=2rg$ sein; und die Schenkel ar, i_1q_1 des nunmehr entstehenden gleichschenkligen Dreiecks arq_1 sind kleiner als die Schenkel fr, eq_1 des gleichschenkligen Dreiecks frq_1, während die Grundlinie rq_1 in beiden Dreiecken dieselbe ist. Zugleich nimmt aber der Radius des Kreises ab. Denn es ist

$$fr.f_1q_1 = ar.a_1q_1 = rM^2,$$

und hieraus

$$fe.f_1q_1+er.f_1q_1 = ai.a_1q_1+ir.a_1q_1;$$

aber offenbar

$$er.f_1q_1<ir.a_1q_1,$$

sonach

$$fe.f_1q_1>ai.a_1q_1.$$

Nun sind aber die Ausdrücke $\sqrt{(fe.f_1q_1)}(=\sqrt{(fe.er)})$ und $\sqrt{(ai.a_1q_1)}$ $(=\sqrt{(ai.ir)})$ beziehlich gleich den Radien derjenigen Kreise, welche erzeugt werden können, wenn man die Puncte f, e_1 und a, i_1 im Durchschnitte von A, A_1 vereinigt; folglich ist der Radius des letztern Kreises kleiner als der des ersteren.

Vereinigt man die Puncte g und g_1 (oder b und b_1) im Durchschnitte, während zugleich der Abstand rq seine Gröfse $=2rg$ behält, so fällt der Durchschnitt g, g_1 mit dem Mittelpuncte M von rq_1, welcher zugleich Mittelpunct des erzeugten Kreises ist, zusammen. Der Winkel der Geraden A, A_1 ist $=\pi$, d. h. die Geraden fallen gleichliegend aufeinander. Der Radius des Kreises ist gleich Null, weil die im Durchschnitt zusammenliegenden Puncte g, g_1, zugleich die Berührungspuncte von A, A_1 mit dem Kreise sind. Alle übrigen Tangenten an denselben, aa_1, bb_1, qq_1, u. s. w. gehen durch den Punct gg_1 oder M.

Denkt man sich den Durchschnitt von A, A_1, welcher sich fortwährend in der auf $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ (Fig. 12.) im Halbirungspuncte M senkrechten Geraden S befindet, ins Unendliche fortgerückt: d. h. vereinigt man die unendlich entfernten Puncte $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}_1$ der Geraden A, A_1 in ihrem Durchschnitte, so sind die letzteren parallel, aber ungleichliegend. Die Berührungspuncte sind in diesem Falle $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$, und $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$, welche in $\mathfrak{r}$ und q_1 senkrecht auf A, A_1 steht, ist der Durchmesser des Kreises.

Das Bisherige läfst sich zum Schlusse folgendermaafsen zusammenfassen:

Legt man zwei beliebige projectivische Geraden A, A_1 *so, daſs die Durchschnitte* $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ *der Parallelstrahlen um* $2\mathfrak{r}\mathfrak{g}(=2\mathfrak{r}\mathfrak{h})$ *von einander abstehen und daſs im Durchschnitte der Geraden irgend zwei Puncte* $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{e}_1$ *vereinigt sind, welche, beziehlich von* $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ *an gerechnet, über* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1$, *oder* $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}_1$ *hinaus und um gleiche Abstände* $\mathfrak{r}\mathfrak{f}$, $\mathfrak{e}_1\mathfrak{q}_1$ *von* $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ *entfernt liegen: so befinden sich* A, A_1 *in der durch die Aufgabe verlangten Lage. Läſst man nunmehr die Geraden sich um die als fest gedachten Puncte* $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ *drehen, in der Weise, daſs ihr Durchschnitt in der auf* $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ *im Halbirungspuncte* M *senkrechten Geraden* S *fortrückt: so sind dieselben, nebst allen ihren Projectionsstrahlen, die sämmtlichen Tangenten eines veränderlichen Kreises, dessen Mittelpunct stets M ist, dessen Radius aber sich im directen Verhältnisse mit dem Sinus des Winkels ändert, welchen eine der Geraden, etwa* A, *mit der festen Linie* $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ *bildet.*

13.

Ueber die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen.

(Vom Hrn. Prof. *A. F. Möbius* zu Leipzig.)

Der vorliegende Aufsatz über die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen ist eine weitere Ausführung Dessen, was ich in dem unlängst von mir herausgegebenen Lehrbuche der Statik (§. 183) über diesen Gegenstand gesagt habe. Es wird daselbst zuerst auf die bisher gewöhnliche analytische Art der schon seit lange bekannte Satz *) bewiesen, dafs unendlich kleine Drehungen um Axen, welche sich in einem Puncte schneiden, nach demselben Gesetz, wie Kräfte, zu einer mittleren Drehung sich vereinigen lassen. Hieraus wird mit leichter Mühe weiter geschlossen, dafs auch in allen übrigen Fällen die Zusammensetzung und Zerlegung der Drehungen ganz auf dieselbe Art wie bei Kräften bewerkstelligt werden kann. Zuletzt wird noch auf die durchgreifende reciproke Beziehung zwischen Kräften und Drehungen aufmerksam gemacht und gezeigt, wie auch die Lehre von den statischen Momenten der Kräfte und damit alle die bisher gefundenen merkwürdigen Sätze dieser Theorie auf Drehungen vollkommene Anwendung finden.

Die hier gegebene Darstellung dieser Gegenstände unterscheidet sich von der dortigen, aufser durch gröfsere Ausführlichkeit, hinzugefügte Beispiele und einige daraus gefolgerte geometrische Sätze, hauptsächlich dadurch, dafs, während ich dort analytisch zu Werke ging, ich mich hier der Construction bedient habe. Es veranlafste mich hierzu die Erwägung, dafs für einen Gegenstand, der ganz in das Gebiet der Geometrie, und noch dazu des elementaren Theils derselben gehört, eine reine geometrische Behandlung die zweckmäfsigste ist. Ist es mir auf diesem Wege gelungen, den Gegenstand einfacher als sonst zu entwickeln, so rührt dies besonders noch daher, dafs ich die Theorie der Drehungen mit der Be-

*) Nach *Ide* (System der reinen und angew. Mechanik fester Körper; Vorrede, Seite XIV.) schreibt sich die Erfindung dieses Satzes aus Italien her. —

trachtung zweier einander gleichen aber entgegengesetzten Drehungen um parallele Axen eingeleitet habe — eben so, wie auch die Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte durch Vorausschickung der Theorie der sogenannten Kräftepaare in hohem Grade vereinfacht wird. *)

§. 1.

Die einfachsten Bewegungen, welche ein Körper annehmen kann, und aus denen alle übrigen sich als zusammengesetzt betrachten lassen, sind die drehende Bewegung um eine in Ruhe bleibende Axe und das parallele Fortrücken, oder auch nur die drehende Bewegung allein, da man das parallele Fortrücken als eine Drehung um eine unendlich entfernte Axe ansehen kann. Sind demnach zwei verschiedene Lagen eines Körpers gegeben, so mufs es immer möglich sein, ihn durch Drehungen um gewisse Axen aus der einen Lage in die andere zu bringen.

Es läfst sich nun leicht zeigen, dafs *zwei* Drehungen hierzu immer hinreichend sind. Seien nämlich A, B, C (Fig. 15.) irgend drei, nicht in einer Geraden liegende Puncte des Körpers in der einen Lage und A', B', C', die Oerter dieser Puncte bei der andern Lage des Körpers, also ABC und $A'B'C'$ zwei einander gleiche und ähnliche Dreiecke. Da die Lage eines Körpers durch die Oerter vollkommen bestimmt ist, welche drei seiner Puncte einnehmen, die nicht in einer Geraden liegen, so wird der Körper aus der einen Lage in die andere gebracht sein, wenn man das eine der beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$ mit dem andern zur Drehung gebracht hat. Man halbire zu dem Ende die Linie AA' durch eine sie normal schneidende Ebene a, und man wird A mit A' durch Drehung des Körpers um irgend eine in a enthaltene Axe zur Coïncidenz bringen können. Eben so wird B mit B' zusammentreffen, wenn man den Körper um eine beliebige Axe dreht, welche in der die Linie BB' rechtwinklig halbirenden Ebene b begriffen ist. Dreht man folglich den Körper um die gemeinschaftliche Durchschnittslinie (ab) der Ebenen a und b, als Axe, so wird sowohl A nach A', als B nach B' kommen, und zwar gleichzeitig.

Um das gleichzeitige Zusammentreffen darzuthun, nehme man in der Linie (ab) beliebig zwei Puncte M und N an. Da M, N Puncte

*) Vergl. den VII. Band. dieses Journals, Seite 205.

der Ebene a sind, so ist $MA = MA'$, $NA = NA'$, und da M, N zugleich Puncte der Ebene b sind, so ist $MB = MB'$, $NB = NB'$. Da nun auch $AB = A'B'$, so sind die zwei Pyramiden $MNAB$ und $MNA'B'$ einander gleich und ähnlich und können folglich durch Drehung der einen um die gemeinschaftliche Kante MN, d. i. um (ab), zur Coïncidenz gebracht worden, wobei, wie zu beweisen verlangt wurde, AB und $A'B'$ zusammenfallen.

Um endlich noch C auf C' zu bringen, hat man nur den Körper um die jetzt zusammenfallenden AB und $A'B'$, als Axe, zu drehen.

§. 2.

Zusätze. *a)* Ein specieller Fall, bei welchem der erste Theil der oben beschriebenen Operation nicht anwendbar ist, ist der, wenn die Ebene b mit der Ebene a zusammenfällt. Alsdann sind AA' und BB' auf derselben Ebene a perpendiculair, folglich diese Linien sowohl, als die Linien AB und $A'B'$ in einer einzigen Ebene enthalten; der Durchschnitt von AB mit $A'B'$, welcher D (Fig. 16.) heifse, fällt in die Ebene a, und es ist $DA = DA'$, so wie $DB = DB'$. Hier hat man also, um AB auf $A'B'$ zu bringen, den Körper um eine in D auf der Ebene $ABA'B'$ normal errichtete Axe zu drehen. Die Coïncidenz von C mit C' wird hierauf wie vorhin bewerkstelligt.

b) Nimmt man in dem oben besprochenen Falle, wo die Ebenen a und b eine und dieselben sind, in dieser Ebene irgendwo zwei Puncte M und N, welche mit D nicht in einer Geraden liegen, so sind $MNAB$ und $MNA'B'$ zwei einander gleiche und ähnliche und zugleich symmetrisch liegende Pyramiden. (Liegen die Puncte M und N der Ebene a mit D in einer Geraden, so sind $MNAB$ und $MNA'B'$ nur ebene Figuren.) Und umgekehrt: haben zwei einander gleiche und ähnliche Pyramiden $MNAB$ und $MNA'B'$ eine symmetrische Lage, so wird eine Ebene, welche die Linie AA' rechtwinklig halbirt, auch BB' rechtwinklig halbiren und die gemeinschaftliche Kante MN in sich enthalten. Wenn folglich die Ebene, welche AA' rechtwinklig halbirt, dieses nicht auch an BB' thut, d. h. wenn die Ebenen a und b nicht zusammenfallen, so ist es nicht möglich, eine Linie MN so zu ziehen, dafs zwei einander gleiche und ähnliche und zugleich symmetrische Pyramiden $MNAB$ und $MNA'B'$ entstehen.

Es soll diese Bemerkung zur Ergänzung des in §. 1. geführten Beweises dienen. Unter der dort stillschweigend gemachten Voraussetzung, dafs die Ebenen a und b von einander verschieden sind, können nämlich, dem oben Gesagten zufolge, die einander gleichen und ähnlichen Pyramiden $MNAB$ und $MNA'B'$ nicht zugleich symmetrisch sein. Sind sie aber dieses nicht, so ist es immer möglich, die eine durch Drehung um MN mit der andern zur Coïncidenz zu bringen. Denn nur in dem Falle, wenn sie zugleich eine symmetrische Lage gegen einander haben, ist eine Coïncidenz auf keine Weise zu bewerkstelligen.

c) Da die drei Puncte A, B, C ganz willkührlich in dem Körper genommen werden können, wofern sie nur nicht in einer Geraden liegen, und da mit anderer Annahme von A, B, C und den ihnen entsprechenden A', B', C', in der zweiten Lage des Körpers, auch die Linie MN und die nach der ersten Drehung zusammenfallenden Linien AB und $A'B'$ ihre Lagen ändern, so erhellet, dafs der Körper auf unendlich viele verschiedene Arten durch zwei Drehungen aus der einen Lage in die andere gebracht werden kann.

d) Zuweilen reicht schon eine einzige Drehung hin, um den Körper aus der einen der beiden gegebenen Lagen in die andere zu bringen. Dieser Fall kann jedoch nur dann eintreten, wenn die drei Linien AA', BB', CC' einer und derselben Ebene parallel sind. Denn bei einer einzigen Drehung sind die Wege von A, B, C Kreisbögen, deren Ebenen auf der Drehungs-Axe normal und daher mit einander parallel sind. Wenn folglich durch eine einzige Drehung die Puncte A, B, C nach A', B', C' kommen, so sind die Linien AA', BB', CC', als die Sehnen jener Kreisbögen, einer auf der Drehungs-Axe normalen Ebene parallel.

Wir wollen nun untersuchen, ob auch umgekehrt, wenn AA', BB', CC' einer und derselben Ebene e parallel sind, die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ durch eine einzige Drehung zur Coïncidenz gebracht werden können. Seien zu diesem Ende $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$ (Fig. 17.) die rechtwinkligen Projectionen von A, B, C, A', B', C' auf e, so ist, weil AA' mit e parallel ist, $A\mathfrak{A} = A'\mathfrak{A}'$, und eben so $B\mathfrak{B} = B'\mathfrak{B}'$. Hieraus und wegen der rechten Winkel bei $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$, und da $AB = A'B'$ ist, folgt weiter, dafs die Vierecke $A\mathfrak{A}\mathfrak{B}B$ und $A'\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'B'$ einander gleich und ähnlich sind, und dafs mithin $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ ist. Auf gleiche Art zeigt sich, dafs $\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{A} = \mathfrak{C}'\mathfrak{A}'$ ist. Es sind folglich die Dreiecke

$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ in der Ebene *e* einander gleich und ähnlich, und die Ordnung, in welcher bei ihnen die gleichnamigen Ecken aufeinander folgen, ist entweder eine und dieselbe, oder nicht.

Im ersten Falle läfst sich das eine Dreieck durch Drehung um einen Punct $\mathfrak{M}$ in der Ebene *e* mit dem andern zur Deckung bringen. Dieser Punct $\mathfrak{M}$ wird gefunden als der gemeinschaftliche Durchschnitt der zwei in *e* gezogenen, die Linien $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$ rechtwinklig halbirenden Geraden $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, und, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zusammenfallen, als der gemeinschaftliche Durchschnitt von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ selbst. — Der Beweis hiervon wird auf analoge Art, wie vorhin bei den Körpern, geführt. — In demselben Falle wird folglich auch der eine Körper mit dem andern durch eine Drehung um eine die Ebene *e* in $\mathfrak{M}$ rechtwinklig schneidende Axe $\mathfrak{m}$ zur Deckung gebracht. Denn hierdurch kommen nicht allein $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gleichzeitig nach $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, sondern auch, da $\mathfrak{A}A$ und $\mathfrak{A}'A'$ einander gleich und der Drehungs-Axe parallel sind, A gleichzeitig nach A', und eben so B nach B' und C nach C'.

Im anderen Falle, wenn die Aufeinanderfolge der Ecken in dem einen der beiden Dreiecke $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ der Aufeinanderfolge der gleichnamigen Ecken in dem andern entgegengesetzt ist, wird zwar ebenfalls durch eine Drehung um die Axe $\mathfrak{m}$ die Coïncidenz von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$, also auch von AB mit $A'B'$, aber nicht von $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{C}'$ und daher auch nicht von C mit C', herbeigeführt. Da nun, wenigstens im Allgemeinen, die Coïncidenz von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ auf keine andere Weise als durch eine Drehung um die Axe $\mathfrak{m}$ bewerkstelligt werden kann, so ersieht man, dafs in diesem Falle im Allgemeinen zwei Drehungen nöthig sind, um den Körper aus der einen der beiden gegebenen Lagen in die andere zu bringen.

Nur dann reicht in diesem Falle eine einzige Drehung hin, wenn die Geraden $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zusammenfallen, also wenn die Dreiecke $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ symmetrisch liegen. Alsdann sind $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$, folglich auch AA', BB', CC' miteinander parallel: nicht blofs mit einer und derselben Ebene; und gegen die Ebene, in welcher die Mittelpuncte der drei letzten Linien liegen, haben die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ eine symmetrische Lage. Das eine dieser Dreiecke aber wird mit dem andern durch Drehung um die Durchschnittslinie ihrer Ebene zur Coïncidenzgebracht.

§. 3.

Denken wir uns jetzt, dafs ein Körper durch Drehungen um drei oder mehrere verschiedene Axen aus seiner anfänglichen Lage in eine beliebige andere gebracht werde. Da, wie oben gezeigt worden, jede Ortsveränderung eines Körpers, wo nicht durch eine, doch immer durch zwei Drehungen bewerkstelligt werden kann, so werden jene drei oder mehrere Drehungen, wo nicht mit einer, doch immer mit zweien gleichgeltend sein, sich auf zwei reduciren lassen, und es entsteht hiermit die Aufgabe: *Aus den Richtungen dreier oder mehrerer Axen und aus den Winkeln, um welche ein Körper um sie gedreht wird, zwei Axen und die ihnen zugehörigen Drehungswinkel zu finden, dergestalt, dafs die durch letztere Drehungen bewirkte Aenderung der Lage des Körpers einerlei mit der durch erstere Drehungen hervorgebrachten Lage-Aenderung ist.*

Die Lösung dieser Aufgabe in ihrer völligen Allgemeinheit möchte zu einem ziemlich verwickelten Resultate führen. Wir wollen uns daher gegenwärtig auf den möglichst einfachen Fall beschränken, in welchem die Drehungswinkel unendlich klein sind, und wo es eben deshalb nicht auf ihre absoluten Werthe, sondern nur auf ihre gegenseitigen Verhältnisse ankommt.

§. 4.

Bei jeder Drehung kann man seinem eigenen Körper eine solche Lage geben, dafs die Drehung nach einer und derselben Richtung, etwa von der Linken nach der Rechten gehend, erscheint. Man nenne hiernach die positive Richtung ihrer Axe diejenige, bei welcher, wenn mit ihr die Richtung von den Füfsen nach dem Kopfe zusammenfällt, die Drehung nach der Rechten geht. Die Gröfse des unendlich kleinen Drehungswinkels drücke man durch einen ihm proportionalen Theil der Axe aus und verstehe hiernach unter der Drehung AB eine der Länge AB proportionale Drehung um eine Axe, deren positive Richtung vom Puncte A nach dem Puncte B geht. Und eben so, wenn es ohne weiteren Zusatz heifst, dafs der Körper um AB gedreht werden soll, werde durch AB die Richtung der Axe und die Gröfse der Drehung zugleich ausgedrückt angenommen.

Sind daher $A, B, C, D, \ldots$ mehrere in einer Geraden liegende Puncte, so sind die Drehungen AB und BC gleichwirkend mit der ein-

zigen *AC*, die Drehungen *AB*, *BC* und *CD* gleichwirkend mit der einzigen *AD*, u. s. w., in welcher Ordnung auch die Puncte aufeinander folgen mögen.

§. 5.

Bei der Drehung *AB* (Fig. 18.) beschreibt der Punct *P* des Körpers eine unendlich kleine, auf der Ebene *ABP* perpendiculaire Linie, welche proportional mit der Gröfse der Drehung, d. i. mit *AB*, und mit der Entfernung des Punctes *P* von *AB*, also proportional mit der Dreiecksfläche *PAB* ist. Die Richtung aber, nach welcher sich *P* bewegt, ist einerlei mit der positiven Richtung einer Axe, welche einer, ihrem Sinne nach, durch die Aufeinanderfolge *PAB* angedeuteten Drehung zukommt. Ist nämlich *PP'* der von *P* beschriebene Weg, und erscheint dieser, wenn *AB* die Richtung von den Füfsen nach dem Kopfe ist, nach rechts gehend, so wird auch, wenn *PP'* zur Richtung von den Füfsen nach dem Kopfe genommen wird, die Richtung *AB*, folglich auch der Sinn der Drehung *PAB*, nach rechts gehen.

Bei mehreren Drehungen *AB, CD, ...* um Axen, welche in einer und derselben Ebene liegen, sind daher die Bewegungen eines in derselben Ebene befindlichen Punctes *P* nicht blofs der Gröfse, sondern auch dem Zeichen nach, den Dreiecken *PAB, PCD, ...* proportional, indem die bei den Drehungen *AB* und *CD* auf der Ebene normalen Wege von *P* nach einerlei oder entgegengesetzten Seiten dieser Ebene gerichtet sind, je nachdem die Folgen *PAB* und *PCD* von einerlei oder entgegengesetztem Sinne sind, also die Dreiecke *PAC* und *PCD* einerlei oder verschiedene Zeichen haben.

§. 6.

Seien *A, B, C, D* (Fig. 19.) die vier aufeinander folgenden Ecken eines Parallelogramms, und *C', D'* die Oerter, welche die anfänglich mit *C, D* zusammenfallenden Puncte des Körpers nach einer Drehung *AB* einnehmen. Eben so seien *A', B'* die Oerter der anfänglich mit *A, B* zusammenfallenden Puncte des Körpers nach einer Drehung *CD*. Da die Puncte *C', D'* resp. den *C, D* unendlich nahe liegen, so bleiben sie bei der zweiten Drehung *CD* unverrückt, und die nach beiden Drehungen von *A, B, C, D* beschriebenen Wege *AA', BB', CC', DD'* sind auf der Ebene *ABCD* rechtwinklig und resp. proportional den Dreiecken *ACD, BCD, CAB, DAB*, also einander gleich: auch dem Zeichen nach; so dafs

durch beide Drehungen ein paralleles Fortrücken des Körpers ohne Drehung um eine der Hälfte des Parallelogramms *ABCD* proportionale Linie bewirkt wird.

Ueberhaupt also *erzeugen zwei einander gleiche aber entgegengesetzte Drehungen um zwei parallele Axen ein auf der Ebene der Axen perpendiculares Fortrücken, welches dem Producte aus dem gegenseitigen Abstande der beiden Axen in den Drehungswinkel proportional ist.*

§. 7.

Seien *A, B, C* drei nicht in einer Geraden liegende Puncte, und werde der Körper nach und nach um *AB, BC, CA* gedreht. Ein in der Ebene *ABC* befindlicher Punct *P* des Körpers rückt dabei rechtwinklig auf der Ebene fort, um Linien, die den Dreiecken *PAB, PBC, PCA* proportional sind. Die Totalverrückung von *P* ist daher der Summe dieser Dreiecke, mit gehöriger Berücksichtigung ihrer Zeichen, proportional. Diese Summe ist aber gleich dem Dreiecke *ABC*, also unabhängig von dem Orte des Punctes *P* in der Ebene *ABC*. Mithin rückt jeder Punct dieser Ebene, und folglich der Körper selbst, perpendicular auf derselben, um eine der Dreiecksfläche *ABC* proportionale Gröfse fort.

Zusatz. Auf gleiche Art wird bewiesen, dafs auch bei einem mehrseitigen ebenen Vieleck, wenn jede seiner Seiten nach der Richtung genommen wird, nach welcher sie von einem den Perimeter des Vielecks beschreibenden Punct durchlaufen wird, der um jede Seite um einen ihrer Länge proportionalen Winkel gedrehte Körper perpendicular auf der Ebene des Vielecks um eine der Fläche des letzteren proportionale Linie fortrückt.

Dieses parallele Fortrücken des Körpers findet selbst dann Statt, wenn das Vieleck kein ebenes ist. Denn sind z. B. *A, B, C, D* vier nicht in einer Ebene liegende Puncte, so bewirken die Drehungen *AB, BC, CA* ein auf der Ebene *ABC* perpendiculares Fortrücken, und die Drehungen *AC, CD, DA* ein auf der Ebene *ACD* perpendiculares Fortrücken. Von der einen Seite reduciren sich aber diese 6 Drehungen auf die vier *AB, BC, CD, DA,* indem sich *CA* und *AC* gegen einander aufheben, und von der andern erzeugen zwei verschieden gerichtete parallele Fortrückungen in Verbindung ein paralleles Fortrücken nach einer mittleren Richtung.

§. 8.

Seien wiederum *A, B, C, D* die vier Ecken eines Parallelogramms, in ihrer Aufeinanderfolge, so sind die zwei Drehungen *AB, CD* gleichwirkend mit den dreien *AB, BC, CA,* indem erstere sowohl (§. 6.), als letztere (§. 7.), ein dem Inhalte des Dreiecks *ABC* proportionales und auf seiner Ebene perpendiculares Fortrücken nach derselben Seite hervorbringen. Mithin sind auch, wenn auf beiden Seiten die Drehungen *BA, CB* hinzugefügt werden, die zwei Drehungen *CB* und *CD* gleichwirkend mit der einzigen *CA;* d. h. *zwei Drehungen, deren Axen sich in einem Puncte schneiden, lassen sich zu einer einzigen zusammensetzen, welche, der Richtung ihrer Axe und ihrer Gröfse nach, durch die Diagonale eines Parallelogramms ausgedrückt wird, in welchem die anliegenden Seiten, ihrer Richtung und Gröfse nach, die erstern Drehungen vorstellen.*

Zusatz. Aus der Zusammensetzung zweier Drehungen, deren Axen sich schneiden, mufs sich die Zusammensetzung von Drehungen um parallele Axen, als ein specieller Fall der erstern, herleiten lassen, da parallele Axen auch als solche angesehen werden können, welche sich in unendlicher Entfernung schneiden. Indessen läfst sich dieser besondere Fall auch unmittelbar durch Anwendung des in §. 6 erhaltenen Satzes behandeln.

Seien *ABCD* und *FGHI* Fig. 20. zwei in einer Ebene liegende Parallelogramme, und ihre Flächen auch den Zeichen nach einander gleich, so dafs durch die Folgen *ABC* und *FGH* einerlei Sinn der Umdrehung ausgedrückt wird. Alsdann haben die Drehungen *AB* und *CD* gleiche Wirkung mit den Drehungen *FG* und *HI,* da jedes dieser Paare von Drehungen ein auf der Ebene ihrer Axen perpendiculares, nach einerlei Seite gerichtetes und dem Inhalte der Parallelogramme proportionales Fortrücken hervorbringt. Es heben sich daher die vier Drehungen *AB, CD, GF, IH* gegen einander auf. Werden nun noch, was immer möglich, die zwei Parallelogramme in einer solchen Lage gegen einander angenommen, dafs *CD* und *GF* in dieselbe Grade fallen und darin einerlei Richtung haben, so ist diese Gerade parallel mit *AB* und *IH* und liegt zwischen ihnen, in Abständen, die sich wegen der Gleichheit der Parallelogramme wie *IH* zu *AB* verhalten. Dabei werden die Drehungen *CD* und *GF* gleichwirkend mit der einzigen $CD+GF$, und wir schliefsen daher:

Wenn von drei Drehungen um parallele Axen in einer Ebene die Drehung um die mittlere Axe den entgegengesetzten Sinn der beiden an-

dern hat und der Summe derselben gleich ist, und wenn die mittlere Axe von den beiden andern sich in Abständen befindet, die sich umgekehrt wie die Drehungen um dieselben verhalten, so heben sich die Drehungen gegen einander auf.

Wie hiernach Drehungen um zwei parallele Axen zu einer dritten verbunden werden können, ist ohne weiteres Erörtern klar.

§. 9.

Wenn in dem Vorhergehenden gezeigt wurde, wie zwei oder mehrere Drehungen ein paralleles Fortrücken hervorbringen, und wie zwei Drehungen sich zu einer einzigen zusammensetzen lassen, so war, wie sich schon aus den dort angewendeten Schlüssen ergab, die Ordnung, in welcher man die zwei oder mehrere Drehungen auf einander folgen liefs, ganz willkührlich. Es läfst sich aber diese Willkühr in der Aufeinanderfolge unendlich kleiner Drehungen, abgesehen von jenen speciellen Fällen, auch allgemein darthun. Sie bildet einen Fundamentalsatz in der Theorie der Drehungen und gründet sich darauf, dafs die Wege, welche zwei einander unendlich nahe Puncte des Körpers bei einer unendlich kleinen Drehung desselben beschreiben, als zwei einander gleiche Parallelen zu betrachten sind.

Wenn daher der Punct A (Fig. 21.) bei der Drehung FG den Weg AB, und bei der Drehung HI den Weg AD beschreibt, so wird er, wenn nach der ersten dieser Drehungen die zweite HI erfolgt, von B aus, als von einem Puncte, dessen Lage gegen die Axe HI von der Lage des A gegen dieselbe Axe nur unendlich wenig verschieden ist, einen dem AD gleichen und parallelen Weg zurücklegen. Ist er aber zuerst durch die Drehung HI von A nach D gebracht worden, so wird er, wenn hierauf die Drehung FG geschieht, von D aus einen Weg, gleich und parallel mit AB, beschreiben. Mag also zuerst die Drehung FG und nachher die Drehung HI, oder umgekehrt, erfolgen, so wird der Punct A immer nach der vierten Ecke C des Parallelogramms gelangen, dessen drei übrige Ekken in ihrer Folge B, A, D sind. Da nun dasselbe auch von allen übrigen Puncten des Körpers gilt, so schliefsen wir, dafs die durch zwei unendlich kleine Drehungen um zwei verschiedene Axen bewirkte Verrückung unabhängig ist von der Aufeinanderfolge der Drehungen. Da endlich von irgend zwei Complexionen dreier oder mehrerer Elemente die eine aus

der andern durch fortgesetztes Vertauschen zweier nebeneinanderstehender Elemente hergeleitet werden kann, so erhellet, dafs auch die durch drei oder mehrere Drehungen bewirkte Totalverrückung von der Ordnung, in welcher die Drehungen auf einander folgen, unabhängig ist.

Mit Hülfe dieses Satzes lassen sich auch die im vorigen §. in Anwendung gekommenen Sätze beweisen, nämlich, dafs wenn eine oder mehrere Drehungen gleiche Wirkung mit mehreren andern Drehungen haben, die erstern, in Verbindung mit den in entgegengesetzten Sinne genommenen letztern, den Körper unverrückt lassen, und dafs, wenn mehrere Drehungen einander aufheben, eine oder etliche derselben gleichwirkend mit den entgegengesetzt genommenen übrigen sind.

Denn sind die Drehungen *AB, CD, ...* gleichwirkend mit den Drehungen *FG, HI, ...*, so sind es auch *AB, CD, ... GF, IH, ...* mit *FG, HI, ... GF, IH, ...* Letztere aber, in der Ordnung *FG, GF, HI, IH ....* genommen, heben sich paarweise auf. Mithin mufs auch die Totalwirkung der erstern Null sein.

Auf ähnliche Art wird auch der umgekehrte Satz bewiesen.

§. 10.

Die Art und Weise, auf welche sich nach §. 4. und §. 8. zwei oder mehrere Drehungen, deren Axen in dieselbe Gerade fallen, und zwei Drehungen, deren Axen in derselben Ebene liegen, zu einer einzigen zusammensetzen lassen, ist ganz der Zusammensetzung von Kräften analog, deren Richtungen in derselben Geraden oder in derselben Ebene enthalten sind. Man hat nämlich nur Richtung und Gröfse der Kraft mit Axe und Gröfse der Drehung zu vertauschen, um aus der bekannten Vorschrift für die Zusammensetzung der Kräfte die Vorschrift für die der Drehungen abzuleiten. Da nun, wie aus der Statik bekannt ist, mit Anwendung des Satzes von Kräften, deren Richtungen in dieselbe Gerade fallen, und mit Hülfe des Parallelogramms der Kräfte, alle übrigen die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte, betreffenden Sätze sich ergeben, so erhellet, dafs nicht allein in den vorhin besonders betrachteten Fällen, sondern auch in allen übrigen zwischen Kräften und Drehungen, die vollkommenste Analogie herrschen mufs. Unter andern werden daher alle die merkwürdigen Eigenschaften, welche die sogenannten Kräftepaare besitzen, auch Paaren von Drehungen, d. i. Paaren von einander gleichen aber entgegen-

gesetzten Drehungen um parallele Axen zukommen. So folgt z. B. schon unmittelbar aus §. 6., dafs, eben so wie ein Kräftepaar, auch ein Paar von Drehungen ohne Aenderung seiner Wirkung in seiner Ebene und parallel mit derselben verlegt werden kann.

Ueberhaupt also: *wenn zwischen mehrern, auf einem frei beweglichen Körper wirkenden Kräften Gleichgewicht statt findet, wird auch der Total-Effect von Drehungen, deren Axen die Richtungen der Kräfte sind, und deren Gröfsen sich wie die Intensitäten der Kräfte verhalten, Null sein;* oder kürzer ausgedrückt: Halten die ihrer Richtung und Intensität nach durch die Linien *AB, CD, EF, ...* dargestellten Kräfte einander das Gleichgewicht, so bringen auch die Drehungen *AB, CD, EF, ...* in Verbindung keine Verrückung hervor.

Insbesondere fliefst hieraus noch, dafs — da drei oder mehrere auf einen Körper wirkende Kräfte sich immer, wo nicht auf eine, doch auf zwei reduciren lassen, — dafs auch Drehungen in beliebiger Anzahl immer auf wenigstens zwei zurückgeführt werden können. Auch folgerten wir dasselbe schon in §. 3. aus den in §§. 1. und 2. angestellten Betrachtungen.

§. 11.

Die zwischen Kräften und Drehungen stattfindende Analogie ist noch besonders wegen ihrer reciproken Beschaffenheit merkwürdig. Eine einzelne Kraft wird bestimmt durch die Gerade, in welcher sie wirkt, durch ihre doppelt mögliche Richtung in dieser Geraden und durch ihre Gröfse. Die Wirkung zweier einander gleichen, parallelen und entgegengesetzten Kräfte, oder eines Kräftepaares, wird bestimmt durch irgend eine auf der Ebene des Paares perpendiculare Linie, durch den Sinn der Drehung um diese Linie und durch das Moment des Paares oder das Product aus der einen der beiden Kräfte in ihre Entfernung von der andern. Denn jedes andere Paar, bei welchem die genannten Stücke dieselben sind, hat mit ersterem gleiche Wirkung.

Eben so ist nun, indem man fortrückende und drehende Bewegung mit einander vertauscht, eine einzelne Drehung durch ihre Axe, ihren Sinn und ihre Gröfse bestimmt. Ein Paar von Drehungen aber ist es durch irgend eine auf der Ebene der Axen beider Drehungen perpendiculare Linie, durch die Richtung, nach welcher der Körper in dieser Linie fortgerückt wird, und durch die Gröfse dieses Fortrückens, welches nach

§. 6. dem Producte aus der einen der beiden Drehungen in den gegenseitigen Abstand der beiden Axen gleich ist und daher analogerweise das Moment des Paares von Drehungen heifsen kann.

§. 12.

Auf ähnliche Art läfst sich auch der Begriff des Moments einer Kraft, in Bezug auf eine gewisse Axe, auf Drehungen anwenden. Das Moment einer Kraft, in Bezug auf eine Axe, drückt die Gröfse aus, mit welcher die Kraft den Körper, an welchen sie angebracht ist, um die Axe, wenn diese festgehalten wird, zu drehen strebt; denn es herrscht Gleichgewicht, wenn die Momente zweier Kräfte, welche den Körper nach entgegengesetzten Richtungen um eine feste Axe zu drehen streben, in Bezug auf diese Axe einander gleich sind. Indem wir daher das Drehen mit dem Fortrücken vertauschen, wird das auf eine Axe *MN* bezogene Moment der Drehung *AB* der Gröfse proportional sein, um welche die mit *MN* anfangs zusammenfallenden Puncte des Körpers längs *MN* durch die Drehung *AB* fortgerückt werden. Folgende Betrachtungen werden dieses in noch helleres Licht setzen.

Wenn erstens *MN* mit *AB* in einer Ebene liegt, so rückt bei der Drehung um *AB* jeder Punct dieser Ebene perpendicular auf derselben, und daher auch jeder Punct in *MN* perpendicular auf *MN* fort, und es ist folglich das Fortrücken jedes Punctes in *MN* längs *MN*, also auch das Moment der Drehung *AB* in Bezug auf *MN*, $= 0$, eben so, wie das Moment einer Kraft für jede Axe, die mit der Kraft in einer Ebene liegt, $= 0$ ist.

Man nehme ferner an, dafs *AB* und *MN* nicht in einer Ebene begriffen und zuerst unter einem rechten Winkel gegen einander geneigt sind. Alsdann ist es möglich, durch *AB* eine Ebene zu legen, welche von *MN* rechtwinklig geschnitten wird. Durch den Schneidepunct, welcher *D* (Fig. 22.) heifse, lege man eine Linie *DC*, gleich und parallel der *AB*, welche mithin in letztgedachter Ebene enthalten sein wird. Nun bewirken die Drehungen *AB* und *CD* ein auf der Ebene *ABD* perpendiculares und daher mit *MN* paralleles Fortrücken, welches der Fläche *ABD* proportional ist. Durch diese zwei Drehungen wird folglich jeder in *MN* fallende Punct, in *MN* selbst, um eine mit *ABD* proportionale Gröfse fortgerückt. Da aber *MN* mit *CD* in einer Ebene liegt und daher die

Drehung *CD* zur Bewegung der Puncte in *MN* längs *MN* nichts beiträgt, so rückt schon durch die Drehung *AB* allein jeder in *MN* fallende Punct längs *MN* um ein gleich grofses Stück fort, welches mit *ABD*, d. i. mit dem Producte aus der Drehung in den Abstand ihrer Axe von der Momenten-Axe, proportional und als das Moment der Drehung *AB* in Bezug auf *MN* auzusehen ist.

Nimmt man den durch *MN* ausgedrückten Theil der Momenten-Axe von constanter Länge, so kann man das Moment, anstatt dem Dreieck, *ABD*, auch dem Producte $\frac{1}{3}MN.ABD$, d. i. der Pyramide *ABMN* proportional setzen. Denn, da *ABD* von *MN* in *D* perpendicular getroffen wird, so ist, wie man leicht sieht, die Pyramide *ABMN* einer andern gleich, welche *ABD* zur Grundfläche und *MN* zur Höhe hat.

Wenn zweitens die nicht in einer Ebene enthaltenen *AB* und *MN* einen schiefen Winkel mit einander machen, so beschreibe man, um diesen Fall auf den vorigen zurückzuführen, um *AB*, als Diagonale, ein Rechteck *AFBG* (Fig. 23.), dessen Seite *AG* mit *MN* parallel ist, und dessen Seite *AF* folglich einen rechten Winkel mit *MN* macht. Hiernach ist die Drehung *AB* gleichwirkend mit den Drehungen *AG* und *AF*. Von diesen bringt erstere, da ihre Axe *AG* mit *MN* in einer Ebene liegt, keine Verrückung der Puncte in *MN* längs *MN* hervor. Die durch die Drehung *AB* erzeugte Verrückung ist folglich einerlei mit der durch die Drehung *AF* erzeugten, d. h. die Drehungen *AB* und *AF* haben in Bezug auf *MN* einander gleiche Momente. Nach dem Vorigen ist aber das Moment der Drehung *AF* proportional der Pyramide *AFMN*, und diese ist gleich der Pyramide *ABMN*, weil beide eine gemeinschaftliche Grundfläche *AMN* haben und die Linie durch ihre Spitzen *F* und *B*, parallel mit *AG*, folglich mit *MN*, folglich auch mit der Grundfläche ist. Das Moment der Drehung *AB* in Bezug auf *MN* ist daher, auch bei jeder beliebigen Lage von *MN* gegen *AB*, der Pyramide *ABMN* proportional; d. h. es wird durch die Drehung *AB* jeder in die Linie *MN* fallende Punct längs *MN* um ein gleiches Stück fortgerückt; welches Stück, wenn der Abschnitt *MN* dieser Linie von constanter Länge genommen wird, der Pyramide proportional ist, welche diesen Abschnitt und die die Drehung darstellende Linie *AB* zu gegenüberstehenden Seiten hat.

Eine unmittelbare Folge hiervon ist, dafs auch die durch mehrere Drehungen *AB*, *CD*, ... bewirkte Verrückung längs *MN* für alle Puncte

in *MN* von gleicher Gröfse ist, nämlich von einer Gröfse die der Summe der Pyramiden $ABMN + CDMN + \ldots$, mit gehöriger Rücksicht auf ihre Zeichen, proportional ist und das Moment des Systems der Drehungen *AB*, *CD*, ... in Bezug auf die Axe *MN* genannt werden kann. Und da nach §. 1. und 2. jede Verrückung eines Körpers durch zwei Drehungen, wenn nicht durch eine einzige, hervorgebracht werden kann, so wird auch durch jede beliebige Verrückung jeder Punct einer beliebig gewählten Axe *MN* um ein gleich grofses Stück längs *MN* verrückt werden; und dieses Stück wird als das Moment der Verrückung in Bezug auf *MN* anzusehen sein.

§. 13.

Zwischen Kräften und Drehungen herrscht demnach auch hinsichtlich der Momente eine vollkommene Analogie. Denn, wie sich zeigen läfst *), kann das Moment der Kraft *AB* in Bezug auf die Axe *MN* geometrisch durch die Pyramide *ABMN* dargestellt werden. Alle die merkwürdigen Sätze, welche hinsichtlich der Momente von Kräften gelten, finden folglich auch hier Statt.

Dem Satze z. B., dafs, wenn ein System von Kräften im Gleichgewichte ist, die Summe der Momente der Kräfte des Systems, oder kürzer, das Moment des Systems, in Bezug auf jede beliebige Axe Null ist, entspricht folgender Satz. Wenn mehrere Drehungen sich gegenseitig aufheben, so ist ihr Moment, d. i. die Summe der Momente der einzelnen Drehungen, in Bezug auf jede beliebig gewählte Axe, Null. Auch folgt die Richtigkeit dieses Satzes schon unmittelbar aus dem vorhin gegebenen Begriff des Moments einer Drehung. Denn wenn ein Körper nach mehrern Drehungen in seine anfängliche Lage zurückgekommen ist, so hat auch kein Punct desselben längs einer durch den Punct gehenden geraden Linie (Axe des Moments) seine Lage geändert.

Da ferner, wenn die drei Momente mehrerer in einer Ebene wirkender Kräfte in Bezug auf drei die Ebene rechtwinklig schneidende und nicht in einer Ebene liegende Axen einzeln Null sind, die Kräfte sich das Gleichgewicht halten, so können auch mehrere Drehungen, deren Axen in einer Ebene liegen, wenn ihre drei Momente für drei auf der Ebene nor-

*) Vergl. einen Aufsatz des Verf. im 4ten Bande dieses Journals, Seite 179, so wie auch des Verf. Lehrb. der Statik. §. 59.

mal stehende und nicht in einer Ebene enthaltene Axen einzeln Null sind, keine Verrückung hervorbringen. Uebrigens folgt auch dieser Satz ganz leicht aus der von den Momenten aufgestellten Erklärung. Da nämlich alle Drehungs-Axen in einer und derselben Ebene sein sollen, so mufs die durch die einzelnen Drehungen erzeugte Bewegung der Puncte der Ebene auf diese perpendicular sein; und da die Momente für drei die Ebene perpendicular schneidende Axen Null sein sollen, so haben die drei Schneidepuncte gar keine Bewegung. Diese drei Puncte liegen aber nicht in gerader Linie, weil die drei Axen nicht in einer Ebene liegen sollen; und wenn drei Puncte eines Körpers, die nicht in einer Geraden liegen, keine Bewegung haben, so ist auch der Körper selbst in Ruhe.

§. 14.

Einer der fruchtbarsten Sätze in der statischen Theorie der Momente ist folgender. Bestimmt man die Momente eines System S von Kräften rücksichtlich mehrerer Axen, und kann man nach der Richtung einer jeden dieser Axen eine Kraft wirken lassen, von der Gröfse, dafs alle diese neuen Kräfte einander das Gleichgewicht halten, so ist die Summe der Momente von S, jedes Moment vorher mit einem Coëfficienten multiplicirt, welcher der der Axe des Moments zugehörigen Kraft proportional ist, $= 0$ *).

Auf die Theorie der Drehungen angewendet, lautet dieser Satz also: *Bestimmt man die Momente einer beliebigen Verrückung eines Körpers in Bezug auf mehrere Axen, und kann man für diese Axen Drehungswinkel finden, die in solchen Verhältnissen zu einander stehen, dafs alle diese Drehungen einander aufheben, so ist die Summe der Momente der Verrückung, jedes Moment vorher mit einem Coëfficienten multiplicirt, welcher dem der Axe des Moments zugehörigen Drehungswinkel proportional ist,* $= 0$.

Der Beweis dieses Satzes dürfte sich folgendergestalt am einfachsten geben lassen. Man bezeichne durch $a, b, c, \ldots$ ihrer Lage und Richtung nach bestimmte Geraden; durch $t, u, v, \ldots$ Zahlen; durch $a_t, b_u, \ldots$ Abschnitte der Linien $a, b, \ldots$, welche resp. $t, u, \ldots$ Linien-Einheiten lang sind; durch $[a_t b_u]$ endlich den Inhalt einer Pyramide, welche die Abschnitte

*) Des Verf. Lehrbuch der Statik, §. 93.

a_t und b_u zu gegenüberliegenden Seiten hat. Es bedarf kaum der Erinnerung, dafs durch a, b, t, u der Inhalt der Pyramide $[a_t b_u]$ vollkommen bestimmt ist, wenn auch in den Linien a und b die Anfangspuncte der Abschnitte a_t und b_u unbestimmt gelassen werden. Auch ist, wie man leicht sieht: $a_t = t.a_1$, $[a_t b_u] = t[a_1 b_u] = u[a_t b_1] = tu[a_1 b_1] = [a_u b_t]$ = etc., wo a_1, b_1 eine Linien-Einheit lange Abschnitte der Linien a, b bedeuten.

Sei nun die in Rede stehende Verrückung durch zwei den Zahlen t, u proportionale Drehungen um die Axen a und b erzeugt worden (§. 12 zu Ende). Sei ferner der Total-Effect der Drehungen $x, y, z, \ldots$ um die Axen $f, g, h, \ldots$ Null, und daher, wenn man das Moment dieses Systems von Drehungen das einemal auf a, das anderemal auf b als Axen bezieht und diesen Axen resp. die Längen t und u giebt:

$$[a_t f_x] + [a_t g_y] + [a_t h_z] + \ldots = 0, \text{ oder}$$
$$x[a_t f_1] + y[a_t g_1] + z[a_t h_1] + \ldots = 0,$$

und eben so

$$x[b_u f_1] + y[b_u g_1] + z[b_u h_1] + \ldots = 0.$$

Die Summe dieser zwei Gleichungen ist aber der analytische Ausdruck des zu beweisenden Satzes. Es sind nämlich

$$[a_t f_1] + [b_u f_1], \quad [a_t g_1] + [b_u g_1], \quad [a_t h_1] + [b_u h_1], \text{ u. s. w.}$$

die Momente der durch a_t und b_u bestimmten Verrückung in Bezug auf die (gleich langen) Axen $f, g, h, \ldots$, und diese Momente haben in der Summengleichung die Coëfficienten $x, y, z \ldots$.

Beispiel. Sind f, g, h drei sich in einem Puncte I schneidende und in einer Ebene liegende Geraden, so ist damit ein Parallelogramm $FGHI$ seiner Form nach gegeben, dessen Ecken F, G, H resp. in f, g, h liegen; und die Drehungen um f, g, h heben sich auf, wenn sie ihrer Gröfse nach mit IF, GI, IH proportional sind. Wenn daher p, q, r die Momente irgend einer Verrückung in Bezug auf f, g, h sind, so ist

$$IF.p + GI.q + IH.r = 0,$$

so wie

$$IF.p + IH.r = IG.q.$$

In diesen Gleichungen ist jedes Glied, z. B. $IF.p$, positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem die Richtung IF in f und die Richtung, nach welcher die in f fallenden Puncte längs f um p bei der Verrückung sich fortbewegen, einerlei oder entgegengesetzt sind.

§. 15.

Wenn für gegebene Axen sich Drehungen finden lassen, welche einander aufheben, so werden auch Kräfte, welche die Richtungen der Axen haben, und den Drehungen proportional sind, das Gleichgewicht sich halten. In §§. 98. und 99. des gedachten Lehrbuchs der Statik habe ich untersucht, welchen Bedingungen die gegenseitige Lage von 2, 3 und mehreren Richtungen unterworfen sein mufs, wenn Kräfte sich sollen angeben lassen, die, nach diesen Richtungen wirkend, im Gleichgewichte sind. Es ergaben sich hierbei, wenn die Anzahl der Richtungen kleiner als 7 war, gewisse positive Bedingungen für ihre gegenseitige Lage. So mufs z. B. bei 4 Richtungen jede Gerade, welche 3 derselben trifft, auch der 4ten begegnen. Für 7 Richtungen dagegen war es im Allgemeinen immer möglich, Kräfte zu finden, welche, nach ihnen wirkend, sich das Gleichgewicht halten, und es konnte daher eine ihrer Richtung und Intensität nach beliebig gegebene Kraft im Allgemeinen immer in 6 andere zerlegt werden, deren Richtungen beliebig gegeben sein konnten. Der Beisatz „im Allgemeinen" wurde durch die negative Bedingung bestimmt, dafs weder alle 6 gegebene Richtungen, noch einige derselben eine solche Lage gegegen einander hatten, bei welcher es möglich war, nach ihnen wirkende Kräfte zu finden, welche sich das Gleichgewicht halten.

Bei der Analogie, die zwischen Kräften und Drehungen statt findet, mufs daher auch, — um hier nur den letzterwähnten Fall zu berücksichtigen — jede Drehung, und somit jede Verrückung überhaupt, 6 andern Drehungen um eben so viele von einander unabhängige, sonst beliebig anzunehmende Axen gleich gesetzt werden können, *so dafs, wenn ein Körper um sechs von einander unabhängige Axen drehbar ist, er auf jede mögliche Weise verrückt werden kann.* Sechs oder weniger Axen werden wir aber von einander unabhängig nennen; wenn es nicht möglich ist, Drehungen um dieselben ausfindig zu machen, welche sich gegen einander aufheben; woraus zugleich erhellet, dafs 7 oder mehrere Axen nie von einander unabhängig sein können.

Zufolge des vorigen §. mufs sich demnach, wenn von irgend einer Verrückung die Momente in Bezug auf 6 von einander unabhängige Axen gegeben sind, aus ihnen das Moment für jede 7te Axe herleiten lassen. Zerlegt man nämlich, wie es nach dem oben Bemerkten immer möglich ist, eine Drehung um die 7te Axe in 6 Drehungen um die 6 erstern, so

wird die Summe der Producte aus jeder dieser 6 Drehungen in das auf die jedesmalige Drehungsaxe bezogene Moment der Verrückung gleich sein dem Producte aus der Drehung um die 7te Axe in das gesuchte Moment für dieselbe Axe.

§. 16.

Um auch diese Sätze durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir eine Drehung ϱ um eine beliebig gegebene Axe PQ in 6 Drehungen um die 6 Kanten einer dreiseitigen Pyramide $ABCD$ — oder, was auf dasselbe hinauskommt, eine nach PQ gerichtete Kraft ϱ in 6 andere nach den Kanten von $ABCD$ gerichtete — zu zerlegen suchen. Dieses mufs möglich sein, da, wie man leicht wahrnimmt, von 6 Kräften, welche nach den 6 Kanten einer Pyramide wirken, keine die Resultante von den 5 übrigen oder von einigen derselben sein kann.

Zur Lösung dieser Aufgabe mag die in §. 102. meines Lehrbuchs angegebene, auf den Hauptsatz in der Theorie der Momente gegründete Methode dienen. — Seien die gesuchten Drehungen um die Axen

$$AD,\ BD,\ CD,\ BC,\ CA,\ AB$$

$$\text{resp.} = \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta.$$

Indem wir nun die Momente sämmtlicher Drehungen auf eine beliebig zu wählende Axe XY beziehen, ist das Moment einer, sowohl hinsichtlich ihrer Axe, als ihrer Gröfse, durch AD ausgedrückten Drehung $=$ der Pyramide $ADXY$; folglich, wenn die Gröfse nicht AD sondern 1 ist, $= \frac{1}{AD} ADXY$, und wenn α die Gröfse der Drehung ausdrückt, $= \frac{\alpha}{AD} ADXY$. Eben so ist das Moment der Drehung β um die Axe $BD = \frac{\beta}{BD} BCXY$, u. s. w. Da nun die Drehungen $\alpha, \beta, \ldots . \zeta$ um die Axen $AD, BD, \ldots . AB$ gleiche Wirkung mit der Drehung ϱ um die Axe PQ haben sollen, so ist nach dem Satze von den Momenten (§. 13.):

$$\text{I.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha}{AD} ADXY + \frac{\beta}{BD} BDXY + \frac{\gamma}{CD} CDXY \\ + \frac{\delta}{BC} BCXY + \frac{\varepsilon}{CA} CAXY + \frac{\zeta}{AB} ABXY \end{array} \right\} = \frac{\varrho}{PQ} PQXY.$$

Man lasse jetzt die willkührlich zu nehmenden Puncte X und Y mit A und D zusammenfallen, so wird jede der 5 Pyramiden $ADXY, BDXY, CDXY, CAXY, ABXY$ Null, und die Gleichung I. reducirt sich auf:

$$\text{1.} \quad \frac{\delta}{BC} BCAD = \frac{\varrho}{PQ} PQAD.$$

Auf gleiche Weise findet sich, wenn man XY nach und nach mit BD, CD, BC, CA, AB coïncidiren läfst:

$$2.\quad \frac{\varepsilon}{CA}\,CABD = \frac{\varrho}{PQ}\,PQBD,$$

$$3.\quad \frac{\zeta}{AB}\,ABCD = \frac{\varrho}{PQ}\,PQCD, \qquad 4.\quad \frac{\alpha}{AD}\,ADBC = \frac{\varrho}{PQ}\,PQBC,$$

$$5.\quad \frac{\beta}{BD}\,BDCA = \frac{\varrho}{PQ}\,PQCA, \qquad 6.\quad \frac{\gamma}{CD}\,CDAB = \frac{\varrho}{PQ}\,PQAB,$$

Durch diese 6 Gleichungen werden aber die Gröfsen der Drehungen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ vollkommen bestimmt.

Sind nun von irgend einer Verrückung die Momente in Bezug auf die Axen

$$\begin{array}{rccccccc} & AD, & BD, & CD, & BC, & CA, & AB, & PQ \\ \text{resp.} = & a, & b, & c, & d, & e, & f, & r, \end{array}$$

so ist nach §. 15.:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + e\varepsilon + f\zeta = r\varrho,$$

oder, wenn man für $\alpha, \beta, \ldots. \zeta$ ihre Werthe aus (1), ... (6.) setzt und dabei berücksichtigt, dafs die Pyramiden $BCAD, CABD, ABCD, \ldots.$ nicht allein ihrem absoluten Werthe, sondern auch ihren Zeichen nach einander *) gleich sind:

$$\text{II.}\quad \begin{cases} a.AD.PQBC + b.BD.PQCA + c.CD.PQAB \\ + d.BC.PQAD + e.CA.PQBD + f.AB.PQCD \\ = r.PQ.ABCD; \end{cases}$$

und dieses ist die Gleichung, mittelst welcher man, wenn die Figur $ABCDPQ$ und die Momente $a, b, \ldots. f$ einer Verrückung für die Kanten der Pyramide $ABCD$, als Axen, gegeben sind, das Moment r derselben Verrückung für PQ finden kann.

§. 17.

Zusätze. *a)* Substituirt man in der Gleichung (I.) für $\alpha, \beta, \ldots \ldots \zeta$ ihre Werthe aus (1.), ... (6.), so kommt

$$\text{III.}\quad \begin{cases} BCPQ.ADXY + CAPQ.BDXY + ABPQ.CDXY \\ + ADPQ.BCXY + BDPQ.CAXY + CDPQ.ABXY \\ = ABCD.PQXY: \end{cases}$$

eine Relation zwischen 14 Pyramiden bei einem beliebig angenommenen Systeme von 8 Puncten im Raume, deren Symmetrie hinsichtlich $ABCD, PQ, XY$ in die Augen springt.

---

*) Lehrb. d. St. §. 63. 1.

b) Läfst man XY mit PQ zusammenfallen, so reducirt sich III. auf

IV. $BCPQ.ADPQ + CAPQ.BDPQ + ABPQ.CDPQ = 0$:

eine Relation zwischen 6 Pyramiden bei 8 Puncten im Raume*).

c) Setzt man in IV. für die 6 Pyramiden ihre aus (1.) .... (6.) fliefsenden Werthe, so erhält man

$$\text{V.} \quad \frac{\alpha}{AD}\cdot\frac{\delta}{BC} + \frac{\beta}{BD}\cdot\frac{\varepsilon}{CA} + \frac{\gamma}{CD}\cdot\frac{\zeta}{AB} = 0,$$

welches die Relation ist, die zwischen 6 Drehungen $\alpha, \ldots . \zeta$ um die Kanten $AD, \ldots . AB$ einer Pyramide Statt finden müssen, wenn sich die Drehungen auf eine einzige sollen reduciren lassen; — also auch die Bedingungsgleichung, wenn 6 nach den Kanten einer Pyramide gerichteten Kräfte $\alpha, \ldots . \zeta$ mit einer einzigen Kraft gleiche Wirkung haben sollen.

§. 18.

Der Satz, dafs ein Körper vollkommen frei beweglich ist, wenn er um 6 von einander unabhängige Axen gedreht werden kann, gehört unstreitig zu den merkwürdigsten in der Theorie der Drehungen. Ein Fall, in welchem man sich von diesem Satze sehr leicht ohne alle Rechnung überzeugen kann, ist der, wenn zu den 6 Axen die 6 Kanten $DA, DB, DC, BC', CA', AB'$ (Fig. 24.) eines Parallelepipedums genommen werden. — A, B, C sind bei demselben die der Ecke D zunächst liegenden Ecken, und A', B', C', D' liegen den A, B, C, D diagonal gegenüber.

Jede Verrückung kann nämlich in eine Drehung um einen beliebig zu nehmenden Punct D und in eine parallele Fortrückung aufgelöset werden. Hiervon läfst sich die Drehung um D in drei andere α, β, γ um drei durch D gehende Axen DA, DB, DC zerlegen, und eben so kann man die parallele Fortrückung in drei andere zerlegen, welche hier auf den Ebenen BC, CA, AB perpendicular seien. Für die auf BC perpendiculare Fortrückung aber können zwei Drehungen $\beta', -\beta'$ um zwei parallele Axen CA', DB dieser Ebene gesetzt werden. Verwandelt man nun eben so die auf CA und AB perpendicularen Fortrückungen in die Drehungen $\gamma', -\gamma'$ um AB', DC und in die Drehungen $\alpha', -\alpha'$ um BC', DA, so wird die ganze Verrückung reducirt auf die 6 Drehungen

$$\alpha-\alpha', \quad \beta-\beta', \quad \gamma-\gamma', \quad \alpha', \quad \beta', \quad \gamma'$$

um die Axen

$$DA, \quad DB, \quad DC, \quad BC', \quad CA', \quad AB'.$$

---

*) Letztere Relation findet sich bereits in des Verf. „Baryc. Calcul §. 170." gegeben.

Zur Bestimmung der Werthe von α, α', β, ..., wenn irgend eine Drehung ϱ um eine Axe PQ gegeben ist, die in Drehungen um die 6 Axen DA, DB, ... zerlegt werden soll, kann man wiederum die vorhin erläuterte Methode mit Vortheil anwenden. Man schreibe für

DA, DB, DC, BC', CA', AB', PQ der Kürze wegen

a, b, c, a', b', c', r,

und verstehe eben so unter ab', ar, ... die Pyramiden $DACA'$, $DAPQ$, ... Alsdann ist, wie in §. 16., wenn man die Momente sämmtlicher Drehungen auf die unbestimmte Axe x bezieht:

$$\frac{\alpha-\alpha'}{a}ax+\frac{\beta-\beta}{b}bx+\frac{\gamma-\gamma'}{c}cx+\frac{\alpha'}{a}ax'+\frac{\beta'}{b'}bx'+\frac{\gamma'}{c'}c'x=\frac{\varrho}{r}rx'.$$

Diese Gleichung reducirt sich, wenn man x zuerst mit a und dann mit a' zusammenfallen läfst, auf

$$\frac{\beta'}{b'}b'a=\frac{\varrho}{r}ra \text{ und } \frac{\gamma-\gamma'}{c}ca'+\frac{\beta'}{b'}b'a'+\frac{\gamma'}{c'}c'a'=\frac{\varrho}{r}ra'.$$

Man gewahrt aber leicht, dafs die Pyramiden $b'a$, ca', $b'a'$ und $c'a'$ sowohl dem Zeichen, als dem absoluten Werthe nach einander gleich sind, indem jede von ihnen dem 6ten Theile des Parallelepipedums DD' gleich ist. Setzt man daher $\frac{\varrho}{r}.\frac{1}{b'a}=R$ und bemerkt, dafs $c'=c$, so ziehen sich die zwei erhaltenen Gleichungen zusammen in

$$\frac{\beta'}{b'}=R.ra \text{ und } \frac{\gamma}{c}+\frac{\beta'}{b'}=R.ra',$$

und eben so folgt:

$$\frac{\gamma'}{c'}=R.rb, \qquad \frac{\alpha}{a}+\frac{\gamma'}{c}=R.rb',$$

$$\frac{\alpha'}{a'}=R.rc, \qquad \frac{\beta}{b}+\frac{\alpha'}{a'}=R.rc',$$

wenn man x der Reihe nach mit b, b', c, c' identisch werden läfst.

Mittelst dieser Gleichungen aber werden die 6 Drehungen α, ... γ' durch die Drehung ϱ und durch die Lage der Axe der letztern gegen die Axen der erstern bestimmt; wie verlangt wurde.

Läfst man in der Hauptgleichung x noch mit r zusammenfallen und substituirt dann für ar, br, ... $c'r$ ihre durch die 6 letzten Gleichungen bestimmten Werthe, so ergiebt sich, nach leichter Reduction:

$$\frac{\alpha}{a}.\frac{\beta'}{b'}+\frac{\beta}{b}.\frac{\gamma'}{c'}+\frac{\gamma}{c}.\frac{\alpha'}{a'}=0,$$

und dies ist die Bedingung, unter welcher sich im vorliegenden Falle die 6 Drehungen α, ... γ' auf eine einzige reduciren lassen.

§. 19.

In dem Bisherigen wurden die Axen, um welche ein Körper nach und nach gedreht wird, als unbeweglich betrachtet. Indessen ist dieses nicht durchaus nothwendig. Denn unter der hier immer geltenden Voraussetzung, dafs jeder Drehungswinkel unendlich klein sei, sind zwei gleiche Drehungen α um zwei ihrer Lage nach unendlich wenig verschiedene Axen a und a' (d. h. um zwei Axen, deren kürzester Abstand von einander und deren gegenseitige Neigung unendlich klein sind) als gleichwirkend anzusehen, indem, wenn ein Punct A durch die Drehung α um a von A nach B und durch die Drehung α um a' von A nach B' gebracht wird, BB' eine unendlich kleine Linie der zweiten Ordnung ist, während AB und AB' von der ersten Ordnung sind. Die Gesammtwirkung von mehrern Drehungen wird folglich noch dieselbe sein, wenn wir die Drehungs-Axen mit dem beweglichen Körper selbst fest verbunden annehmen; als wodurch es geschieht, dafs bei jeder Drehung die Axen aller jedesmal übrigen Drehungen um ein unendlich Weniges mit verstellt werden.

§. 20.

Der Umstand, dafs eine unendlich kleine Veränderung der Lage der Axen auf die Lage des um sie gedrehten Körpers keinen Einfluſs hat, kann uns veranlassen, unsere Betrachtung noch weiter auszudehnen und mit einem Systeme von 6 Axen z. B., welche der Reihe nach a, b, c, d, e, f heifsen, 7 Körper $A, B, \ldots F, G$ dergestalt fest verbunden anzunehmen, dafs A und B um die gemeinschaftliche Axe a; B und C um die gemeinschaftliche Axe b und C und D um c u. s. w. gedreht werden können. Bleibe nun A, folglich auch a, in Ruhe, und werde B mit den übrigen Körpern $C, D, \ldots G$, als ein festes Ganzes um a, um den Winkel α gedreht. Man drehe hierauf, während A und B, mithin auch a und b in Ruhe bleiben, den Körper C, in ungeänderter Verbindung mit den übrigen Körpern $D, \ldots. G$, um b um den Winkel β, u. s. w., und endlich den Körper G allein um f um den Winkel ζ, während alle vorhergehenden Körper $A, \ldots. F$ unbewegt bleiben. Nach allen diesen Drehungen wird der Körper G seine Lage eben so geändert haben, als wenn er nach und nach um die festen Axen $a, b, \ldots. f$ resp. um die Winkel $\alpha, \beta, \ldots. \zeta$ gedreht worden wäre. Da nun durch die eben beschriebenen 6 Drehungen das System der 6 Körper $B, C, \ldots. G$ in jede von der anfänglichen unendlich wenig verschiedene Lage, die es,

dem Zusammenhange der Körper durch die Axen gemäfs, anzunehmen vermag, gebracht werden kann, und da ein um 6 von einander unabhängige Axen drehbarer Körper jeder Verrückung fähig ist, so schliefsen wir:

Wenn von mehrern Körpern, in einer gewissen Ordnung genommen, je zwei nächstfolgende um eine gemeinschaftliche Axe drehbar sind, so hat, wenn der erste festgehalten wird, erst der siebente eine vollkommen freie Beweglichkeit, und dieses auch nur dann, wenn die sechs, diese sieben Körper verbindenden Axen in eine von einander unabhängige Lage gebracht werden können.

Als einfaches Beispiel hierzu kann Fig. 25. dienen, wo von 7 Quadraten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 je zwei nächstfolgende eine Seite gemein haben. Denkt man sich diese Seite als Axe, um welche die zwei durch sie verbundenen Quadrate drehbar sind, so kann gegen das Iste Quadrat erst das 7te in jede beliebige Lage — allerdings nur innerhalb gewisser Grenzen — gebracht werden. Die hierzu erforderliche Unabhängigkeit der Axen ergiebt sich daraus, dafs man mit den 7 Quadraten in ihrer Verbindung einen Würfel überdecken kann, bei welchem die, zwei nächstfolgenden Quadraten gemeinschaftlichen Seiten AD, DB, BA', $A'D'$, $D'B'$, $B'A$ eine solche Lage gegen einander haben, dafs zwischen Kräften, welche diese 6 Seiten zu ihren Richtungen haben, kein Gleichgewicht möglich ist. — Sehr leicht kann man sich von der vollkommenen gegenseitigen Beweglichkeit der beiden äufsersten Quadrate auch durch Proben überzeugen, wenn man Fig. 25. etwa in steifem Papier ausschneidet und dasselbe nach den Seiten bricht, in denen die Quadrate aneinander grenzen.

Schliefslich noch die Bemerkung, dafs uns der eben erläuterte Satz zum Aufschlufs über eine von der Natur bei den Gliedmafsen der Krebse (und wahrscheinlich auch anderer Insecten) getroffene Einrichtung dienen kann. Bei diesen Thieren bestehen nämlich die Beine, so wie auch die Gliedmafsen, an deren Enden die Scheeren sitzen, aus sechs Gliedern, die unter sich und mit dem Körper selbst durch sechs Axengelenke verbunden sind *). Hierdurch aber wird nach dem Vorigen der Zweck erreicht, dafs, während der Körper ruht, das äufserste Glied jedes Beines vollkommen freie Beweglichkeit hat.

*) Observationes de scoleto astaci fluviatilis et marini, dissertatio inauguralis auctore *C. E. Hasse.* Lipsiae. 1823. Pag. 27.

14.

Beweis der Lehrsätze 3. und 4. im 15. Bande S. 374 und 375 und Auflösung der Aufgabe 1. im 14. Bande S. 89 und S. 79 dieses Journals.

(Von Hrn. Dr. *A. R. Luchterhandt*, Gymnasial-Oberlehrer zu Marienwerder.)

---

1. Aufgabe. In der grofsen Axe AB (Fig. 26.) einer Ellipse zwischen den Brennpuncten C, D zwei Puncte X, Y von der Art zu suchen, dafs gewisse zwei gleiche, durch den Punct X näher bestimmte Durchmesser $a\alpha$, $b\beta$ zweien andern gleichen, durch den Punct y näher bestimmten Durchmessern $a_1\alpha_1$, $b_1\beta_1$ gegenseitig, d. h. dafs sowohl $a\alpha$ dem $a_1\alpha_1$ als $b\beta$ dem $b_1\beta_1$ zugeordnet seien. Die Puncte a, b einerseits und die Puncte α, β andererseits erhält man als die Durchschnittspuncte von zwei Paar Kreisen, welche beide aus den Puncten C, D einmal mit den beziehlichen Strecken AX, BX, das anderemal mit den Strecken BX, AX beschrieben sind. Auf dieselbe Weise hängen die Puncte a_1, b_1, α_1, β_1 von dem Puncte Y ab.

Auflösung. Die halbe grofse Axe sei $= a$, die halbe kleine Axe $= b$, und die Gleichung der Ellipse, bezogen auf die Axen,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die Abscissen der Puncte X und Y sollen durch x_1 und x_2 bezeichnet werden. Setzen wir noch der Kürze wegen

$$a^2 - b^2 = e^2,$$

so sind die Abscissen der Brennpuncte D, C respective c und $-e$.

Den beiden aus C, D mit den Radien AX, BX beschriebenen Kreisen entsprechen die Gleichungen

$$(x+e)^2 + y^2 = (a-x_1)^2, \qquad (x-e)^2 + y^2 = (a-x_1)^2,$$

aus welchen sich

$$x = -\frac{ax_1}{e}, \qquad y = \pm\frac{b}{e}\sqrt{(e^2 - x_1^2)}$$

ergiebt. Dies sind die Coordinaten der Puncte a, b; dem letzteren möge der negative Werth von y angehören. Aus dem Werthe von y erhellet zugleich, dafs die Realität der Puncte an die Erfüllung der Bedingung $e^2 < x_1$ geknüpft ist. Ferner fällt sogleich in die Augen, dafs diese Werthe von x und y der Gleichung der Ellipse genügen.

Durch ein ähnliches Verfahren erhält man:

Für den Punct α die Coordinaten: $x = \frac{ax_1}{e}$, $y = -\frac{b}{e}\sqrt{(e^2-x_2^2)}$,

\- - - β - - - $x = \frac{ax_1}{e}$, $y = \frac{b}{e}\sqrt{(e^2-x_1^2)}$,

\- - - a_1 - - - $x = -\frac{ax_2}{e}$, $y = -\frac{b}{e}\sqrt{(e^2-x_2^2)}$,

\- - - b_1 - - - $x = -\frac{ax_2}{e}$, $y = -\frac{b}{e}\sqrt{(e^2-x_2^2)}$,

\- - - α_1 - - - $x = \frac{ax_2}{e}$, $y = \frac{b}{e}\sqrt{(e^2-x_2^2)}$,

\- - - β_1 - - - $x = \frac{ax_2}{e}$, $y = -\frac{b}{e}\sqrt{(e^2-x_2^2)}$,

Die Tangenten der Winkel, welche die Durchmesser $a\alpha$, $a_1\alpha_1$, $b\beta$, $b_1\beta_1$ mit der Hauptaxe bilden, sind der Reihe nach:

$$-\frac{b}{ax_1}\sqrt{(e^2-x_1^2)},\quad \frac{b}{ax_2}\sqrt{(e^2-x_2^2)},\quad \frac{b}{ax_1}\sqrt{(e^2-x_1^2)},\quad -\frac{b}{ax_2}\sqrt{(e^2-x_2^2)}.$$

Sollen nun die Durchmesser $a\alpha$ und $a_1\alpha_1$ (und dann natürlich auch die beiden andern $b\beta$ und $b_1\beta_1$) zugeordnet sein, so mufs bekanntlich das Product der Tangenten der Winkel, welche sie mit der Hauptaxe machen, $= -\frac{b^2}{a^2}$ sein. Hiernach ergiebt sich für x_1 und x_2 die Bedingungsgleichung

$$\frac{b^2}{a^2}\,\frac{\sqrt{(e^2-x_1^2)}\sqrt{(e^2-x_2^2)}}{x_1x_2} = \frac{b^2}{a^2},$$

oder, einfacher, die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 = e^2,$$

welche nichts anderes ist als der analytische Ausdruck für die vom Herrn Professor *Steiner* gegebene Auflösung unserer Aufgabe.

Die Hyperbel hat zwar, ähnlich der Ellipse, die Eigenschaft, dafs, wenn man auf der grofsen Axe A_1B_1 derselben, jedoch aufserhalb der Brennpuncte C_1, D_1, einen Punct X_1 annimmt und mit den Strecken A_1X_1 und B_1X_1 um C_1, D_1 Kreise beschreibt, diese sich in zwei Puncten der Hyperbel schneiden und ein Paar gleicher Durchmesser bestimmen. Die durch einen anderen Punct Y_1 der Hauptaxe bestimmten zwei Durchmesser können aber unter keiner Bedingung jenen zwei andern conjugirt sein, weil die Hyperbel bekanntlich nur von einem von zwei conjugirten Durchmessern getroffen wird.

Wollte man diesen Fall, so wie den obigen, analytisch behandeln, und bezeichnete man mit x_1 und x_2 die Abscissen der Puncte X_1, Y_1, setzte ferner $e^2 = a^2 + b^2$, so würde man zur Bestimmung von x_1 und x_2 die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 = e^2$ erhalten, welche ungereimt ist.

2. Lehrsatz. Zieht man von einem Puncte E (Fig. 27.) einer Hyperbel die beiden Leitstrahlen DE, CE und schneidet auf jedem von E aus die halbe Axe $AM = aD$ ab, jedoch bei dem letzteren CE auf dessen Verlängerung über E hinaus, indem wir nämlich annehmen, dafs der Punct E auf dem den Punct C umschliefsenden Zweige der Hyperbel gelegen sei: so liegen die Endpuncte G, F der abgetragenen Strecken ($EG = EF = AM$) allemal in demjenigen Durchmesser der Hyperbel, welcher dem Durchmesser ME zugeordnet ist.

Beweis. Die Axengleichung der Hyperbel sei $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; x_1, y_1 seien die Coordinaten des Punctes E, zwischen welchen, der Annahme gemäfs, die Relation $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ Statt findet, und aus der man $y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{(x_1^2 - a^2)}$ erhält, wenn man voraussetzt, dafs E auf der positiven Seite der Ordinatenaxe liegt. Setzt man noch $a^2 + b^2 = e^2$, so erhält man

$$GD = FC = a + EC = a + \sqrt{((x_1 - e)^2 + y_1^2)} = \frac{e x_1}{a}.$$

Fällen wir nun, um die Coordinaten x', y', und x'', y'' der Puncte F, G zu bestimmen, auf DC die Senkrechten FH, GK und $EL = y_1$, so erhalten wir

$$y' = FH = \frac{FC \cdot EL}{EC} = \frac{e x_1 y_1}{e x_1 - a_2},$$

$$x' = ML + LH = x_1 + \frac{a \cdot CL}{CE} = x_1 + \frac{a^2 (x_1 - e)}{e x_1 - a^2} = \frac{e a^2 y_1^2}{b^2 (e x_1 - a^2)},$$

$$y'' = GK = \frac{DG \cdot FL}{ED} = \frac{e x_1 y_1}{e x_1 + a^2},$$

$$x'' = ML - KL = x_1 - \frac{a^2 (x_1 + e)}{e x_1 + a^2} = \frac{e a^2 y_1}{b^2 (e x_1 + a^2)}.$$

Aus diesen Ausdrücken folgt sogleich, dafs

$$x' : x'' = y' : y'' = e x_1 + a^2 : e x_1 - a^2$$

ist und dafs also der Mittelpunct M der Hyperbel mit G und F in einer geraden Linie liegt, deren Gleichung $y = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{x_1}{y_1} x$ ist. Die Tangente t des Winkels, welchen der dem Durchmesser MF zugeordnete Durchmesser mit der Hauptaxe bildet, ist durch die Gleichung $t \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{a^2}{b^2}$ bestimmt, und hieraus bekommt man $t = \frac{y_1}{x_1}$, welches offenbar die Tangente des Winkels ist, den die Linie ME mit der Hauptaxe macht. Es sind also ME und MF zugeordnete Durchmesser, w. z. b. w.

Für die Ellipse gilt folgender analoge Satz:

Sind C_1, D_1 die Brennpuncte der Ellipse, A_1 ein Scheitel ihrer Hauptaxe, M_1 ihr Mittelpunct, und nimmt man in der Ellipse irgend einen Punct E an, z. B. in dem Theile, welcher mit dem Brennpuncte C_1 auf derselben Seite der kleinern Axe liegt, zieht die Leitstrahlen C_1E_1, D_1E_1 und trägt auf jedem derselben von E_1 aus die halbe grofse Axe A_1M_1 ab (wozu offenbar der erstere Strahl über C_1 zu verlängern ist): so liegen die Endpuncte F_1, G_1 der abgetragenen Strecken ($E_1F_1 = E_1G_1 = A_1M_1$) allemal in demjenigen Durchmesser der Ellipse, welcher dem Durchmesser M_1E_1 zugeordnet ist. Oder: Bewegt sich ein gleichschenkliges Dreieck $F_1E_1G_1$, dessen Schenkel F_1G_1 und G_1E_1, nicht aber deren Verlängerungen, stets beziehlich durch drei feste Puncte E_1, M_1, D_1 einer Geraden gehen, von denen der eine M_1, um welchen sich die Grundlinie F_1G_1 dreht, in der Mitte zwischen den zwei andern C_1, D_1 liegt: so beschreibt jene Spitze E_1 eine Ellipse, welche M_1 zum Mittelpunct und C_1, D_1 zu Brennpuncten hat und deren halbe grofse Axe (M_1A_1) den constanten Schenkeln des Dreiecks gleich ist, und in welchem endlich der Strahl M_1E_1 und die Grundlinie $M_1G_1F_1$ ein Paar conjugirter Durchmesser sind.

Anmerkung. In der Aussage des entsprechenden Satzes der Hyperbel a. a. O. S. 375 Z. 9 und 10 mufs man statt der Worte: „dafs die drei Seiten *FE*, *FG*, *FE* oder deren Verlängerungen" lesen: dafs die Verlängerungen seiner drei Seiten u. s. w.

3. Im 14. Bande S. 89. dies. Journ. findet sich folgende Aufgabe.

Wenn von zwei Kreissegmenten (von verschiedenen Kreisen) die Grundlinien (oder Sehnen) einzeln gegeben sind, und wenn die Summe ihrer Bogen gegeben ist, so soll das Verhältnifs der Radien der beiden Kreise gefunden werden, welches Statt finden mufs, damit die Summe der Inhalte beider Segmente ein Maximum wird.

Die beiden Grundlinien seien $2m$ und $2m'$, und die Radien der ihnen entsprechenden Kreise r und r'. Die Länge der Bogen sei durch σ und σ' bezeichnet, und zwischen ihnen die Gleichung

$$1. \quad \sigma + \sigma' = c$$

gegeben, wo c eine Constante ist. Da nun die Sinusse der den Bogen σ und σ' zugehörigen halben Centriwinkel beziehlich gleich $\frac{m}{r}$ und $\frac{m'}{r'}$ sind, so kann man die Gleichung (1.) auch so schreiben:

$$2. \quad 2r \arcsin\frac{m}{r} + 2r' \arcsin\frac{m'}{r'} = c.$$

Bezeichnen wir ferner das dem Bogen σ entsprechende Segment durch segmσ, so haben wir

$$\text{segm}\,\sigma = r^2 \arcsin\frac{m}{r} - m\sqrt{(r^2-m^2)},$$

$$\text{segm}\,\sigma' = r'^2 \arcsin\frac{m'}{r'} - m'\sqrt{(r^2-m'^2)}.$$

Nach der Bedingung der Aufgabe mufs das Differential der Summe dieser beiden Ausdrücke Null sein, woraus sich die Gleichung ergiebt:

3. $$r\partial r\left[\arcsin\frac{m}{r} - \frac{m}{\sqrt{(r^2-m^2)}}\right] + r'\partial r'\left[\arcsin\frac{m'}{r'} - \frac{m'}{\sqrt{(r'^2-m'^2)}}\right] = 0.$$

Zur Bestimmung des Verhältnisses der Differentiale von r und r' dient die Gleichung (2.), aus welcher sogleich folgt:

4. $$\partial r\left[\arcsin\frac{m}{r} - \frac{m}{\sqrt{(r^2-m^2)}}\right] + \partial r'\left[\arcsin\frac{m'}{r'} - \frac{m'}{\sqrt{(r'^2-m'^2)}}\right] = 0;$$

und wenn man nun aus (3.) und (4.) $\partial r'$ eliminirt und den Factor ∂r unterdrückt, so wird $$(r-r')\left[\arcsin\frac{m}{r} - \frac{m}{\sqrt{(r^2-m^2)}}\right] = 0.$$

Da in diesem Ausdrucke nur der erste Factor eine Beziehung zwischen den Radien r und r' liefert, so mufs derselbe Null sein; woraus folgt, dafs die Radien gleich sein, also die gegebenen Grundlinien demselben Kreise angehören müssen. Der Radius dieses Kreises ergiebt sich aus der transcendenten Gleichung:

$$m\sqrt{(r^2-m^2)} + m'\sqrt{(r^2-m'^2)} = r^2 \sin\frac{c}{2r}.$$

4. Im 14. Bande S. 79 d. J. wirft Herr Dr. Stern die Frage auf: Was ist der Werth der Summe aller Brüche von der Form $\frac{1}{(2+x)^{2+y}+1}$, wo für x und y jede ganze positive Zahl von 0 an gesetzt werden kann, jedoch $2+x$ keine höhere Potenz einer Zahl sein darf.

Zur Beantwortung derselben dient Folgendes. Da die Summe der Brüche von der Form

$$\frac{1}{(2+x)^{2+y}-1},$$

wo x und y auf die vorhin angegebene Weise bestimmt werden, wie a. a. O. gezeigt, $=1$ ist, so hat man

$$\frac{1}{(2+x)^{2+y}+1} = \frac{1}{(2+x)^{2+y}+1}\cdot\frac{1}{(2+x)^{2+y}-1} = \frac{1}{(2+x)^{4+2y}-1}.$$

Es ist aber

$$\frac{1}{(2+x)^{4+2y}-1} = \frac{1}{(2+x)^{4+2y}} + \frac{1}{(2+x)^{6+4y}} + \frac{1}{(2+x)^{12+6y}} + \ldots.$$

und daher, wenn man die gesuchte Summe mit S bezeichnet,

$$
\begin{aligned}
S = {} & \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \ldots. \\
& + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^8} + \ldots. \\
& + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{5^8} + \ldots. \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{1}{(2^2)^4} + \frac{1}{(2^2)^6} + \frac{1}{(2^2)^8} + \ldots. \\
& + \frac{1}{(3^2)^4} + \frac{1}{(3^2)^6} + \frac{1}{(3^2)^8} + \ldots. \\
& + \frac{1}{(5^2)^8} + \frac{1}{(5^2)^6} + \frac{1}{(5^2)^8} + \ldots. \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{1}{(2^3)^4} + \frac{1}{(2^3)^6} + \frac{1}{(2^3)^8} + \ldots. \\
& + \frac{1}{(3^3)^4} + \frac{1}{(3^3)^6} + \frac{1}{(3^3)^8} + \ldots. \\
& + \frac{1}{(5^3)^4} + \frac{1}{(5^3)^6} + \frac{1}{(5^3)^8} + \ldots. \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

u. s. w.

Man sieht leicht ein, dafs man, nach einer andern Ordnung, auch so schreiben kann:

$$
\begin{aligned}
S = {} & \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \ldots. \\
& + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^8} + \ldots. \\
& + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{4^8} + \ldots. \\
& + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{5^8} + \ldots. \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

u. s. w.

Nun ist aber $\frac{1}{a^2-1} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^8} + \ldots.$ oder

$$\frac{1}{a^2-1} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^8} + \ldots.$$

also $$S = \frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2-1} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2-1} - \frac{1}{4^2} + - \ldots.$$

oder, weil $m^2-1 = (m-1)(m+1)$ ist,

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{4.6} + \frac{1}{5.7} + \ldots. - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots.\right) \\
&= \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \ldots. + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{4.6} + \frac{1}{6.8} + \ldots. - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots.\right).
\end{aligned}
$$

Nun ist

$$\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{6.8}+\ldots. = \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots.\right)$$

und zwei auf einander folgende Glieder in der Klammer haben die Form

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}, \quad \frac{1}{(x+2)(x+3)}$$

und ihre Summe ist gleich

$$\frac{2}{(x+1)(x+2)}.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke successive $x = 0, 2, 4, 6, 8$ u. s. w., so erhält man den Ausdruck in der Klammer gleich

$$2\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots.\right],$$

und es wird also

$$S = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots.\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots.\right).$$

Bekanntlich ist

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots. \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3},$$

und wenn man die Reihe bis ins Unendliche fortgesetzt denkt, ihre Summe $= \frac{1}{2}$; ferner ist

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots. = \frac{\pi^2}{6},$$

also $$S = \frac{3}{4}-\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right) = \frac{7}{4}-\frac{\pi^2}{6} = 0{,}1050659331517736.$$

Zu demselben Resultate kommen wir übrigens auf folgendem, viel einfacheren Wege.

Die mit S bezeichnete Gröfse ist offenbar nichts anderes als die Summe der Summen der geraden negativen Potenzen aller ganzen positiven Zahlen von 2 an, mit Ausnahme der zweiten Potenz. Nun ist aber a. a. O. S. 77 bewiesen, dafs die Summe der Summen der geraden negativen Potenzen aller ganzen positiven Zahlen, von 2 an, $= \frac{3}{4}$ ist, und da man weifs, dafs die Summe der reciproken Werthe der zweiten Potenz aller positiven ganzen Zahlen, von 2 an, $= \frac{\pi^2}{6}-1$ ist, so hat man unmittelbar

$$S = \frac{3}{4}-\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right);$$

wie vorhin.

15.

Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale.

(Von Herrn Dr. *Gudermann* zu Münster.)

(Fortsetzung der Abhandlung No. I. im 1sten und No. 2. im 2ten Hefte dieses Bandes.)

Vierter Abschnitt.

§. 47.

Integral-Formel zum Ausdrucke des Zusammenhanges zwischen t und u, wenn $t = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am} u$ ist.

Bisher sind immer nur vier cyklische und vier hyperbolische Modular-Functionen $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{tn} u$, $\operatorname{dn} u$, $\mathfrak{Sn} u$, $\mathfrak{Cn} u$, $\mathfrak{Tn} u$, $\mathfrak{Dn} u$, mit den vermittelnden Functionen oder Amplituden $\operatorname{am} u$ und $\mathfrak{Am} u$ in Gebrauch gekommen; da aber auch die Function $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am} u$ in manchen Fällen wichtige Dienste leistet, so ist es nöthig, nun auch sie in näheren Betracht zu ziehen, und namentlich den Zusammenhang zwischen dieser Function und dem Argumente u durch eine Integral-Formel auszudrücken. Setzen wir

$$1.\quad \begin{cases} t = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am} u, \text{ so ist auch} \\ t = \sqrt{\dfrac{1-\operatorname{cn} u}{1+\operatorname{cn} u}} = \dfrac{\sqrt{(1+\operatorname{sn} u)} - \sqrt{(1-\operatorname{sn} u)}}{\sqrt{(1+\operatorname{sn} u)} + \sqrt{(1-\operatorname{sn} u)}} \text{ oder} \\ t = \mathfrak{Tang}\frac{1}{2}\mathfrak{Am}' u = \sqrt{\dfrac{\mathfrak{Cn}' u - 1}{\mathfrak{Cn}' u + 1}}. \end{cases}$$

Wir kehren die vorstehenden Gleichungen um, indem wir die Modular-Functionen selbst durch t ausdrücken. Aus der Gleichung $t = \sqrt{\frac{1-\operatorname{cn} u}{1+\operatorname{cn} u}}$ findet sich zunächst

$$2.\quad \operatorname{cn} u = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{sn} u = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \operatorname{tn} u = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Da $\operatorname{dn} u = \sqrt{(k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 u)}$ ist, so findet sich durch die Substitution des Werthes von $\operatorname{cn} u$ die Formel

$$3.\quad \operatorname{dn} u = \frac{\sqrt{(k'^2(1+t^2)^2 + k^2(1-t^2)^2)}}{1+t^2} \text{ oder } \operatorname{dn} u = \frac{\sqrt{(1+2(k'^2-k^2)t^2+t^4)}}{1+t^2}.$$

Ist $k = \sin\theta$, also $k' = \cos\theta$, so ist $k'^2 - k^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$, und also

$$\operatorname{dn} u = \frac{\sqrt{(1+2\cos 2\theta . t^2 + t^4)}}{1+t^2}.$$

Da $\cos 2\theta < 1$ ist, so kann $1+2\cos 2\theta . t^2+t^4$ nur in zwei imaginäre Factoren von der Form $1+\alpha t^2$ zerlegt werden, indessen läfst sich jene biquadratische Form in zwei quadratische Factoren zerlegen, welche die Formen

$$1+\alpha t+t^2 \quad \text{und} \quad 1-\alpha t+t^2$$

haben, und welche beide reell sind, wie nun gezeigt werden soll. Es ist $k'^2-k^2=1-2k^2$, daher ist $1+2\cos 2\theta . t^2+t^4=1+2t^2+t^4-4k^2t^2=(1+t^2)^2-4k^2t^2=(1+2kt+t^2)(1-2kt+t^2)$; der obige Ausdruck von $\mathrm{dn}\,u$ läfst sich hiernach auch also darstellen

$$4. \quad \mathrm{dn}\,u = \frac{\sqrt{(1+2kt+t^2)}.\sqrt{(1-2kt+t^2)}}{1+t^2}.$$

Wird dieser Ausdruck benutzt, so finden wir noch

$$5. \quad \begin{cases} \mathrm{snc}\,u = \dfrac{1-t^2}{\sqrt{(1+2kt+t^2)}.\sqrt{(1-2kt+t^2)}}, \\ \mathrm{cnc}\,u = \dfrac{2k't}{\sqrt{(1+2kt+t^2)}.\sqrt{(1-2kt+t^2)}}, \\ \mathrm{tnc}\,u = \dfrac{1-t^2}{2k't}, \\ \mathrm{dnc}\,u = \dfrac{k'(1+t^2)}{\sqrt{(1+2kt+t^2)}.\sqrt{(1-2kt+t^2)}}. \end{cases}$$

Aus der Gleichung $t=\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\mathrm{am}\,u$ folgt $\mathrm{am}\,u=2\,\mathrm{arctang}\,(t)$; das Differenzial dieser Gleichung ist $\mathrm{dn}\,u.\partial u=\frac{2\partial t}{1+t^2}$, also $\partial u=\frac{2\partial t}{(1+t^2)\mathrm{dn}\,u}$, folglich ist, da für $u=0$ auch $t=0$ sein mufs,

$$6. \quad \begin{cases} u=\int_0 \dfrac{2.\partial t}{\sqrt{(1+2\cos 2\theta . t^2+t^4)}}, & \text{oder} \\ u=\int_0 \dfrac{2.\partial t}{\sqrt{(1-2kt+t^2)}.\sqrt{(1+2kt+t^2)}}. \end{cases}$$

Setzt man in der Gleichung $t=\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\mathrm{am}\,u$ das Argument $u=K$, so wird $\mathrm{am}\,u=\frac{\pi}{2}$, also $t=\mathrm{tang}\,\frac{\pi}{4}=1$; daher haben wir zum Ausdrucke des Modular-Quadranten auch das bestimmte Integral

$$7. \quad K=\int_0^1 \frac{2\partial t}{\sqrt{(1+2\cos 2\theta . t^2+t^4)}} = \int_0^1 \frac{2\partial t}{\sqrt{(1+2kt+t^2)}.\sqrt{(1-2kt+t^2)}}.$$

Zusatz. Ist $k=\sin 45^0=\sqrt{\frac{1}{2}}$, so ist $\cos 2\theta=0$, also nun

$$u=\int_0 \frac{2\partial t}{\sqrt{(1+t^4)}} \quad \text{und} \quad K=\int_0^1 \frac{2\partial t}{\sqrt{(1+t^4)}}.$$

§. 48.

Ueber den Zusammenhang zwischen den Functionen von u und der Function $\text{tang}\frac{1}{2}\text{am}\,2u$.

Setzt man $t = \text{tang}\frac{1}{2}\text{am}\,2u$ oder auch $t = \text{tn}\,u\,\text{dn}\,u$, so können alle Formeln des §. 47. sogleich wieder gebraucht werden, wenn man nur durchweg $2u$ für u setzt. Die Integral-Formel für den Zusammenhang zwischen t und u ist daher nun

$$1.\quad u = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1-2kt+t^2)}\sqrt{(1+2kt+t^2)}} = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1+2\cos 2\theta . t^2+t^4)}}.$$

Nun ist $t=1$ für $u=\frac{K}{2}$ und für $u=K$ ist $\text{am}\,2u=\pi$, also $t=\text{tang}\frac{\pi}{2}$ oder $t=\frac{1}{0}$. Die Function t hat nun einige Aehnlichkeit mit $\text{tn}\,u$ selbst. Die cyklischen Modular-Functionen des Argumentes $2u$ lassen sich nun sehr bequem durch t ausdrücken, nicht eben so einfach werden die Ausdrücke für die Functionen des einfachen Argumentes u selbst. Bemerkenswerth sind indessen die Ausdrücke für $\text{sn}\,u$ und $\text{snc}\,u$, welche wir nun herleiten. Es ist nach §. 32. *a.*:

$$\text{sn}\,u = \frac{\sqrt{(1+\text{sn}\,2u)}-\sqrt{(1-\text{sn}\,2u)}}{\sqrt{(1+k\,\text{sn}\,2u)}+\sqrt{(1-k\,\text{sn}\,2u)}},$$

$$\text{snc}\,u = \frac{\sqrt{(1+\text{sn}\,2u)}+\sqrt{(1-\text{sn}\,2u)}}{\sqrt{(1+k\,\text{sn}\,2u)}+\sqrt{(1-k\,\text{sn}\,2u)}},$$

$$k\,\text{sn}\,u = \frac{\sqrt{(1+k\,\text{sn}\,2u)}-\sqrt{(1-k\,\text{sn}\,2u)}}{\sqrt{(1+\text{sn}\,2u)}+\sqrt{(1-\text{sn}\,2u)}},$$

$$k\,\text{snc}\,u = \frac{\sqrt{(1+k\,\text{sn}\,2u)}-\sqrt{(1-k\,\text{sn}\,2u)}}{\sqrt{(1+\text{sn}\,2u)}-\sqrt{(1-\text{sn}\,2u)}},$$

und substituirt man hierin für $\text{sn}\,2u$ den Werth $\text{sn}\,2u=\frac{2t}{1+t^2}$, so erhält man die Ausdrücke:

$$2.\quad \begin{cases} \text{sn}\,u = \dfrac{2t}{\sqrt{(1+2kt+t^2)}+\sqrt{(1-2kt+t^2)}}, \\ \text{sn}\,u = \dfrac{\sqrt{(1+2kt+t^2)}-\sqrt{(1-2kt+t^2)}}{2k}, \\ \text{snc}\,u = \dfrac{2}{\sqrt{(1+2kt+t^2)}+\sqrt{(1-2kt+t^2)}}, \\ \text{snc}\,u = \dfrac{\sqrt{(1+2kt+t^2)}-\sqrt{(1-2kt+t^2)}}{2kt}. \end{cases}$$

Man übersieht auch leicht, dafs sich aus dem ersten Ausdrucke für $\text{sn}\,u$ die drei übrigen auf der Stelle finden lassen, wenn man bedenkt, dafs

$$t = \text{tang}\tfrac{1}{2}\text{am}\,2u = \text{tn}\,u\,\text{dn}\,u = \frac{\text{sn}\,u}{\text{snc}\,u} \text{ ist.}$$

Die vorigen Formeln geben auch rückwärts die Bedeutungen der einzelnen Wurzel-Ausdrücke an, welche in ihnen vorkommen; da nämlich

$$\sqrt{(1+2kt+t^2)}+\sqrt{(1-2kt+t^2)} = \frac{2}{\operatorname{snc} u} \quad \text{und}$$
$$\sqrt{(1+2kt+t^2)}-\sqrt{(1-2kt+t^2)} = 2k\operatorname{sn} u$$

ist, so ist also

$$3. \quad \begin{cases} \sqrt{(1+2kt+t^2)} = \dfrac{1}{\operatorname{snc} u} + k\operatorname{sn} u, \\ \sqrt{(1-2kt+t^2)} = \dfrac{1}{\operatorname{snc} u} - k\operatorname{sn} u. \end{cases}$$

Subtrahirt man das Quadrat der letzten Gleichung von dem der ersten, so erhält man wieder $4kt = 4k\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}$, oder $t = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u} = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \operatorname{am} 2u$.

Setzt man $\operatorname{tn} u = x$, so ist $\operatorname{dn} u = \sqrt{\frac{1+k'^2x^2}{1+x^2}}$, also hat man zur Bestimmung von x die Gleichung $t^2 = \frac{x^2+k'^2x^4}{1+x^2}$ oder $k'^2x^4+x^2(1-t^2) = t^2$, und hieraus folgt

$$\operatorname{tn} u = \sqrt{\frac{-(1-t^2)+\sqrt{(1-2\cos 2\theta . t^2+t^4)}}{1+\cos 2\theta}},$$

wenn wieder $k = \sin\theta$ gesetzt wird.

Zusatz. Setzt man also

$$z = \frac{2t}{\sqrt{(1+2kt+t^2)}+\sqrt{(1-2kt+t^2)}} = \frac{\sqrt{(1+2kt+t^2)}-\sqrt{(1-2kt+t^2)}}{2k},$$

so ist

$$\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}.\sqrt{(1-k^2z^2)}} = \frac{\partial t}{\sqrt{(1+2kt+t^2)}\sqrt{(1-2kt+t^2)}},$$

weil jedes dieser beiden Differenziale $= \partial u$ ist

Anmerkung. Stellt man den Ausdruck von $\operatorname{tn}^2 u$ also dar:

$$-\operatorname{tn}^2 u = \frac{1-t^2-\sqrt{[1-2(k'^2-k^2)t^2+t^4]}}{2k'^2} = \frac{2-2t^2-2\sqrt{[1-2(k'^2-k^2)t^2+t^4]}}{4k'^2},$$

und beobachtet man, dafs

$$\sqrt{(1-2(k'^2-k^2)t^2+t^4)} = \sqrt{(1-2kti-t^2)}.\sqrt{(1+2kti-t^2)}$$

ist, so kann man die Quadratwurzel auf beiden Seiten ausziehen und erhält dadurch in einer imaginären Form den Ausdruck

$$\operatorname{tn} u = \frac{\sqrt{(1+2kti-t^2)}-\sqrt{(1-2kti-t^2)}}{2k'.i},$$

$$\operatorname{tnc} u = \frac{2i}{\sqrt{(1+2kti-t^2)}-\sqrt{(1-2kti-t^2)}} = \frac{\sqrt{(1+2kti-t^2)}+\sqrt{(1-2kti-t^2)}}{2kt},$$

$$\operatorname{tn} u = \frac{\sqrt{(t^2+2kti-1)}-\sqrt{(t^2-2kti-1)}}{2k'},$$

§. 49.

Zurückführung der cyklischen Modular-Functionen mit einem imaginären Modul von der Form $\cos\alpha \pm i\sin\alpha$ auf solche Functionen mit einem reellen Modul.

Nach §. 47. ist, wenn $t = \tang\frac{1}{2}\am u$ gesetzt wird,

$$u = \int_0 \frac{2\partial t}{\sqrt{(1+2\cos 2\theta . t^2 + t^4)}}.$$

Setzt man hierin für $2\cos 2\theta$ den Werth $e^{2\theta i} + e^{-2\theta i}$, so erhält man:

$$1. \quad u = \int_0 \frac{2\partial t}{\sqrt{(1+t^2 e^{2\theta i})}\sqrt{(1+t^2 e^{-2\theta i})}}.$$

Führen wir, um nicht zu hyperbolischen, sondern zu cyklischen Sinus überzugehen, die Gröfse $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$ ein, so ist $e^{2\theta i} = e^{\pi i} . e^{-2\theta' i} = -e^{-2\theta' i}$ und $e^{-2\theta i} = e^{-\pi i} . e^{+2\theta' i} = -e^{+2\theta' i}$, und also

$$u = \int_0 \frac{2\partial t}{\sqrt{(1-t^2 . e^{2\theta' i})}\sqrt{(1-t^2 e^{-2\theta i})}}.$$

Es ist nun $e^{\theta' i} = \cos\theta' + i\sin\vartheta' = k + ik'$ und $e^{-\theta' i} = k - ik'$, daher kann die Gleichung auch also dargestellt werden:

$$u = \int_0 \frac{2\partial t}{\sqrt{(1-(k+ik')^2 t^2)} . \sqrt{(1-(k-ik')^2 t^2)}}.$$

Setzen wir nun $z = (k+ik') . t$, also $t = \frac{z}{k+ik'}$ und $\lambda = \frac{k-ik'}{k+ik'}$, so erhalten wir

$$\frac{u(k+ik')}{2} = \int_0 \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}\sqrt{(1-\lambda^2 z^2)}}.$$

Dieser Gleichung gemäfs ist aber z oder $t\,(k+ik')$ der cyklische Modular-Sinus des Argumentes $\frac{u(k+ik')}{2}$ mit dem Modul $\lambda = \frac{k-ik'}{k+ik'}$. Es wird nicht unzweckmäfsig sein, dieses Resultat auf eine ursprüngliche Weise nachzuweisen. Zu dem Ende setzen wir

$$v = u(k+ik'), \qquad \text{also} \qquad \frac{v}{2} = \frac{u(k+ik')}{2}.$$

Die cyklischen Modular-Functionen des imaginären Argumentes $\frac{v}{2}$ also sollen sich auf den Modul $\frac{k-ik'}{k+ik'}$ beziehen, während sich die cyklischen Modular-Functionen des Argumentes u selbst auf den Modul k beziehen; halten wir diese Bemerkung im Sinne, so können wir die beiden Modul in der Bezeichnung ganz weglassen. Uebrigens setzen wir, wie vorhin, $\lambda = \frac{k-ik'}{k+ik'} = (k-ik')^2 = k^2 - k'^2 - 2ikk' = -\cos 2\theta - i\sin 2\theta$, so dafs also das erste Glied $-\cos 2\theta$ negativ ist für $\theta < 45^0$ und positiv ist für $\theta > 45^0$. Nehmen wir nun an die Gleichung

$$\mathrm{sn}\,\frac{v}{2} = (k+ik')\,t = (k+ik')\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}},$$

dann ist

$$\lambda\,\mathrm{sn}\,\frac{v}{2} = (k-ik')\,t = (k-ik')\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}},$$

oder

$$\mathrm{sn}\,\frac{v}{2} = (k+ik').\frac{\mathrm{sn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u} \quad \text{und} \quad \lambda\,\mathrm{sn}\,\frac{v}{2} = (k-ik').\frac{\mathrm{sn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\left(1-\mathrm{sn}\,\frac{v}{2}\right)\left(1-\lambda\,\mathrm{sn}\,\frac{v}{2}\right) = 1-\frac{2k\,\mathrm{sn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}+\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u} = \frac{2(1-k\,\mathrm{sn}\,u)}{1+\mathrm{cn}\,u}.$$

Setzen wir hierin $-u$ für u, wodurch sich auch v in $-v$ verwandelt, so erhalten wir noch

$$\left(1+\mathrm{sn}\,\frac{v}{2}\right)\left(1+\lambda\,\mathrm{sn}\,\frac{v}{2}\right) = \frac{2(1+k\,\mathrm{sn}\,u)}{1+\mathrm{cn}\,u};$$

wird diese Gleichung mit der vorigen multiplicirt, und dann die Quadratwurzel ausgezogen, so erhält man

$$\mathrm{cn}\,\frac{v}{2}\,\mathrm{dn}\,\frac{v}{2} = \frac{2\,\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}.$$

Differenziirt man aber die Gleichung

$$\mathrm{sn}\,\frac{v}{2} = (k+ik').\tan\tfrac{1}{2}\,\mathrm{am}\,u,$$

so erhält man:

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{cn}\,\frac{v}{2}\,\mathrm{dn}\,\frac{v}{2}.\partial v = (k+ik').\frac{\frac{1}{2}\partial\,\mathrm{am}\,u}{\cos^2\frac{1}{2}\,\mathrm{am}\,u} = (k+ik').\frac{\mathrm{dn}\,u\,.\,\partial u}{1+\mathrm{cn}\,u},$$

also

$$\mathrm{cn}\,\frac{v}{2}\,\mathrm{dn}\,\frac{v}{2}.\partial v = (k+ik').\frac{2\,\mathrm{dn}\,u\,.\,\partial u}{1+\mathrm{cn}\,u},$$

und wird diese Gleichung durch die vorige dividirt, so entsteht

$\partial v = (k+ik').\partial u$, also $v = (k+ik').u$, wie oben.

Es bleibt nun noch übrig, aus den Gleichungen

2.
$$\begin{cases} \mathrm{sn}\,\frac{v}{2} = (k+ik').\tan\frac{1}{2}\,\mathrm{am}\,u = (k+ik').\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}} \quad \text{und} \\ \lambda\,\mathrm{sn}\,\frac{v}{2} = (k-ik').\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}} \end{cases}$$

die Ausdrücke für die übrigen sich auf den Modul $\lambda = \frac{k-ik'}{k+ik'}$ beziehenden Modular-Functionen des Argumentes $\frac{v}{2} = \frac{u(k+ik')}{2}$ herzuleiten. Man findet zunächst

$$\mathrm{cn}\,\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+\mathrm{cn}\,u-(k+ik')^2(1-\mathrm{cn}\,u)}{1+\mathrm{cn}\,u}}, \quad \mathrm{dn}\,\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+\mathrm{cn}\,u-(k-ik')^2(1-\mathrm{cn}\,u)}{1+\mathrm{cn}\,u}}.$$

Stellen wir den Ausdruck $\mathrm{cn}\frac{v}{2}$, welcher umgeformt werden mufs, vor, unter

$$\mathrm{cn}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{\alpha}{1+\mathrm{cn}\,u}} - i\sqrt{\frac{\beta}{1+\mathrm{cn}\,u}},$$

dann ist

$$\alpha-\beta-2i\sqrt{(\alpha\beta)} = 1+\mathrm{cn}\,u-(k^2-k'^2)(1-\mathrm{cn}\,u)-2ikk'(1-\mathrm{cn}\,u),$$

also

$$\alpha-\beta = 1+\mathrm{cn}\,u-(k^2-k'^2)(1-\mathrm{cn}\,u) = 1-k^2+k'^2+(1+k^2-k'^2).\mathrm{cn}\,u$$

und

$$2\sqrt{(\alpha\beta)} = 2kk'(1-\mathrm{cn}\,u).$$

Aus diesen Gleichungen findet man, wenn man die Quadrate derselben addirt und die Wurzel auszieht, nach einer leichten Reduction

$$\alpha+\beta = 2\,\mathrm{dn}\,u \quad \text{und da} \quad \alpha-\beta = 2k'^2+2k^2\,\mathrm{cn}\,u;$$

$$\alpha = \mathrm{dn}\,u+k^2\,\mathrm{cn}\,u+k'^2, \quad \text{und} \quad \beta = \mathrm{dn}\,u-k^2\,\mathrm{cn}\,u-k'^2,$$

also

$$\mathrm{cn}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{dn}\,u+k^2\,\mathrm{cn}\,u+k'^2}{1+\mathrm{cn}\,u}} - i\sqrt{\frac{\mathrm{dn}\,u-k^2\,\mathrm{cn}\,u-k'^2}{1+\mathrm{cn}\,u}} \quad \text{und}$$

$$\mathrm{dn}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{dn}\,u+k^2\,\mathrm{cn}\,u+k'^2}{1+\mathrm{cn}\,u}} + i\sqrt{\frac{\mathrm{dn}\,u-k^2\,\mathrm{cn}\,u-k'^2}{1+\mathrm{cn}\,u}}.$$

Diese Formeln können auch also dargestellt werden:

$$3.\quad \begin{cases} \mathrm{cn}\frac{v}{2} = \sqrt{\left(\frac{1+\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}-k^2.\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}\right)} - i\sqrt{\left(k^2.\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}-\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}\right)}, \\ \mathrm{dn}\frac{v}{2} = \sqrt{\left(\frac{1+\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}-k^2.\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}\right)} + i\sqrt{\left(k^2.\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}-\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}\right)}. \end{cases}$$

§. 50.

Die vorhin entwickelten Formeln, wodurch die cyklischen Modular-Functionen mit dem imaginären Modul $\lambda = \frac{k-ik'}{k+ik'} = (k-ik')^2$ zurückgeführt werden auf cyklische Modular-Functionen des Argumentes u mit dem Modul k, werden noch ein wenig einfacher, wenn man in ihnen $2u$ für u setzt. Behält man die Bezeichnung

$$v = (k+ik')u$$

bei, und bezieht man die Modular-Functionen des Argumentes v zugleich auf jenen Modul λ, so verwandelt sich die Formel

$$\mathrm{sn}\frac{v}{2} = (k+ik')\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{am}\,u$$

sogleich in:

$$\mathrm{sn}\,v = (k+ik')\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{am}\,2u$$

oder

1. $\mathrm{sn}\,v = (k+ik').\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u$ und $\lambda\,\mathrm{sn}\,v = (k-ik').\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.$

Die Formeln (3.) verwandeln sich nun in

$$\mathrm{cn}\,v = \sqrt{\left(\frac{1+\mathrm{dn}\,2u}{1+\mathrm{cn}\,2u} - k^2.\frac{1-\mathrm{cn}\,2u}{1+\mathrm{cn}\,2u}\right)} - i\sqrt{\left(k^2.\frac{1-\mathrm{cn}\,2u}{1+\mathrm{cn}\,2u} - \frac{1-\mathrm{dn}\,2u}{1+\mathrm{cn}\,2u}\right)},$$

$$\mathrm{dn}\,v = \sqrt{\left(\frac{1+\mathrm{dn}\,2u}{1+\mathrm{cn}\,2u} - k^2.\frac{1-\mathrm{cn}\,2u}{1+\mathrm{cn}\,2u}\right)} + i\sqrt{\left(k^2.\frac{1-\mathrm{cn}\,2u}{1+\mathrm{cn}\,2u} - \frac{1-\mathrm{dn}\,2u}{1+\mathrm{cn}\,2u}\right)}.$$

Da aber dem §. 32. *a.* gemäfs $\frac{1+\mathrm{dn}\,2u}{1+\mathrm{cn}\,2u} = \frac{\mathrm{dn}^2\,u}{\mathrm{cn}^2\,u}$, $\frac{1-\mathrm{dn}\,2u}{1+\mathrm{cn}\,2u} = k^2\,\mathrm{sn}^2\,u$ und $\frac{1-\mathrm{cn}\,2u}{1+\mathrm{cn}\,2u} = \mathrm{tn}^2\,u\,\mathrm{dn}^2\,u$ ist, so werden diese Formeln

$$\mathrm{cn}\,v = \sqrt{\frac{\mathrm{dn}^2\,u - k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{dn}^2\,u}{\mathrm{cn}^2\,u}} - i\sqrt{\frac{k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{dn}^2\,u - k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{cn}^2\,u}{\mathrm{cn}^2\,u}}$$

oder

2. $$\mathrm{cn}\,v = \frac{\mathrm{dn}^2\,u}{\mathrm{cn}\,u} - ikk'.\frac{\mathrm{sn}^2\,u}{\mathrm{cn}\,u}, \quad \mathrm{dn}\,v = \frac{\mathrm{dn}^2\,u}{\mathrm{cn}\,u} + ikk'.\frac{\mathrm{sn}^2\,u}{\mathrm{cn}\,u}.$$

Setzen wir den mit λ conjugirten Modul $\sqrt{(1-\lambda^2)} = \lambda'$, so ist

$$\lambda' = \frac{2\sqrt{(ikk')}}{k+ik'}.$$

Dieser Ausdruck mufs noch in einer andern Gestalt dargestellt werden. Est ist zunächst $\lambda' = \sqrt{2kk'}.\sqrt{(2i)}.(k-ik')$, da aber $\sqrt{(2i)} = 1+i$ ist, so findet man $\lambda' = \sqrt{(2kk')}.(1+i)(k-ik')$ oder

3. $$\lambda' = \sqrt{(2kk')}.[k+k'+(k-k')i].$$

Die Formeln für $\mathrm{cn}\,v$ und $\mathrm{dn}\,v$ dienen nun auch noch zur Bestimmung der den beiden Moduln λ und λ' zugehörigen Modular-Quadranten, welche wir mit L und L' bezeichnen. Es mufs L so bestimmt werden, dafs $\mathrm{cn}\,L = 0$ sei; daher haben wir die Gleichung

$$\frac{\mathrm{dn}^2\,u - ikk'\,\mathrm{sn}^2\,u}{\mathrm{cn}\,u} = 0, \quad \text{oder} \quad \mathrm{dn}^2\,u - ikk'\,\mathrm{sn}^2\,u = 0.$$

Der durch diese Gleichung bestimmte Werth von u giebt mit $k+ik'$ multiplicirt den gesuchten Werth von L. Es ist aber jene Gleichung einerlei mit

$$1 = ikk'.\frac{\mathrm{sn}^2\,u}{\mathrm{dn}^2\,u} = \frac{ik}{k'}.\mathrm{cnc}^2\,u,$$

folglich ist

$$\mathrm{cnc}^2\,u = \frac{k'}{ik} = -\frac{ik'}{k}, \quad \text{also} \quad \mathrm{cnc}\,u = \sqrt{(-2i)}.\sqrt{\frac{k'}{2k}},$$

da aber $\sqrt{(-2i)} = 1-i$ ist, so ist

$$\mathrm{cnc}\,u = \sqrt{\frac{k'}{2k}} - i\sqrt{\frac{k'}{2k}},$$

und weil nach §. 32. auch $\mathrm{cn}\left(\frac{K}{2} + \frac{iK'}{2}\right) = (1-i)\sqrt{\frac{k'}{2k}}$ ist, so ist

$$K-u=\frac{K}{2}+\frac{iK'}{2}, \quad \text{oder} \quad u=\frac{K}{2}-\frac{iK'}{2},$$

und also der dem Modul $\lambda=\frac{k-ik'}{k+ik'}$ zugehörige Modular-Quadrant

$$4. \quad L=(k+ik').\left(\frac{K}{2}-\frac{iK'}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}K-\frac{1}{2}iK'}{k-ik'}.$$

Die Gleichung $\mathrm{dn}v=\frac{\mathrm{dn}^2u}{\mathrm{cn}u}+ikk'.\frac{\mathrm{sn}^2u}{\mathrm{cn}u}$ kann nun zur Probe dienen. Setzt man $u=\frac{K}{2}-\frac{iK'}{2}$, so mufs $v=L$ und also $\mathrm{dn}v=\lambda'$ werden. Da nun aber $\mathrm{dn}^2u=ikk'\,\mathrm{sn}^2u$ ist, so erhalten wir zunächst $\mathrm{dn}v=\frac{2ikk'\,\mathrm{sn}^2u}{\mathrm{cn}u}$; weil ferner $\mathrm{sn}^2u=\frac{k-ik'}{k}$ und $\frac{1}{\mathrm{cn}u}=(1-i)\sqrt{\frac{k}{2k'}}$ ist, so erhalten wir durch die Substitution dieser Werthe

$$\mathrm{dn}v=(k-ik')(1+i).\sqrt{(2kk')},$$

oder auch

$$\mathrm{dn}v=\sqrt{(2kk')}.[k+k'+i(k-k')]=\lambda'.$$

Setzt man in der Formel $\mathrm{cn}v=\frac{\mathrm{dn}^2u}{\mathrm{cn}u}-ikk'.\frac{\mathrm{sn}^2u}{\mathrm{cn}u}$ für u an die Stelle ui, so verwandelt sich der Gleichung $v=(k+ik')u$ gemäfs auch v in vi, daher ist $\mathrm{cn}(vi)=\frac{\mathrm{dn}'^2u}{\mathrm{cn}'u}+ikk'.\frac{\mathrm{sn}'^2u}{\mathrm{cn}'u}$, und da auch $\mathrm{cn}(vi)=\frac{1}{\mathrm{cn}'v}$ ist, wenn sich die Function $\mathrm{cn}'v$ auf den Modul λ' bezieht, so erhalten wir die Gleichung

$$\mathrm{cn}'v=\frac{\mathrm{cn}'u}{\mathrm{dn}'^2u+ikk'\,\mathrm{sn}'^2u},$$

welche zur Bestimmung des Modular-Quadranten L' dient, der zum Modul λ' gehört; soll $\mathrm{cn}'v=0$, also $v=L'$ sein, so mufs $\mathrm{cn}'u=0$, also $u=K'$ sein; daher ist

$$5. \quad L'=(k+ik').K'=\frac{K'}{k-ik'},$$

und es ist also $\frac{L}{L'}=\frac{K}{2K'}-\frac{i}{2}$. Hiernach haben wir also den Lehrsatz: *Wird* $\frac{k-ik'}{k+ik'}$ *statt des Moduls* k *gesetzt, so verwandelt sich* $\frac{K}{K'}$ *in* $\frac{1}{2}\left(\frac{K}{K'}-i\right)$.

Zusatz. Da

$$\lambda=\frac{k-ik'}{k+ik'}=(k-ik')^2=\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]^2$$
$$=\cos(\pi-2\theta)-i\sin(\pi-2\theta)$$

ist, so ist also

$\lambda=-\cos 2\theta-i\sin 2\theta$, und

$\lambda^n=(-1)^n.(\cos 2n\theta+i\sin 2n\theta)$, wenn $k=\sin\theta$ gesetzt wird.

§. 51.

Zurückführung der cyklischen Modular-Functionen auf andere mit einem kleineren Argumente und kleinerem Modul.

Wir kommen noch einmal auf die Formeln des §. 47. zurück, indem wir dem §. 30. gemäfs darin ku für u und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k setzen. Die Function $t = \tang \frac{1}{2} \am u$ wird nun

$$t = \tang \tfrac{1}{2} \am \left(ku, \frac{1}{k}\right) \quad \text{oder}$$

$$t = \sqrt{\frac{1-\dn u}{1+\dn u}} = \frac{k \sn u}{1+\dn u} = \frac{1-\dn u}{k \sn u} \quad \text{oder}$$

$$t = \frac{\sqrt{(1+k \sn u)} - \sqrt{(1-k \sn u)}}{\sqrt{(1+k \sn u)} + \sqrt{(1-k \sn u)}}.$$

Die Formeln (2.) und (3.) werden nun

$$k \sn u = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \dn u = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \cn u = \frac{\sqrt{\left[1-2\left(\frac{2}{k^2}-1\right)t^2+t^4\right]}}{1+t^2},$$

und die Formel (6.) des §. 47. verwandelt sich jetzt in

$$ku = \int_0 \frac{2\,\partial t}{\sqrt{\left[1-2\left(\frac{2}{k^2}-1\right)t^2+t^4\right]}},$$

Der in dieser Formel enthaltene Wurzel-Ausdruck kann jetzt in zwei reelle Factoren zerlegt werden, in welchen die erste Potenz von t nicht vorkommt, und wodurch man erhält:

$$ku = \int_0 \frac{2.\partial t}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{1+k'}{k}\right)^2 t^2\right]}\sqrt{\left[1-\left(\frac{1-k'}{k}\right)^2 t^2\right]}}.$$

Führen wir eine neue Gröfse z ein, nämlich $z = \frac{1+k'}{k}\,t$, also $t = \frac{k}{1+k'}\,z$, so ist $\frac{1-k'}{k}\,t = \frac{1-k'}{1+k'}\,z = \lambda z$, wenn man $\lambda = \frac{1-k'}{1+k'}$ setzt; da nun auch, $\partial t = \frac{k}{1+k'}\,\partial z$ ist, so erhalten wir

$$\left(\frac{1+k'}{2}\right)u = \int_0 \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}.\sqrt{(1-\lambda^2 z^2)}},$$

da für $t = 0$ auch u und z gleich Null sind. Dieser Gleichung gemäfs ist aber z der cyklische Modular-Sinus des Argumentes $\frac{1+k'}{2}.u$ mit dem Modul λ. Die beiden Modul λ und k' sind durch die Gleichung $\frac{1-k'}{1+k'} = \lambda$ mit einander verbunden; ist $\lambda' = \sqrt{(1-\lambda^2)}$ der mit λ conjugirte Modul so haben wir überhaupt die Gleichungen:

$$1.\quad \begin{cases} \lambda = \frac{1-k'}{1+k'} = \left(\frac{\sqrt{(1+k)}-\sqrt{(1-k)}}{\sqrt{(1+k)}+\sqrt{(1-k)}}\right)^2, & \lambda' = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}, \\ k' = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}, & k = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda} \text{ und } \lambda'^2.k^2 = 4\lambda.k', \end{cases}$$

welchen gemäfs $\lambda < k$ ist; da nämlich $\lambda = \frac{k^2}{(1+k')^2}$ ist, so ist $\lambda < k^2$, und da $k^2 < k$ ist, so ist um so mehr auch $\lambda < k$.

Setzen wir ferner:

$$v = \frac{1+k'}{2}.u,$$

also rückwärts

$$2.\quad u = \frac{2}{1+k'}.v = (1+\lambda).v, \text{ und } ku = 2\sqrt{\lambda}.v,$$

und beziehen wir im Folgenden alle Modular-Functionen des Argumentes v auf den Modul λ, nämlich $\mathrm{sn}\,v$, $\mathrm{cn}\,v$, $\mathrm{tn}\,v$, $\mathrm{dn}\,v$, ferner $\mathrm{am}\,v$; hingegen $\mathrm{sn}'v$, $\mathrm{cn}'v$, $\mathrm{dn}'v$, $\mathrm{tn}'v$, wie auch $\mathrm{am}'v$ auf den conjugirten Modul λ', so können wir den Zusammenhang zwischen den sich auf den Modul λ beziehenden Functionen des Argumentes v und den sich auf den Modul k beziehenden Functionen des Argumentes u in einfachen Formeln ausdrücken.

Da $\frac{k}{1+k'} = \sqrt{\lambda}$ ist, so erhält man, wenn in der Gleichung $t = \frac{k}{1+k'}z$ der Werth $t = \sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}}$ und $z = \mathrm{sn}\,v$ substituirt wird, auf der Stelle die Formel

$$\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sn}\,v = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right), \quad \text{oder}$$

$$3.\quad \begin{cases} \sqrt{\lambda}.\mathrm{sn}\,v = \sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}}, \text{ welche auch also dargestellt werden kann:} \\ \sqrt{\lambda}.\mathrm{sn}\,v = \frac{\sqrt{(1+k\,\mathrm{sn}\,u)}-\sqrt{(1-k\,\mathrm{sn}\,u)}}{\sqrt{(1+k\,\mathrm{sn}\,u)}+\sqrt{(1-k\,\mathrm{sn}\,u)}}, \text{ oder } \sqrt{\frac{1+k\,\mathrm{sn}\,u}{1-k\,\mathrm{sn}\,u}} = \frac{1+\sqrt{\lambda}.\mathrm{sn}\,v}{1-\sqrt{\lambda}.\mathrm{sn}\,v}. \end{cases}$$

Der Gleichung (2.) gemäfs ist $v < u$, und da auch $\lambda < k$ ist, so beziehen sich also die Functionen $\mathrm{sn}\,v$, $\mathrm{cn}\,v$, $\mathrm{dn}\,v$, $\mathrm{tn}\,v$, $\mathrm{am}\,v$ auf ein kleineres Argument $v < u$ und zugleich auf einen kleineren Modul $\lambda < k$. Will man umgekehrt die Functionen von u durch Functionen von v ausdrücken, so hat man nur den Werth $t = \sqrt{\lambda}.\mathrm{sn}\,v$ in den zu Anfange dieses Paragraphen aufgestellten Formeln zu substituiren.

Aus der Formel $\mathrm{sn}\,v = \sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}\sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}} = \frac{(1+k')\,\mathrm{sn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}$ folgt

$$4.\quad \mathrm{cn}\,v = \sqrt{\frac{2}{1-k'}}\sqrt{\frac{\mathrm{dn}\,u-k'}{1+\mathrm{dn}\,u}},$$

und aus der Formel $\lambda \operatorname{sn} v = \sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}\sqrt{\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}} = \frac{(1-k')\operatorname{sn} u}{1+\operatorname{dn} u}$ folgt

5. $\operatorname{dn} v = \sqrt{\frac{2}{1+k'}}\sqrt{\frac{k'+\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}}$;

ferner ist

6. $\operatorname{tn} v = \sqrt{\frac{1+k'}{2}}\sqrt{\frac{1-\operatorname{dn} u}{\operatorname{dn} u-k'}}$;

7. $\operatorname{snc} v = \sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}\sqrt{\frac{\operatorname{dn} u-k'}{\operatorname{dn} u+k'}} = \sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}\sqrt{\frac{1-\operatorname{dnc} u}{1+\operatorname{dnc} u}} = \frac{(1+k')\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u+k'}$,

8. $\operatorname{cnc} v = \frac{\lambda' \operatorname{sn} v}{\operatorname{dn} v} = \sqrt{\frac{2k'}{1-k'}}\sqrt{\frac{1-\operatorname{dn} u}{k'+\operatorname{dn} u}} = \sqrt{\frac{2}{1-k'}}\sqrt{\frac{\operatorname{dnc} u-k'}{1+\operatorname{dnc} u}}$,

9. $\operatorname{dnc} v = \sqrt{\frac{2k'}{1+k'}}\sqrt{\frac{1+\operatorname{dn} u}{k'+\operatorname{dn} u}} = \sqrt{\frac{2}{1+k'}}\sqrt{\frac{k'+\operatorname{dnc} u}{1+\operatorname{dnc} u}}$.

Die Functionen des Complementes von v für den Modul λ hangen also ebenso von dem Argumente $K-u$ ab, wie die Functionen von v selbst für den Modul λ vom Argumente u abhangen.

§. 52.

Die Formeln (4.) und (5.) bieten einen bemerkenswerthen Umstand dar; setzt man in der einen Formel $-k'$ für k', so verwandelt sie sich in die andere; daraus kann man schliefsen, dafs sie sich bequem als Binome werden darstellen lassen, welche nur in den Vorzeichen vor den zweiten Gliedern verschieden sind.

Setzt man, da im Allgemeinen $\operatorname{dn} v > \operatorname{cn} v$ ist,

$$\operatorname{cn} v = \sqrt{\frac{\alpha}{1+\operatorname{dn} u}} - \sqrt{\frac{\beta}{1+\operatorname{dn} u}} \quad \text{und} \quad \operatorname{dn} v = \sqrt{\frac{\alpha}{1+\operatorname{dn} u}} + \sqrt{\frac{\beta}{1+\operatorname{dn} u}},$$

so soll also $\sqrt{\frac{\alpha}{1+\operatorname{dn} u}} = \frac{\operatorname{cn} v+\operatorname{dn} v}{2}$, oder $\frac{\alpha}{1+\operatorname{dn} u} = \left(\frac{\operatorname{cn} v+\operatorname{dn} v}{2}\right)^2$ und $\frac{\beta}{1+\operatorname{dn} u} = \left(\frac{\operatorname{dn} v-\operatorname{cn} v}{2}\right)^2$ sein; es ist aber $\frac{\operatorname{dn}^2 v+\operatorname{cn}^2 v}{4} = \frac{\operatorname{dn} u-k'^2}{k^2(1+\operatorname{dn} u)}$, ferner

$$\operatorname{dn} v.\operatorname{cn} v = \frac{2}{k}\cdot\frac{\sqrt{(\operatorname{dn}^2 u-k'^2)}}{1+\operatorname{dn} u} = \frac{2\operatorname{cn} u}{1+\operatorname{dn} u}, \quad \text{also} \quad \frac{2\operatorname{dn} v \operatorname{cn} v}{4} = \frac{\operatorname{cn} u}{1+\operatorname{dn} u},$$

daher ist

$$\alpha = \frac{\operatorname{dn} u-k'^2}{k^2} + \operatorname{cn} u \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\operatorname{dn} u-k'^2}{k^2} - \operatorname{cn} u, \quad \text{oder}$$

$$\alpha = 1+\operatorname{cn} u - \left(\frac{1-\operatorname{dn} u}{k^2}\right) \quad \text{und} \quad \beta = 1-\operatorname{cn} u - \left(\frac{1-\operatorname{dn} u}{k^2}\right),$$

und also

$$\operatorname{cn} v = \sqrt{\left(\frac{1+\operatorname{cn} u}{1+\operatorname{dn} u} - \frac{1}{k^2}\cdot\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}\right)} - \sqrt{\left(\frac{1-\operatorname{cn} u}{1+\operatorname{dn} u} - \frac{1}{k^2}\cdot\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}\right)},$$

$$\operatorname{dn} v = \sqrt{\left(\frac{1+\operatorname{cn} u}{1+\operatorname{dn} u} - \frac{1}{k^2}\cdot\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}\right)} + \sqrt{\left(\frac{1-\operatorname{cn} u}{1+\operatorname{dn} u} - \frac{1}{k^2}\cdot\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}\right)}.$$

Es können diese Formeln auch also dargestellt werden:

$$\operatorname{cn} v = \sqrt{\frac{(1+\operatorname{cn} u)(\operatorname{dn} u+\operatorname{cn} u)}{(1+\operatorname{dn} u)^2}} - \sqrt{\frac{(1-\operatorname{cn} u)(\operatorname{dn} u-\operatorname{cn} u)}{(1+\operatorname{dn} u)^2}},$$

$$\operatorname{dn} v = \sqrt{\frac{(1+\operatorname{cn} u)(\operatorname{dn} u+\operatorname{cn} u)}{(1+\operatorname{dn} u)^2}} + \sqrt{\frac{(1-\operatorname{cn} u)(\operatorname{dn} u-\operatorname{cn} u)}{(1+\operatorname{dn} u)^2}}.$$

Da dem §. 32. *a.* gemäfs ist

$$1-\operatorname{dn} u = \frac{2k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u}{2} \operatorname{cn}^2 \frac{u}{2}}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{u}{2}}, \qquad 1+\operatorname{dn} u = \frac{2 \operatorname{dn}^2 \frac{u}{2}}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{u}{2}},$$

$$1+\operatorname{cn} u = \frac{2 \operatorname{cn}^2 \frac{u}{2}}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{u}{2}}, \qquad 1-\operatorname{cn} u = \frac{2 \operatorname{sn}^2 \frac{u}{2} \operatorname{dn}^2 \frac{u}{2}}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{u}{2}},$$

$$\operatorname{dn} u+\operatorname{cn} u = \frac{2 \operatorname{cn}^2 \frac{u}{2} \operatorname{dn}^2 \frac{u}{2}}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{u}{2}}, \qquad \operatorname{dn} u-\operatorname{cn} u = \frac{2k'^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u}{2}}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{u}{2}},$$

so erhält man durch die Substitution dieser Werthe

$$\sqrt{\lambda}.\operatorname{sn} v = k \operatorname{sn} \frac{u}{2} \operatorname{snc} \frac{u}{2},$$

$$\operatorname{cn} v = \frac{\operatorname{cn}^2 \frac{u}{2}}{\operatorname{dn} \frac{u}{2}} - \frac{k' \operatorname{sn}^2 \frac{u}{2}}{\operatorname{dn} \frac{u}{2}} \qquad \operatorname{dn} v = \frac{\operatorname{cn}^2 \frac{u}{2}}{\operatorname{dn} \frac{u}{2}} + \frac{k' \operatorname{sn}^2 \frac{u}{2}}{\operatorname{dn} \frac{u}{2}},$$

oder nach einer geringen Abänderung:

$$10. \quad \begin{cases} \operatorname{sn} v = (1+k').\operatorname{sn} \frac{u}{2} \operatorname{snc} \frac{u}{2}, \\ \operatorname{cn} v = \operatorname{cn} \frac{u}{2} \operatorname{snc} \frac{u}{2} - \operatorname{sn} \frac{u}{2} \operatorname{cnc} \frac{u}{2}, \\ \operatorname{dn} v = \operatorname{cn} \frac{u}{2} \operatorname{snc} \frac{u}{2} + \operatorname{sn} \frac{u}{2} \operatorname{cnc} \frac{u}{2}. \end{cases}$$

Die mittlere von diesen Formeln kann auch also dargestellt werden:

$\cos \operatorname{am} v = \sin \operatorname{amc} \frac{u}{2} \cos \operatorname{am} \frac{u}{2} - \cos \operatorname{amc} \frac{u}{2} \sin \operatorname{am} \frac{u}{2} = \sin\left(\operatorname{amc} \frac{u}{2} - \operatorname{am} \frac{u}{2}\right)$;
es ist also

$$11. \quad \operatorname{am} v = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{amc} \frac{u}{2}\right) + \operatorname{am} \frac{u}{2},$$

und die letzte Formel ist einerlei mit $\operatorname{dn} u = \sin\left(\operatorname{amc} \frac{u}{2} + \operatorname{am} \frac{u}{2}\right)$. Es ist $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{amc} \frac{u}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{tang} \operatorname{amc} \frac{u}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tnc} \frac{u}{2}} = k' \operatorname{tn} \frac{u}{2}$, daher ist die For-

mel (11.) einerlei mit

$$12. \quad \operatorname{am} v = \operatorname{am}\frac{u}{2} + \operatorname{arc\,tang}\left(k' \operatorname{tn}\frac{u}{2}\right).$$

Aus den Formeln $\operatorname{dn}^2\frac{u}{2} = k'^2 + k^2\operatorname{cn}^2\frac{u}{2} = 1 - k^2\operatorname{sn}^2\frac{u}{2}$ folgt

$$\operatorname{cn}^2\frac{u}{2} = \frac{\operatorname{dn}^2\frac{u}{2} - k'^2}{k^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{sn}^2\frac{u}{2} = \frac{1 - \operatorname{dn}^2\frac{u}{2}}{k^2};$$

werden diese Werthe substituirt, so erhält man

$$13. \quad \operatorname{cn} v = \frac{\operatorname{dn}\frac{u}{2} - \operatorname{dnc}\frac{u}{2}}{1-k'} \quad \text{und} \quad \operatorname{dn} v = \frac{\operatorname{dn}\frac{u}{2} + \operatorname{dnc}\frac{u}{2}}{1+k'}.$$

Aus den Gleichungen

$$\operatorname{sn} v = (1+k')\frac{\operatorname{sn}\frac{u}{2}\operatorname{cn}\frac{u}{2}}{\operatorname{dn}\frac{u}{2}} \quad \text{und} \quad \operatorname{cn} v = \frac{\operatorname{cn}^2\frac{u}{2} - k'\operatorname{sn}^2\frac{u}{2}}{\operatorname{dn}\frac{u}{2}}$$

folgt

$$14. \quad \operatorname{tn} v = \frac{(1+k')\operatorname{tn}\frac{u}{2}}{1 - k'\operatorname{tn}^2\frac{u}{2}}.$$

Führt man in diese Gleichung den Modul λ statt k' ein, so erhält man zunächst $\operatorname{tn} v = \dfrac{2\operatorname{sn}\frac{u}{2}\operatorname{cn}\frac{u}{2}}{(1+\lambda)\operatorname{cn}^2\frac{u}{2} - (1-\lambda)\operatorname{sn}^2\frac{u}{2}}$, und es ist also

$$15. \quad \operatorname{tn} v = \frac{\sin 2\operatorname{am}\frac{u}{2}}{\cos 2\operatorname{am}\frac{u}{2} + \lambda}.$$

Da $v = (1+k').\frac{u}{2}$ ist, so ist $v > \frac{u}{2}$, und also v zwischen den Grenzen $\frac{u}{2}$ und u enthalten.

§. 53.

Kehrt man die Gleichung $\sqrt{\lambda}.\operatorname{sn} v = \sqrt{\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}}$ um, so erhält man:

$$16. \quad \operatorname{dn} u = \frac{1 - \lambda\operatorname{sn}^2 v}{1 + \lambda\operatorname{sn}^2 v}.$$

Da $\operatorname{dn}^2 u = 1 - k^2\operatorname{sn}^2 u$ ist, so findet man $k\operatorname{sn} u = \frac{2\sqrt{\lambda}.\operatorname{sn} v}{1+\lambda\operatorname{sn}^2 v}$, oder, weil $k = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}$ ist,

$$17.\quad \operatorname{sn} u = \frac{(1+\lambda)\operatorname{sn} v}{1+\lambda \operatorname{sn}^2 v}.$$

Hieraus folgt $1-\operatorname{sn} u = \frac{(1-\operatorname{sn} v)(1-\lambda \operatorname{sn} v)}{1+\lambda \operatorname{sn}^2 v}$ und $1+\operatorname{sn} u = \frac{(1+\operatorname{sn} v)(1+\lambda \operatorname{sn} v)}{1+\lambda \operatorname{sn}^2 v}$, also

$$18.\quad \sqrt{\frac{1+\operatorname{sn} u}{1-\operatorname{sn} u}} = \sqrt{\frac{1+\operatorname{sn} v}{1-\operatorname{sn} v}} \cdot \sqrt{\frac{1+\lambda \operatorname{sn} v}{1-\lambda \operatorname{sn} v}} \quad \text{und}$$

$$19.\quad \operatorname{cn} u = \frac{\operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{1+\lambda \operatorname{sn}^2 v} = \frac{(1-\lambda)\operatorname{snc} v}{1-\lambda \operatorname{snc}^2 v}.$$

Aus (17.) und (19.) erhält man durch Division

$$20.\quad \operatorname{tn} u = (1+\lambda) \cdot \frac{\operatorname{tn} v}{\operatorname{dn} v} = \frac{1}{1-\lambda} \cdot \frac{\operatorname{dnc} v}{\operatorname{tnc} v}.$$

Ferner erhält man

$$21.\quad \operatorname{snc} u = \frac{\operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{1-\lambda \operatorname{sn}^2 v} = \frac{(1+\lambda)\operatorname{snc} v}{1+\lambda \operatorname{snc}^2 v},$$

Da $\operatorname{cnc} u = \frac{k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$ ist, so erhält man, wenn der Werth $k' = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$ substituirt wird,

$$22.\quad \operatorname{cnc} u = \frac{(1-\lambda)\operatorname{sn} v}{1-\lambda \operatorname{sn}^2 v}.$$

Hieraus folgt aber leicht:

$$23.\quad \sqrt{\frac{1+\operatorname{cnc} u}{1-\operatorname{cnc} u}} = \sqrt{\frac{1+\operatorname{sn} v}{1-\operatorname{sn} v}} \cdot \sqrt{\frac{1-\lambda \operatorname{sn} v}{1+\lambda \operatorname{sn} v}}.$$

Aus (18.) und (23.) folgt durch Multiplication:

$$24.\quad \sqrt{\frac{1+\operatorname{sn} u}{1-\operatorname{sn} u}} \cdot \sqrt{\frac{1+\operatorname{cnc} u}{1-\operatorname{cnc} u}} = \frac{1+\operatorname{sn} v}{1-\operatorname{sn} v}.$$

Nimmt man die natürlichen Logarithmen auf beiden Seiten dieser Gleichung, so hat man:

$$25.\quad \begin{cases} \operatorname{am} v = \dfrac{\operatorname{am} u + \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{amc} u\right)}{2}; \text{ eben so findet man:} \\ \operatorname{amc} v = \dfrac{\operatorname{amc} u + \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{am} u\right)}{2}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (13.), nämlich $\operatorname{dn} \frac{u}{2} - \operatorname{dnc} \frac{u}{2} = \frac{2\lambda}{1+\lambda} \operatorname{cn} v$ und $\operatorname{dn} \frac{u}{2} + \operatorname{dnc} \frac{u}{2} = \frac{2}{1+\lambda} \operatorname{dn} v$ folgt durch Addition und Subtraction

$$26.\quad \operatorname{dn} \frac{u}{2} = \frac{\operatorname{dn} v + \lambda \operatorname{cn} v}{1+\lambda}, \qquad \operatorname{dnc} \frac{u}{2} = \frac{\operatorname{dn} v - \lambda \operatorname{cn} v}{1+\lambda};$$

und hieraus findet sich

$$27.\quad \begin{cases} \operatorname{sn} \frac{u}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\operatorname{dn} v \operatorname{cn} v + \lambda \operatorname{sn}^2 v}{2}}; & \operatorname{snc} \frac{u}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\operatorname{dn} v \operatorname{cn} v + \lambda \operatorname{sn}^2 v}{2}}; \\ \operatorname{cn} \frac{u}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\operatorname{dn} v \operatorname{cn} v - \lambda \operatorname{sn}^2 v}{2}}; & \operatorname{cnc} \frac{u}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\operatorname{dn} v \operatorname{cn} v - \lambda \operatorname{sn}^2 v}{2}}; \end{cases}$$

28. $\cos 2\,\mathrm{am}\frac{u}{2} = \mathrm{dn}\,v\,\mathrm{cn}\,v - \lambda\,\mathrm{sn}^2 v$; $\cos 2\,\mathrm{amc}\frac{u}{2} = -\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{cn}\,v - \lambda\,\mathrm{sn}^2 v$,

29. $\sin 2\,\mathrm{am}\frac{u}{2} = \mathrm{sn}\,v(\mathrm{dn}\,v + \lambda\,\mathrm{cn}\,v)$; $\sin 2\,\mathrm{amc}\frac{u}{2} = \mathrm{sn}\,v(\mathrm{dn}\,v - \lambda\,\mathrm{cn}\,v)$.

Aus der Gleichung (15.) folgt, wenn für $\mathrm{tn}\,v$ sein Werth $\frac{\mathrm{sn}\,v}{\mathrm{cn}\,v} = \frac{\sin \mathrm{am}\,v}{\cos \mathrm{am}\,v}$ gesetzt wird, nach Fortschaffung der Nenner

$$\sin\left(2.\mathrm{am}\frac{u}{2} - \mathrm{am}\,v\right) = \lambda\,\mathrm{sn}\,v, \quad \text{oder}$$

$$30. \quad \mathrm{am}\frac{u}{2} = \tfrac{1}{2}\mathrm{am}\,v + \tfrac{1}{2}\arcsin(\lambda\,\mathrm{sn}\,v).$$

Nach Formel (12.) ist $\mathrm{am}\,v > \mathrm{am}\frac{u}{2}$ und dieser Formel gemäfs ist $\mathrm{am}\,v < 2\,\mathrm{am}\frac{u}{2}$, wenn $\mathrm{am}\,v < \pi$ ist, daher liegt dann $\mathrm{am}\,v$ zwischen den Grenzen $\mathrm{am}\frac{u}{2}$ und $2\,\mathrm{am}\frac{u}{2}$. Da $\cos\left(2\,\mathrm{am}\frac{u}{2} - \mathrm{am}\,v\right) = \mathrm{dn}\,v$ immer positiv ist, so lange u und also auch v reel sind, so mufs $2\,\mathrm{am}\frac{u}{2} - \mathrm{am}\,v$ immer zwischen den Grenzen $+\theta$ und $-\theta$ enthalten sein, wenn θ den Arcus des Moduls bezeichnet, welcher $< \frac{\pi}{2}$ ist; das Glied $\arcsin(\lambda\,\mathrm{sn}\,v)$ kann zwar bald positiv, bald negativ sein, jenachdem $\mathrm{sn}\,v$ positiv oder negativ ist, seine absolute Gröfse ist aber immer $< \frac{\pi}{2}$.

Die Formel (30.) kann auch also dargestellt werden:

$$31. \quad \begin{cases} \mathrm{am}\frac{u}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{am}\,v + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\lambda\,\mathrm{sn}\,v}{\mathrm{dn}\,v}\right), \\ \mathrm{am}\frac{u}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{am}\,v \pm \frac{1}{2}\arccos(\mathrm{dn}\,v). \end{cases}$$

Diese letzte Formel wäre die einfachste, aber sie läfst unbestimmt, ob das zweite Glied positiv oder negativ sei.

§. 54.

Bezeichnen wir die beiden neuen Modular-Quadranten, den zum Modul λ gehörigen mit L, und den zum Modul λ' gehörenden mit L', so findet sich am einfachsten die Gröfse von L nach der Formel (4.) im §. 51.; soll nämlich $\mathrm{cn}\,v = 0$ sein, so mufs $\mathrm{dn}\,u - k' = 0$, also $u = K$ sein; da aber immer $v = \frac{1+k'}{2}.u$ ist, so ist also:

$$32. \quad \begin{cases} L = \frac{1+k'}{2}.K, \text{ oder umgekehrt} \\ K = \frac{2}{1+k'}.L. \end{cases}$$

Setzt man in der Formel (5.) $u = K$, also $\mathrm{dn}\, u = k'$, so erhält man $\mathrm{dn}\, v = \sqrt{\frac{4k'}{(1+k')^2}} = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'} = \lambda'$, wie auch sein mufs.

Setzt man in der Formel (4.) ui für u und vi für v, so erhält man:

$$\mathrm{cn}'\, v = \sqrt{\frac{1-k'}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\mathrm{snc}'\, u}}{\frac{1}{\mathrm{snc}'\, u} - k'}}, \quad \text{oder} \quad \mathrm{cn}'\, v = \sqrt{\frac{1-k'}{2}}\, \sqrt{\frac{1+\mathrm{snc}'\, u}{1-k'\,\mathrm{snc}'\, u}},$$

und die Gleichung $v = \frac{1+k'}{2}.u$ verwandelt sich in $vi = \frac{1+k'}{2}.ui$, oder $v = \frac{1+k'}{2}.u$ Der durch die Gleichung $\mathrm{cn}'\, v = 0$ bestimmte Werth von v ist der zum Modul λ' gehörende Modular-Quadrant L'. Es mufs demnach $\mathrm{snc}'\, u = -1$, also $K' \pm u = 3K'$ und $\pm u = 2K'$ sein; da u positiv sein soll, so ist also $u = 2K'$ und

$$33. \qquad L' = \frac{(1+k')}{2}.2K' = (1+k')K'.$$

Alle übrigen Formeln bestätigen die Richtigkeit dieser Bestimmung. Aus den Gleichungen (32.) und (33.) folgt durch Division:

$$34. \qquad \begin{cases} \frac{L}{L'} = \frac{1}{2}.\frac{K}{K'}, \text{ oder umgekehrt} \\ \frac{K}{K'} = 2.\frac{L}{L'}. \end{cases}$$

Wird also $\frac{1-k'}{1+k'}$ statt des Moduls k gesetzt, so verwandelt sich das Verhältnifs $\frac{K}{K'}$ in $\frac{1}{2}.\frac{K}{K'}$.

Die vier Modular-Gleichungen $k = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}$, $k' = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$, $\lambda = \frac{1-k'}{1+k'}$, und $\lambda' = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$ bieten einen bemerkenswerthen Umstand dar; setzen wir in ihnen k' für λ und bezeichnen den dadurch geänderten Werth des frühern Moduls k mit x, so haben wir $x = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$; und da auch $\lambda' = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$ ist, so ist also $x = \lambda'$; vertauschen wir also k' mit λ, so vertauschen wir auch k mit λ', und umgekehrt. Man kann also in allen vorhergehenden Formeln gleichzeitig setzen:

λ' für k, λ für k', k' für λ und k für λ',

ohne dafs jene Formeln dadurch unrichtig werden. Damit die cyklischen Modular-Functionen des Argumentes u sich demnächst wieder auf den Modul k, welcher $> \lambda$ ist, beziehen, so setzen wir gleichzeitig ui für v,

und weil dann auch das frühere Argument imaginär wird, so setzen wir wi für u.

Hiernach verwandelt sich die Gleichung $\mathrm{tn}\,u = (1+\lambda).\frac{\mathrm{tn}\,v}{\mathrm{dn}\,v}$ in $\mathrm{tn}'(wi) = (1+k').\frac{\mathrm{tn}'(ui)}{\mathrm{dn}'(ui)}$, oder auch

$$\mathrm{sn}\,w = (1+k').\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}, \quad \text{oder} \quad \mathrm{sn}\,w = (1+k').\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u.$$

In dieser Gleichung bezieht sich die Function $\mathrm{sn}\,w$ wieder auf den Modul λ, welcher $< k$ ist, und die Functionen $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{snc}\,u$ beziehen sich auf den Modul k; sie hat grofse Uebereinstimmung mit der Formel (10.) im §. 52., und wird einerlei damit, wenn man $\frac{u}{2}$ für u setzt. Die Gleichung $v = \frac{1+k'}{2}.u$ verwandelt sich nun in $ui = \frac{1+\lambda}{2}.wi$, oder $u = \frac{1+\lambda}{2}.w$, also ist $w = \frac{2}{1+\lambda}.u = (1+k')u$, und da $v = \frac{(1+k')}{2}u$ ist, so ist

$$w = 2v.$$

Die Formel $\mathrm{sn}\,w = (1+k').\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u$ stimmt mit der ersten von den Formeln (10.) im §. 52. überein, wenn man darin $\frac{u}{2}$ für u und v für w setzt. Ueberhaupt darf man in den Formeln (10.) — (15.), wie auch in den Formeln (26.) — (31.) setzen u für $\frac{u}{2}$, wenn man gleichzeitig $w = (1+k')u$ setzt für v.

§. 55.

Einfache Berechnungs-Art des Modular-Quadranten K aus dem gegebenen Modul k.

Den vorhin entwickelten Formeln $\lambda = \frac{1-k'}{1+k'}$ und $\lambda' = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$, ferner $K = \frac{2}{1+k'}.L$ gemäfs kann man den gegebenen Modul k auf einen kleineren λ (oder den Modul k' auf einen gröfseren λ') zurückführen, zugleich aber auch den Quadranten K auf einen kleineren L. Bezeichnen wir die aus dem Modul k durch wiederholte Anwendung der angegebenen Formeln hergeleiteten, immer kleiner werdenden Modul der Reihe nach mit k_1, k_2, k_3, k_4, ... k_r, die conjugirten immer gröfser werdenden Modul aber mit k'_1, k'_2, k'_3, k'_4, ... k'_r; die den erstgenannten Moduln zugehörigen immer kleiner werdenden Modular-Quadranten aber mit K_1, K_2, K_3, K_4, ... K_r (die conjugirten immer gröfser werdenden Quadranten aber mit K'_1, K'_2, K'_3, K'_4, ... K'_r), so haben wir $\lambda = k_1$, also

$\lambda' = k_1'$ und $L = K_1$; es ist mithin $k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}$, $k_1' = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$ und $K = \frac{2}{1+k'} . K_1$. Setzen wir ferner

1. $k' = \frac{n}{m}$; $k_1' = \frac{n_1}{m_1}$; $k_2' = \frac{n_2}{m_2}$; $k_3' = \frac{n_3}{m_3}$; .... $k_r' = \frac{n_r}{m_r}$,

so können wir die sämmtlichen Nenner dieser Brüche willkürlich wählen, ihre Zähler werden dann aber völlig bestimmt sein.

Substituiren wir die beiden ersten Brüche in der Formel $k_1' = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$, so wird sie

$$\frac{n_1}{m_1} = \frac{2\sqrt{(mn)}}{m+n};$$

setzen wir also

2. $$\begin{cases} m_1 = \frac{m+n}{2}, & \text{so ist} \quad n_1 = \sqrt{(mn)}, \quad \text{eben so} \\ m_2 = \frac{m_1+n_1}{2}, & \text{so ist} \quad n_2 = \sqrt{(m_1 . n_1)}, \\ m_3 = \frac{m_2+n_2}{2}, & \text{so ist} \quad n_3 = \sqrt{(m_2 . n_2)}, \\ m_4 = \frac{m_3+n_3}{2}, & \text{so ist} \quad n_4 = \sqrt{(m_3 . n_3)}, \\ \text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Den ersten Nenner können wir noch beliebig wählen; setzen wir aber

$$m = 1, \quad \text{so ist} \quad n = k'.$$

Da jeder folgende Nenner das arithmetische, jeder folgende Zähler aber das geometrische Mittel zwischen dem Zähler und Nenner des vorhergehenden Bruches ist, so erhellet deutlich, dafs die auf einander folgenden Brüche $\frac{n}{m}$, $\frac{n_1}{m_1}$, $\frac{n_2}{m_2}$, $\frac{n_3}{m_3}$ etc. oder die Modul k', k_1', k_2', k_3' etc. sich sehr rasch der Grenze Eins nähern. Ist aber $k_r' = \frac{n_r}{m_r} = 1$ (also $k_r = 0$), so setzen wir

$$m_r = n_r = \eta.$$

Wird auch in der Formel $K = \frac{2}{1+k'} . K_1$ für k' der Bruch $\frac{n}{m}$ substituirt, so verwandelt sie sich in $K = \frac{2m}{m+n} . K_1 = \frac{m}{m_1} . K_1$; daher ist

$$\frac{K}{m} = \frac{K_1}{m_1} = \frac{K_2}{m_2} .... = \frac{K_r}{m_r}.$$

Wird auch in dieser Formel r so grofs genommen, dafs $m_r = n_r = \eta$, also

$k_r = 0$ ist, so ist $K_r = \frac{\pi}{2}$, und da $m = 1$ ist, so ist auch

$$3. \quad K = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\eta}.$$

Bei Rechnungen in bestimmten Zahlen ist schon m_4 hinlänglich genau $= n_4$, und also jede dieser Zahlen $= \eta$, zumal da immer k als $< \sin\frac{\pi}{4}$, also $k' > \sin\frac{\pi}{4}$ angesehen werden darf, wie bald gezeigt werden soll. Aus der Formel (3.) folgt rückwärts $\eta = \frac{\pi}{2K}$, und es hat also η hier dieselbe Bedeutung, wie im §. 10. Die in den Formeln (2.) vorkommenden Gröfsen nennen wir die zum Modul k gehörigen Modular-Zahlen.

Zusatz. Ist der Quadrant K berechnet, so hat man auch $K_1 = m_1.K$; $K_2 = m_2.K$; $K_3 = m_3.K$; $K_4 = m_4.K$; u. s. w.

§. 56.

Berechnung des Quadranten K', wenn sein Modul k' wenig von Eins verschieden ist.

Wenn der Modul k sehr klein, also der zugehörige Modular-Quadrant K näherungsweise $= \frac{\pi}{2}$ ist, so ist bekanntlich der conjugirte Quadrant sehr grofs, und zwar desto gröfser, je weniger k' von Eins verschieden ist. Der Quadrant K' kann in einem solchen Falle nach einer Näherungs-Formel berechnet werden, welche ein desto richtigeres Resultat giebt, je kleiner der Modul k ist. Es hat mit dieser Berechnung eine ähnliche Bewandtnifs, wie mit der Berechnung der cyklischen Tangente eines Winkels, welcher vom rechten Winkel wenig verschieden ist.

Es ist $\arg\operatorname{am}'(\Phi) = \int_0 \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-k'^2\sin^2\varphi)}} = \int_0 \frac{\partial\varphi\sqrt{(1-k'^2\sin^2\varphi)}}{1-k'^2\sin^2\varphi}$;

setzen wir nun in dem im Zähler befindlichen Wurzelausdrucke, weil hier der Fehler den geringsten Einflufs hat, $k' = 1$, so ist $\sqrt{(1-k'^2\sin^2\Phi)} = \cos\Phi$, und also näherungsweise

$$\arg\operatorname{am}'(\Phi) = \int_0 \frac{\partial\varphi\cos\varphi}{1-k'^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{k'}\int_0 \frac{\partial(k'\sin\varphi)}{1-k'^2\sin^2\varphi}, \quad \text{oder}$$

$$\arg\operatorname{am}'(\Phi) = \frac{1}{k'}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\,(k'\sin\Phi) = \frac{1}{k'}\log\sqrt{\frac{1+k'\sin\varphi}{1-k'\sin\varphi}}.$$

Setzt man in dieser Formel $\Phi = \frac{\pi}{2}$, so erhält man ebenfalls näherungsweise:

$$K' = \frac{1}{k'}\log\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}} = \frac{1}{k'}\log\frac{1+k'}{k}.$$

Auch diese Formel zeigt, dafs K' desto gröfser wird, je kleiner k genommen wird, da $\log\frac{1}{k}$ dieselbe Eigenschaft hat. Wir stellen diese Formel vor unter

$$K' = \log\frac{\alpha}{k} = \log\alpha + \log\frac{1}{k},$$

und richten sie also ein, dafs sie auch auf den Modul $\frac{1}{k'}$ pafst, da auch der Modul $\frac{1}{k'}$ wenig von Eins verschieden ist, wenn k' selbst davon wenig verschieden ist. Setzt man aber $\frac{1}{k'}$ statt des Moduls k', also $\frac{ik}{k'}$ statt k, so verwandelt sich (dem §. 31. Zusatz 1. gemäfs) der Modul K' in $k'(K'-iK) = K'-\frac{\pi i}{2}$, wegen der Kleinheit von k; daher haben wir

$$K'-\frac{\pi i}{2} = \log\frac{\alpha k'}{ik} = \log\frac{\alpha k'}{k} - \log i,$$

oder, weil $\log i = \frac{\pi i}{2}$ ist, $K' = \log\frac{\alpha k'}{k}$. Nehmen wir das arithmetische Mittel zwischen diesem Resultate und dem vorigen $K' = \log\frac{\alpha}{k}$, so erhalten wir die Form

$$K' = \log\left(\frac{\alpha\sqrt{k'}}{k}\right).$$

Setzen wir jetzt hierin $\frac{1}{k'}$ statt k', und $\frac{ik}{k'}$ statt k, so erhalten wir

$$K'-\frac{\pi i}{2} = \log\left(\frac{\alpha\sqrt{\frac{1}{k'}\cdot k'}}{ik}\right) = \log\left(\frac{\alpha\sqrt{k'}}{k}\right) - \log i \text{ oder}$$

$$K' = \log\left(\frac{\alpha\sqrt{k'}}{k}\right),$$

d. h. der Ausdruck für den Quadranten K' pafst nun nicht blofs auf den Modul k', sondern auch auf den Modul $\frac{1}{k'}$, weil der Ausdruck sich wieder in sich selbst verwandelt, wenn $\frac{1}{k'}$ statt des Moduls k' gesetzt wird. Es bleibt noch die Constante α zu ermitteln übrig, und zu diesem Ende verkleinern wir den Modul k noch einmal. Dem §. 54. gemäfs ist $2.\frac{K'}{K} = \frac{L'}{L}$, oder da wegen der Kleinheit von k und λ ist $K = L = \frac{\pi}{2}$, so mufs $2K' = L'$ sein, und also auch

$$2K' = L' = \log\left(\frac{\alpha\sqrt{\lambda'}}{\lambda}\right) \quad \text{oder} \quad 2\log\left(\frac{\alpha\sqrt{k'}}{k}\right) = \log\left(\frac{\alpha\sqrt{\lambda'}}{\lambda}\right),$$

folglich

$$\frac{\alpha^2 k'}{k^2} = \frac{\alpha\sqrt{\lambda'}}{\lambda} \quad \text{und also} \quad \alpha = \frac{k^2}{k'}\cdot\frac{\sqrt{\lambda'}}{\lambda}.$$

Da aber $k^2 = \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2}$ und $k' = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$, also $\frac{k^2}{k'} = \frac{4\lambda}{\lambda'^2}$ ist, so ist $\alpha = \frac{4\lambda}{\lambda'^2} \cdot \frac{\sqrt{\lambda'}}{\lambda} = \frac{4}{(\sqrt{\lambda'})^3}$, und dieser Ausdruck reducirt sich auf $\alpha = 4$, da der Modul λ' noch weniger von Eins verschieden ist, als der Modul k'. Hiernach haben wir also die Formel

$$K' = \log\left(\frac{4\sqrt{k'}}{k}\right)$$

zum Ausdrucke des Modular-Quadranten K', wenn der zugehörige Modul k' wenig von Eins verschieden ist, und es ist diese Formel desto richtiger, je kleiner der Modul k ist. Bei sehr grofser Kleinheit von k kann der Ausdruck auf $K' = \log\frac{4}{k}$ beschränkt werden.

Anmerkung. Der so eben gefundene Ausdruck $K' = \log\left(\frac{4\sqrt{k'}}{k}\right)$ oder $K' = \log\left(\frac{4}{k}\right)$ kann als das Anfangsglied einer so rasch convergirenden Reihe betrachtet werden, dafs die darauf folgenden Glieder ihrer grofsen Kleinheit wegen auf das zu findende Resultat keinen Einflufs mehr haben.

§. 57.

Berechnung des Quadranten K' aus denselben Modularzahlen, welche zur Berechnung des Quadranten K dienten.

Wenden wir dieselbe Bezeichnung an, wie im §. 55., so ist nach §. 54.:

$$2.\frac{K'}{K} = \frac{K'_1}{K_1};\ \text{eben so ist}\ 2.\frac{K'_1}{K_1} = \frac{K'_2}{K_2};\ \ldots\ 2.\frac{K'_{(r-1)}}{K_{(r-1)}} = \frac{K'_r}{K_r}.$$

Werden diese r Gleichungen mit einander multiplicirt, so erhält man

$$2^r.\frac{K'}{K} = \frac{K'_r}{K_r}.$$

Ist der zum Quadranten K_r gehörende Modul k_r hinlänglich genau $= 0$ geworden, so ist $K_r = \frac{\pi}{2}$ und also

$$K'_r.\frac{2}{\pi} = 2^r.\frac{K'}{K},$$

oder da $K'_r = \log\frac{4\sqrt{k'_r}}{k_r}$ ist, so ist

$$2^r.\frac{K'}{K} = \frac{2}{\pi}\log\frac{4\sqrt{k'_r}}{k_r} = \frac{1}{\pi}\log\left(\frac{16\,k'_r}{k_r^2}\right),$$

also

$$\frac{\pi K'}{K} = \log\sqrt[2^r]{\left(\frac{16\,k'_r}{k_r^2}\right)},$$

oder auch

$$1. \quad e^{-\frac{\pi K'}{K}} = \sqrt[2^r]{\left(\frac{k_r^2}{16 k_r'}\right)}.$$

Da $k^2 = \frac{4k_1}{(1+k_1)^2}$ und $k' = \frac{1-k_1}{1+k_1}$ ist, so ist $\frac{k^2}{k'} = \frac{4k_1}{k_1'^2}$, und also $\frac{k^2}{16k'} = \sqrt{\frac{k_1^2}{16 k_1'^4}}$, oder auch

$$\frac{k^2}{16k'} \cdot (\sqrt{k_1'})^3 = \sqrt{\frac{k_1^2}{16 k_1'}};$$

eben so ist

$$\frac{k_1^2}{16k_1'} \cdot (\sqrt{k_2'})^3 = \sqrt{\frac{k_2^2}{16 k_2'}},$$

oder

$$\sqrt{\frac{k_1^2}{16k_1'}} \cdot (\sqrt[4]{k_2'})^3 = \sqrt[4]{\frac{k_2^2}{16 k_2'}},$$

$$\sqrt[4]{\frac{k_2^2}{16k_2'}} \cdot (\sqrt[8]{k_3'})^3 = \sqrt[8]{\frac{k_3^2}{16 k_3'}},$$

u. s. w.

Werden diese Gleichungen mit einander multiplicirt, und diejenigen Factoren weggelassen, welche sich, weil sie sich auf beiden Seiten befinden, aufheben, so erhält man die Formel

$$\sqrt[2^r]{\frac{k_r^2}{16 k_r'}} = \frac{k^2}{16k'} (\sqrt[2]{k_1'} \cdot \sqrt[4]{k_2'} \cdot \sqrt[8]{k_3'} \ldots \sqrt[2^r]{k_r'})^3.$$

Wird dieser Werth in der Gleichung (1.) substituirt, und dann r als unendlich grofs angesehen, so hat man die Formel

$$2. \quad e^{-\frac{\pi K'}{K}} = \frac{k^2}{16k'} \cdot (k_1')^{\frac{3}{2}} \cdot (k_2')^{\frac{3}{4}} \cdot (k_3')^{\frac{3}{8}} \cdot (k_4')^{\frac{3}{16}} \ldots,$$

wodurch die Exponential-Gröfse $e^{-\frac{\pi K'}{K}}$ als ein Product unendlich vieler Factoren dargestellt worden ist; diese Factoren nähern sich aber sehr rasch der Grenze Eins, und aus diesem Grunde geben schon einige erste Factoren des Productes, etwa bis zum Factor $(k_4')^{\frac{3}{16}}$, bei wirklichen Anwendungen ein hinlänglich genaues Resultat.

Man kann rückwärts sehr leicht zeigen, dafs die Exponential-Gröfse $e^{-\frac{\pi K'}{K}}$ durch das gefundene Product vollkommen characterisirt wird. Vertauschen wir nämlich in jenem Producte den Modul k mit k_1, also auch k' mit k_1', wie auch K mit K_1 und K' mit K_1', so erhalten wir:

$$e^{-\frac{\pi K_1'}{K_1}} = \frac{k_1^2}{16 k_1'}(k_2')^{\frac{3}{2}}.(k_3')^{\frac{3}{4}}.(k_4')^{\frac{3}{8}}.(k_5')^{\frac{3}{16}}....;$$

wird das Quadrat der Gleichung (2.) hierdurch dividirt, so entsteht die Gleichung:

$$e^{-\frac{2\pi K'}{K}+\frac{\pi K_1'}{K_1}} = \left(\frac{k^2}{16 k'}\right)^2.(k_1')^3.\frac{16 k_1'}{k_1^2},$$

und der Ausdruck auf der rechten Seite reducirt sich auf Eins, wenn darin die Werthe $k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}$ und $k' = \frac{1-k_1}{1+k_1}$ substituirt werden: der Exponent der Potenz von e ist also $=0$, oder auch $2.\frac{K'}{K} = \frac{K_1'}{K'}$, was mit der Formel (34.) im §. 54. übereinstimmt.

Werden für k_1', k_2', k_3', k_4' etc. die im §. 55. angegebenen Brüche substituirt, und wird auch jetzt wieder $\frac{\pi}{2K} = \eta$ gesetzt, so erhält man, wenn auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen genommen werden, die rasch convergirende Reihe

$$3. \quad \eta.K' = \log\left(\frac{4\sqrt{k'}}{k}\right) + \tfrac{3}{4}\log\left(\frac{m_1}{n_1}\right) + \tfrac{3}{8}\log\left(\frac{m_2}{n_2}\right) + \tfrac{3}{16}\log\left(\frac{m_3}{n_3}\right) + \tfrac{3}{32}\log\left(\frac{m_4}{n_4}\right) + ...$$

Hiernach kann also der Quadrant K' aus denselben Modular-Zahlen berechnet werden, welche zur Berechnung von η oder K dem §. 55. gemäfs dienten. Die Reihe (3.) convergirt desto rascher, je gröfser der Modul k' ist, und die Berechnung von η oder K nach dem im §. 55. angegebenen Verfahren geht ebenfalls desto rascher von Statten, je gröfser k' ist. Man vereinigt also beide Vortheile, wenn man nach dem Verfahren des §. 55. denjenigen Quadranten berechnet, dessen Modul $< \sin 45^0$ ist, und nach der so eben gefundenen Reihe den conjugirten Quadranten, dessen Modul $> \sin 45^0$ ist.

§. 58.

Darstellung der Functionen $\sin(\eta u)$, $\cos(\eta u)$ und $\tang(\eta u)$, wenn am u gegeben ist, und der Functionen $\Sin(\eta u)$, $\Cos(\eta u)$ und $\Tang(\eta u)$, wenn am$'$ u gegeben ist, als Producte unendlich vieler Factoren in Anwendung derselben Modular-Zahlen, welche zur Berechnung von K oder η dienen.

Ist in den Formeln des §. 51. bis §. 54. $v = u_1$, so kann man eine ganze Reihe von Argumenten u_1, u_2, u_3, u_4, ... u_r, die sich auf die Modul k_1, k_2, k_3, ... k_r beziehen, herleiten, deren jedes von dem vor-

hergehenden eben so abhängt, wie das Argument u_1 oder v von u abhängt. Es sei ferner $\operatorname{am} u = \Phi$, $\operatorname{am} u_1 = \Phi_1$, $\operatorname{am} u_2 = \Phi_2$, $\operatorname{am} u_3 = \Phi_3$, $\operatorname{am} u_4 = \Phi_4$, u. s. w., bis $\operatorname{am} u_r = \Phi_r$, indem wir die successiven Modul k_1, k_2, k_3, ... k_r, worauf sich diese Amplituden beziehen, der Kürze wegen in der Bezeichnung weglassen. Es ist nun $\operatorname{dn} u = \sqrt{(\cos^2\Phi + k'^2 \sin^2\Phi)}$, und wenn wir überhaupt die Bezeichnung des §. 55. anwenden,

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{\left(\cos^2\Phi + \frac{n^2}{m^2}\sin^2\Phi\right)} = \frac{\sqrt{(m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi)}}{m}.$$

Setzen wir also:

$$\Delta = \sqrt{(m^2\cos^2\Phi + n^2\sin^2\Phi)}, \qquad \Delta_1 = \sqrt{(m_1^2\cos^2\Phi_1 + n_1^2\sin^2\Phi_1)},$$
$$\Delta_2 = \sqrt{(m_2^2\cos^2\Phi_2 + n_2^2\sin^2\Phi_2)} \quad \text{u. s. w.,}$$

so ist

$$\operatorname{dn} u = \frac{\Delta}{m}, \quad \operatorname{dn} u_1 = \frac{\Delta_1}{m_1}, \quad \operatorname{dn} u_2 = \frac{\Delta_2}{m_2}, \quad \operatorname{dn} u_3 = \frac{\Delta_3}{m_3}, \quad \ldots. \quad \operatorname{dn} u_r = \frac{\Delta_r}{m_r}.$$

Substituiren wir in der Formel (5.) des §. 51. die angenommenen Zeichen, so haben wir, da $v = u_1$ sein soll, die Formel

$$\frac{\Delta_1}{m_1} = \sqrt{\frac{2m}{m+n}}\sqrt{\frac{\frac{n+\Delta}{m}}{1+\frac{\Delta}{m}}} = \sqrt{\frac{2m}{2m_1}}\cdot\sqrt{\frac{n+\Delta}{m+\Delta}},$$

oder auch

$$1. \quad \begin{cases} \Delta_1 = \sqrt{\left(\frac{n+\Delta}{m+\Delta}\cdot m m_1\right)}, & \text{eben so ist} \\ \Delta_2 = \sqrt{\left(\frac{n_1+\Delta_1}{m_1+\Delta_1}\cdot m_1 m_2\right)}, \\ \Delta_3 = \sqrt{\left(\frac{n_2+\Delta_2}{m_2+\Delta_2}\cdot m_2 m_3\right)}, \\ \text{u. s. w.,} \end{cases}$$

und nach diesen ziemlich einfachen Formeln müssen die Gröfsen Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, ... Δ_r berechnet werden. Auch diese Gröfsen nähern sich der Grenze η, welcher sich die Modular-Zahlen im §. 55. nähern; denn da $\Delta_r = \sqrt{(m_r^2\cos^2\Phi_r + n_r^2\sin^2\Phi_r)}$ ist, so ist, wenn $m_r = n_r = \eta$ wird, $\Delta_r = \eta\sqrt{(\cos^2\Phi_r + \sin^2\Phi_r)} = \eta$.

Nach Formel (2.) des §. 51. ist $u = \frac{2}{1+k'}\cdot u_1 = \frac{2m}{m+n}\cdot u_1 = \frac{m}{m_1}u_1$, also $\frac{u}{m} = \frac{u_1}{m_1} = \frac{u_2}{m_2} \ldots = \frac{u_r}{m_r}$, oder wenn $m_r = \eta$ ist, so ist $u = \frac{u_r}{\eta}$, oder auch

$$u_r = \eta u,$$

d. h. die Argumente u, u_1, u_2, u_3, ... u_r nähern sich der Grenze ηu.

Da ferner $\Phi_r = \operatorname{am} u_r$ ist, so ist auch, wenn k_r hinlänglich genau $= 0$ ist, $\Phi_r = u_r = \eta u$, d. h. die Amplituden Φ, Φ_1, Φ_2, Φ_3, ... Φ_r nähern sich eben so schnell derselben Grenze ηu.

Der Formel (20.) im §. 53. gemäfs ist $\operatorname{tn} u = (1+\lambda).\frac{\operatorname{tn} u_1}{\operatorname{dn} u_1} = \frac{2}{1+k'}.\frac{\operatorname{tn} u_1}{\operatorname{dn} u_1}$ $= \frac{m \operatorname{tn} u_1}{m_1 \operatorname{dn} u_1}$, oder auch

$\operatorname{tn} u = \frac{m}{\Delta_1} \operatorname{tn} u_1$; eben so ist $\operatorname{tn} u_1 = \frac{m_1}{\Delta_2} \operatorname{tn} u_2$, $\operatorname{tn} u_2 = \frac{m_2}{\Delta_3}.\operatorname{tn} u_3$, u. s. w.

Da nun $\operatorname{tn} u_r = \operatorname{tang} u_r = \operatorname{tang}(\eta u)$ wird, wenn r hinlänglich grofs oder lieber unendlich grofs genommen wird, so erhält man durch die Multiplication der vorstehenden Gleichungen die Formel

$$2. \begin{cases} \operatorname{tang}(\eta u) = \operatorname{tang}\Phi.\left(\frac{\Delta_1}{m}.\frac{\Delta_2}{m_1}.\frac{\Delta_3}{m_2}.\frac{\Delta_4}{m_3} \ldots.\right), \text{ oder auch, da } m = 1 \text{ ist,} \\ \operatorname{tang}(\eta u) = \eta \operatorname{tang}\Phi.\left(\frac{\Delta_1}{m_1}.\frac{\Delta_2}{m_2}.\frac{\Delta_3}{m_3}.\frac{\Delta_4}{m_4} \ldots.\right). \end{cases}$$

Die Factoren dieses Productes convergiren nun sehr rasch gegen die Grenze Eins, da $\Delta_r = m_r = \eta$ ist, und zwar desto rascher, je kleiner der Modul k ist.

Der Formel $\operatorname{sn} u_1 = \frac{1+k'}{1+\operatorname{dn} u}.\operatorname{sn} u$ des §. 51. gemäfs ist $\operatorname{sn} u_1 =$ $\frac{2m_1}{m+\Delta} \operatorname{sn} u$, eben so $\operatorname{sn} u_2 = \frac{2m_2}{m_1+\Delta_1} \operatorname{sn} u_1$, $\operatorname{sn} u_3 = \frac{2m_3}{m_2+\Delta_2} \operatorname{sn} u_2$, u. s. w.

Da nun $\operatorname{sn} u_r = \sin(\eta u)$ wird bei gehöriger Kleinheit von k_r oder Gröfse von r, so erhält man durch die Multiplication jener Gleichungen

$$3. \quad \sin(\eta u) = \sin\Phi.\left(\frac{2m_1}{m+\Delta}.\frac{2m_2}{m_1+\Delta_1}.\frac{2m_3}{m_2+\Delta_2}.\frac{2m_4}{m_3+\Delta_3} \ldots.\right).$$

Der Formel (7.) des §. 51. gemäfs ist $\operatorname{snc} u_1 = \frac{\operatorname{cn} u_1}{\operatorname{dn} u_1} = \frac{(1+k')\operatorname{cn} u}{k'+\operatorname{dn} u}$ $= \frac{2m_1}{n+\Delta} \operatorname{cn} u$, und also

$\operatorname{cn} u_1 = \frac{2\Delta_1}{n+\Delta} \operatorname{cn} u$; eben so ist $\operatorname{cn} u_2 = \frac{2\Delta_2}{n_1+\Delta_1} \operatorname{cn} u_1$, u. s. w.

Aus diesen Gleichungen erhält man eben so, wie vorhin

$$4. \quad \cos(\eta u) = \cos\Phi.\left(\frac{2\Delta_1}{n+\Delta}.\frac{2\Delta_2}{n_1+\Delta_1}.\frac{2\Delta_3}{n_2+\Delta_2}.\frac{2\Delta_4}{n_3+\Delta_3} \ldots.\right).$$

Im Allgemeinen hat keine der drei Formeln (2.), (3.), (4.) einen Vorzug vor der anderen; die eine convergirt so rasch als die andere; die sämmtlichen briggischen Logarithmen, welche bei ihrer Anwendung vorkommen, kamen auch schon bei der recurrirenden Berechnung der Gröfsen Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 etc. vor, und die Modular-Zahlen des §. 55., welche

hier wieder gebraucht werden, dienten schon zur Berechnung von η; ist ηu nach einer von diesen Formeln berechnet worden, so erhält man durch Division die Gröfse von u selbst. Die Berechnung von $\Delta_1 = \sqrt{(1-k^2\sin^2\Phi)}$ kann durch ein bekanntes Verfahren erleichtert werden.

Zusatz. Setzen wir in den obigen Formeln ui, $u_1 i$, $u_2 i$ etc. für u, u_1, u_2 etc., ohne den Modul mit dem conjugirten zu vertauschen, so verwandelt sich $\Delta = \mathrm{dn}\, u$ in $\Delta = \frac{\mathrm{dn}' u}{\mathrm{cn}' u} = \sqrt{(1+k^2\,\mathrm{tn}'^2 u)}$; setzen wir nun $\mathrm{am}' u = \psi$, so ist $\Delta = \sqrt{(1+k^2\,\mathrm{tang}^2\psi)} = \frac{\sqrt{(1-k'^2\sin^2\psi)}}{\cos\psi}$. Die Modular-Zahlen bleiben nun dieselben, wie im §. 55., auch bleiben die Formeln (1.) ungeändert, welche zur Berechnung von Δ_1, Δ_2, Δ_3 etc. aus $\Delta = \sqrt{(1+k^2\,\mathrm{tang}^2\psi)}$ dienen, obgleich diese Gröfsen selbst nun andere Werthe erhalten.

Da $\Delta_r = \frac{\sqrt{(m_r^2 - n_r^2\sin^2\psi_r)}}{\cos\psi_r}$ ist, so erhalten wir auch nun, wenn $m_r = n_r = \eta$ geworden ist,

$$\Delta_r = \eta_1 . \frac{\sqrt{(1-\sin^2\psi_r)}}{\cos\psi_r} = \eta .$$

Da sich nun aber $\mathrm{tang}\,\Phi = \mathrm{tn}\, u$ in $i\,\mathrm{sn}' u = i\sin\psi$; $\cos\Phi = \mathrm{cn}\, u$ in $\frac{1}{\mathrm{cn}' u} = \frac{1}{\cos\psi}$ und $\sin\Phi = \mathrm{sn}\, u$ in $i\,\mathrm{tn}' u = i\,\mathrm{tang}\,\psi$ abändert, so erhalten wir die Formeln:

$$5.\quad \mathfrak{Tang}(\eta u) = \sin\psi . \left(\frac{\Delta_1}{m} . \frac{\Delta_2}{m_1} . \frac{\Delta_3}{m_2} . \frac{\Delta_4}{m_3} \ldots .\right),$$

$$6.\quad \mathfrak{Sin}(\eta u) = \mathrm{tang}\,\psi . \left(\frac{2m_1}{m+\Delta} . \frac{2m_2}{m_1+\Delta_1} . \frac{2m_3}{m_2+\Delta_2} \ldots .\right),$$

$$7.\quad \mathfrak{Cos}(\eta u) = \frac{1}{\cos\psi} . \left(\frac{2\Delta_1}{n+\Delta} . \frac{2\Delta_2}{n_1+\Delta_1} . \frac{2\Delta_3}{n_2+\Delta_2} \ldots .\right).$$

Die Anwendung der ersten Formel für $\mathfrak{Tang}(\eta u)$ ist nicht zu empfehlen, wenn u beträchtlich grofs ist, weil der $\mathfrak{Arcus}(\eta u)$ aus dem bekannten Werthe von $\mathfrak{Tang}(\eta u)$ dann nicht scharf genug bestimmt werden kann.

§. 59.

Die Gröfse ηu dargestellt in rasch convergirenden Reihen, wenn $\mathrm{am}\, u$ oder $\mathrm{am}' u$ gegeben ist, in Anwendung derselben Modular-Zahlen, welche zur Berechnung von η oder K dienen.

Setzt man in den Formeln des §. 52., wie auch in der Formel (2.) des §. 51. und der Formel (30.) des §. 53. jetzt u für $\frac{u}{2}$, u_1 für v und k_1 für λ, so erhält man

$$u = \frac{1}{1+k'}.u_1,$$

$$\mathrm{dn}\,u_1 = \frac{\mathrm{dn}\,u + \mathrm{dnc}\,u}{1+k'},$$

$$\mathrm{cn}\,u_1 = \frac{\mathrm{dn}\,u - \mathrm{dnc}\,u}{1-k'},$$

$$\mathrm{sn}\,u_1 = (1+k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u \quad \text{und}$$

$$\mathrm{am}\,u = \tfrac{1}{2}\mathrm{am}\,u_1 + \tfrac{1}{2}\arcsin(k_1\,\mathrm{sn}\,u_1) = \tfrac{1}{2}\mathrm{am}\,u_1 + \tfrac{1}{2}\arctang\left(\frac{k_1\,\mathrm{sn}\,u_1}{\mathrm{dn}\,u_1}\right).$$

Wenden wir dieselben Modular-Zahlen, wie in §. 55. an, so haben wir, $u = \frac{m}{m+n}u_1$ oder $\frac{2u}{m} = \frac{u_1}{m_1}$; eben so ist $2.\frac{u_1}{m_1} = \frac{u_2}{m_2}$, $2.\frac{u_2}{m_2} = \frac{u_3}{m_3}$ u. s. w. Werden diese Gleichungen mit einander multiplicirt, so erhält man $2^r.u = \frac{u_r}{m_r}$. Da sich nun m_r der Grenze η nähert, so nähert sich also $\frac{u_r}{2_r}$ der Grenze ηu, und $\frac{\mathrm{am}\,u_r}{2^r}$ derselben Grenze ηu, da sich der Modul k_r der Grenze Null nähert.

Setzt man wieder $\mathrm{dn}\,u = \frac{\nabla}{m}$, $\mathrm{dn}\,u_1 = \frac{\nabla_1}{m_1}$, $\mathrm{dn}\,u_2 = \frac{\nabla_2}{m_2}$; ... ... $\mathrm{dn}\,u_r = \frac{\nabla_r}{m_r}$, so ist $\frac{\nabla_1}{m_1} = \frac{\left(\frac{\nabla}{m}+\frac{n}{\nabla}\right)m}{2m_1}$ oder $\nabla_1 = \frac{1}{2}\left(\nabla + \frac{mn}{\nabla}\right)$. Da $mn = n_1^2$ ist, so kann die Formel auch also geschrieben werden:

$$1.\quad \begin{cases} \nabla_1 = \frac{1}{2}\left(\nabla + \frac{n_1^2}{\nabla}\right); & \text{eben so ist} \\ \nabla_2 = \frac{1}{2}\left(\nabla_1 + \frac{n_2^2}{\nabla_1}\right), \\ \nabla_3 = \frac{1}{2}\left(\nabla_2 + \frac{n_3^2}{\nabla_2}\right) \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Ferner ist $\mathrm{cn}\,u_1 = \frac{\left(\frac{\nabla}{m}-\frac{n}{\nabla}\right).m}{m-n}$, und also

$$\frac{m-n}{2}.\mathrm{cn}\,u_1 = \frac{1}{2}\left(\nabla - \frac{n_1^2}{\nabla}\right).$$

Aus dieser Gleichung und der vorhin hergeleiteten erhält man durch Addition $\frac{m-n}{2}.\mathrm{cn}\,u_1 + \nabla_1 = \nabla$ und also rückwärts:

$$\frac{m-n}{2}.\mathrm{cn}\,u_1 = \nabla - \nabla_1.$$

Wir wenden noch die folgende Bezeichnung an:

$$\delta_1 = \frac{m-n}{2}.\operatorname{sn} u_1, \qquad \delta_2 = \frac{m_1-n_1}{2}.\operatorname{sn} u_2,$$

$$\delta_3 = \frac{m_2-n_2}{2}.\operatorname{sn} u_3, \qquad \delta_4 = \frac{m_3-n_3}{2}.\operatorname{sn} u_4,$$

u. s. w.

und entwickeln, ehe wir weiter gehen, die Formeln, welche zu einer scharfen Berechnung der Gröfsen δ_1, δ_2, δ_3, δ_4, etc. dienen. Es ist zunächst $\delta_1 = \frac{1-k'}{2}.\operatorname{sn} u_1$ und $\operatorname{sn} u_1 = \frac{(1+k').\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} = \frac{(1+k')\sin\varphi\cos\varphi}{\nabla}$, wenn $\operatorname{am} u = \Phi$, also $\nabla = \sqrt{(1-k^2\sin^2\Phi)}$ gesetzt wird; daher ist

$$2. \qquad \delta_1 = \frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{2\nabla}.$$

Die folgenden Coëfficienten δ_2, δ_3, δ_4, δ_5 etc. können bequemer berechnet werden.

Es ist $\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{m_1-n_1}{m-n}.\frac{\operatorname{sn} u_2}{\operatorname{sn} u_1}$; da aber $\operatorname{sn} u_2 = \frac{(1+k_1')}{\operatorname{dn} u_1}\operatorname{sn} u_1 \operatorname{cn} u_1 = \frac{m_1+n_1}{\nabla_1}\operatorname{sn} u_1 \operatorname{cn} u_1$ ist, so ist

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{m_1^2-n_1^2}{m-n}.\frac{\operatorname{cn} u_1}{\nabla_1};$$

da aber $\operatorname{cn} u_1 = \frac{2(\nabla-\nabla_1)}{m-n}$ ist, so entsteht

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{2(m_1^2-n_1^2)}{(m-n)^2}.\frac{\nabla-\nabla_1}{\nabla_1}.$$

Dieser Ausdruck gestattet noch eine Reduction.

Aus den Gleichungen $m_1 = \frac{m+n}{2}$ und $n_1 = \sqrt{(mn)}$ folgt auf der Stelle $m_1^2 - n_1^2 = \frac{(m-n)^2}{4}$, und es ist also

$$3. \quad \begin{cases} \delta_2 = \frac{\nabla-\nabla_1}{2\nabla_1}.\delta_1 = \frac{(\nabla-\nabla_1).k^2\sin\varphi\cos\varphi}{2\nabla.2\nabla_1}; \text{ eben so ist} \\ \delta_3 = \frac{\nabla_1-\nabla_2}{2\nabla_2}.\delta_2 = \frac{(\nabla-\nabla_1)(\nabla_1-\nabla_2).k^2\sin\varphi\cos\varphi}{2\nabla.2\nabla_1.2\nabla_2}, \\ \delta_4 = \frac{\nabla_2-\nabla_3}{2\nabla_3}.\delta_3 = \frac{(\nabla-\nabla_1)(\nabla_1-\nabla_2)(\nabla_2-\nabla_3).k^2\sin\varphi\cos\varphi}{2\nabla.2\nabla_1.2\nabla_2.2\nabla_3}, \\ \delta_5 = \frac{\nabla_3-\nabla_4}{2\nabla_4}.\delta_4 = \frac{(\nabla-\nabla_1)(\nabla_1-\nabla_2)(\nabla_2-\nabla_3)(\nabla_3-\nabla_4).k^2\sin\varphi\cos\varphi}{2\nabla.2\nabla_1.2\nabla_2.2\nabla_3.2\nabla_4} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die Gröfsen δ_2, δ_3, δ_4, δ_5 etc. werden nicht alle positiv sein, wenn auch δ_1 positiv ist, weil auch die Differenzen $\nabla-\nabla_1$, $\nabla_1-\nabla_2$, $\nabla_2-\nabla_3$,

$\nabla_3 - \nabla_4$ etc. nicht immer positiv sein werden. Uebrigens nähern sich die Gröfsen ∇, ∇_1, ∇_2, ∇_3, ∇_4 etc. sehr rasch dem Verhältnisse der Gleichheit, und es wird $\nabla_r = \eta$, wenn $m_r = n_r = \eta$ wird. Eine Folge hiervon ist aber, dafs die Gröfsen δ_2, δ_3, δ_4, δ_5 etc. eine überaus rasch convergirende Reihe bilden; in den meisten Fällen ist schon δ_4 hinlänglich genau $= 0$.

Nach diesen Vorbereitungen ist es nun leicht, ηu in einer rasch convergirenden Reihe darzustellen. Es ist $\operatorname{am} u = \frac{1}{2}\operatorname{am} u_1 + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sin}(k_1 \operatorname{sn} u_1)$, da aber $k_1 = \frac{1-k'}{1+k'} = \frac{m-n}{2m_1}$ ist, so haben wir

$$\operatorname{am} u = \tfrac{1}{2}\operatorname{am} u_1 + \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_1}{m_1}\right);\ \text{eben so ist:}$$

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{am} u_1 = \tfrac{1}{4}\operatorname{am} u_2 + \tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_2}{m_2}\right),$$

$$\tfrac{1}{4}\operatorname{am} u_2 = \tfrac{1}{8}\operatorname{am} u_3 + \tfrac{1}{8}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_3}{m_3}\right)$$

u. s. w.

Durch die Addition dieser Gleichungen erhält man

$$\operatorname{am} u = \frac{1}{2^r}\operatorname{am} u_r + \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_1}{m_1}\right) + \tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_2}{m_2}\right) + \tfrac{1}{8}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_3}{m_3}\right) + \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{1}{2^r}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_r}{m_r}\right).$$

Vergröfsert man aber r hinlänglich, so nähert sich $\frac{1}{2_r}\operatorname{am} u_r$ der Grenze ηu, und es ist also

4. $$\eta u = \varphi - \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_1}{m_1}\right) - \tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_2}{m_2}\right) - \tfrac{1}{8}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_3}{m_3}\right) - \tfrac{1}{16}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_4}{m_4}\right)$$
$$- \tfrac{1}{32}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_5}{m_5}\right) - \text{ etc.}$$

Da $\operatorname{arc\,sin}(k_1 \operatorname{sn} u_1) = \pm \operatorname{arc\,cos}(\operatorname{dn} u_1) = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k_1 \operatorname{sn} u_1}{\operatorname{dn} u_1}\right) = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_1}{m_1 . \operatorname{dn} u_1}\right)$ $= \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_1}{\nabla_1}\right)$ ist, so kann die vorige Reihe auch also dargestellt werden:

5. $$\eta u = \varphi - \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_1}{\nabla_1}\right) - \tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_2}{\nabla_2}\right) - \tfrac{1}{8}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_3}{\nabla_3}\right)$$
$$- \tfrac{1}{16}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_4}{\nabla_4}\right) - \tfrac{1}{32}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_5}{\nabla_5}\right) - \text{ etc.}$$

Die einzelnen Glieder, welche in diesen Reihen auf φ folgen, haben ungeachtet der Vorzeichen $(-)$ vor ihnen nicht jedesmal eine Verminderung zur Folge, da unter den Gröfsen δ_1, δ_2, δ_3, δ_4, δ_5 etc. einige auch negativ sein werden.

Den so eben entwickelten Formeln gemäfs müssen, um ηu zu berechnen, aufser den Modular-Zahlen des §. 55. und den Gröfsen ∇, ∇_1, ∇_2, ∇_3, ∇_4 etc., auch noch die Gröfsen δ_1, δ_2, δ_3, δ_4, δ_5 etc. berechnet werden; die Berechnung der zuletzt genannten Gröfsen kann man umgehen, wenn man, da $\arcsin(k_1 \operatorname{sn} u_1) = \pm \arccos(\operatorname{dn} u_1) = \pm \arccos\left(\frac{\nabla_1}{m_1}\right)$, die Formel also schreibt:

$$6. \quad \eta u = \varphi + \tfrac{1}{2}\alpha_1 . \arccos\left(\frac{\nabla_1}{m_1}\right) + \tfrac{1}{4}\alpha_2 . \arccos\left(\frac{\nabla_2}{m_2}\right) + \tfrac{1}{8}\alpha_3 . \arccos\left(\frac{\nabla_3}{m_3}\right) + \text{ etc.},$$

und unter jedem von den Zeichen α_1, α_2, α_3, α_4 etc. versteht entweder $+1$ oder -1. Vergleicht man diese Reihe mit den vorigen, so sieht man, dafs die unbekannten Vorzeichen sich lediglich nach den Zählern der Ausdrücke δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 etc. richten. Ist, wie wir hier annehmen, $\operatorname{am} u$ oder $\varphi < \frac{\pi}{2}$, so ist

$$\alpha_1 = -1.$$

Ferner haben die übrigen Gröfsen α_2, α_3, α_3, α_4 etc., deren jede $= \pm 1$ ist, dieselben Vorzeichen:

α_2 mit $-(\nabla - \nabla_1)$,
α_3 mit $-(\nabla - \nabla_1)(\nabla_1 - \nabla_2)$,
α_4 mit $-(\nabla - \nabla_1)(\nabla_1 - \nabla_2)(\nabla_2 - \nabla_3)$,
α_5 mit $-(\nabla - \nabla_1)(\nabla_1 - \nabla_2)(\nabla_2 - \nabla_3)(\nabla_3 - \nabla_4)$
u. s. w.

Hiernach lassen sich die Vorzeichen α_2, α_3, α_4, α_4 etc., auch ohne die angegebenen Producte wirklich zu berechnen, schon aus der bloßen Ansicht der Gröfsen ∇, ∇_1, ∇_2, ∇_3, ∇_4 etc. bestimmen, wenn man nur darauf achtet, ob diese Gröfsen, statt abzunehmen, zunehmen. Jedesmal findet ein Zeichenwechsel Statt, wenn eine folgende von diesen Gröfsen gröfser ist, als die ihr zunächst vorhergehende, und durch diese einfache Bemerkung sind alle Vorzeichen in der Reihe (6.) völlig bestimmt.

Da die in der Reihe (6.) vorkommenden Arcus im Fortgange sehr rasch immer kleiner und kleiner werden, und also mittelst der Cosinus nicht scharf zu bestimmen sind, so wird man die Reihe (6.) endlich also darstellen:

$$7.\quad \eta u = \Phi + \alpha_1 \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{m_1-\nabla_1}{m_1+\nabla_1}}\right) + \frac{\alpha_2}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{m_2-\nabla_2}{m_2+\nabla_2}}\right) + \frac{\alpha_3}{4}\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{m_3-\nabla_3}{m_3+\nabla_3}}\right) + \frac{\alpha_4}{8}\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{m_4-\nabla_4}{m_4+\nabla_4}}\right) + \frac{\alpha_5}{16}\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{m_5-\nabla_5}{m_5+\nabla_5}}\right) + \text{etc.}$$

Zusatz. Setzt man ui für u, $u_1 i$ für u_1, $u_2 i$ für u_2, u. s. w., so bleiben die Gröfsen ∇, ∇_1, ∇_2 etc. reell, nur ändern sie ihre Bedeutungen. Setzt man $\operatorname{am}' u = \psi$, so verwandelt sich $\nabla = \sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 u)}$ in $\nabla = \sqrt{(1+k^2 \operatorname{tn}'^2 u)}$ oder $\nabla = \sqrt{(1+k^2 \operatorname{tang}^2 \psi)}$.

Die Formeln (1.), welche zur Berechnung von ∇_1, ∇_2, ∇_3, ∇_4 etc. dienen, bleiben ungeändert, wie auch die Modular-Zahlen des §. 55. Die Gröfse $\delta_1 = \frac{k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{2\nabla}$ verwandelt sich nun in $i\delta_1 = \frac{i k^2 \operatorname{tn}' u}{2\nabla \operatorname{cn}' u}$; setzt man aufserdem noch $i\delta_2$ für δ_2, $i\delta_3$ für δ_3, $i\delta_4$ für δ_4 etc., so hat man

$$8.\quad \begin{cases} \delta_1 = \dfrac{k^2 \operatorname{tang}\psi}{2\nabla \cos\psi}, \\ \delta_2 = \dfrac{\nabla-\nabla_1}{2\nabla_1}\cdot\delta_1 = \dfrac{(\nabla-\nabla_1)}{2\nabla\cdot 2\nabla_1}\cdot\dfrac{k^2\operatorname{tang}\psi}{\cos\psi}, \\ \delta_3 = \dfrac{\nabla_1-\nabla_2}{2\nabla_2}\cdot\delta_2 = \dfrac{(\nabla-\nabla_1)(\nabla_1-\nabla_2)}{2\nabla\cdot 2\nabla_1\cdot 2\nabla_2}\cdot\dfrac{k^2\operatorname{tang}\psi}{\cos\psi}, \\ \delta_4 = \dfrac{\nabla_2-\nabla_3}{2\nabla_3}\cdot\delta_3 = \dfrac{(\nabla-\nabla_1)(\nabla_1-\nabla_2)(\nabla_2-\nabla_3)}{2\nabla\cdot 2\nabla_1\cdot 2\nabla_2\cdot 2\nabla_3}\cdot\dfrac{k^2\operatorname{tang}\psi}{\cos\psi}, \\ \delta_5 = \dfrac{\nabla_3-\nabla_4}{2\nabla_4}\cdot\delta_4 = \dfrac{(\nabla-\nabla_1)(\nabla_1-\nabla_2)(\nabla_2-\nabla_3)(\nabla_3-\nabla_4)}{2\nabla\cdot 2\nabla_1\cdot 2\nabla_2\cdot 2\nabla_3\cdot 2\nabla_4}\cdot\dfrac{k^2\operatorname{tang}\psi}{\cos\psi} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Da nun aufserdem $\operatorname{am} ui = i\operatorname{Am} u = i\mathfrak{L}\operatorname{am}' u = i\mathfrak{L}\psi$ ist, so haben wir also zur Berechnung von u aus $\operatorname{am}' u = \psi$ die Reihen:

$$9.\quad \eta u = \mathfrak{L}\psi - \tfrac{1}{2}\operatorname{Arc\,Sin}\left(\frac{\delta_1}{m_1}\right) - \tfrac{1}{4}\operatorname{Arc\,Sin}\left(\frac{\delta_2}{m_2}\right) - \tfrac{1}{8}\operatorname{Arc\,Sin}\left(\frac{\delta_3}{m_3}\right) - \tfrac{1}{16}\operatorname{Arc\,Sin}\left(\frac{\delta_4}{m_4}\right) - \tfrac{1}{32}\operatorname{Arc\,Sin}\left(\frac{\delta_5}{m_5}\right) - \text{etc.},$$

$$10.\quad \eta u = \mathfrak{L}\psi - \tfrac{1}{2}\operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta_1}{\nabla_1}\right) - \tfrac{1}{4}\operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta_2}{\nabla_2}\right) - \tfrac{1}{8}\operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta_3}{\nabla_3}\right) - \tfrac{1}{16}\operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta_4}{\nabla_4}\right) - \tfrac{1}{32}\operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta_5}{\nabla_5}\right) - \text{etc.}$$

Anmerkung 1. Es ist ein bemerkenswerther Umstand, dafs sowohl die unendlichen Producte im §. 58. als auch die so eben gefunde-

nen Reihen einen im Ganzen gleichen Grad der Convergenz haben, welcher nicht von der Gröfse der Amplituden φ und ψ, sondern lediglich von der Gröfse des Moduls k oder k' abhängt. Ist der Modul der gegebenen Amplitude $< \sin\frac{\pi}{4}$, so wird man sie $= \varphi = \operatorname{am} u$ setzen, und also die Formeln (2.), (3.), (4.) des §. 58. oder die Formeln (4.), (5.), (7.) des §. 59. anwenden; ist aber der Modul der gegebenen Amplitude $> \sin\frac{\pi}{4}$, so wird man sie $= \psi = \operatorname{am}' u$ setzen, und dann überhaupt die Formeln (5.), (6.), (7.) des §. 58. oder die Formeln (9.) und (10.) des §. 59. anwenden, wenn in beiden Fällen die Rechnung so kurz, als möglich, sein soll. Wir werden, wie hier, so in der Zukunft immer uns den Modul k als $< \sin\frac{\pi}{4}$, und den Modul k' als $> \sin\frac{\pi}{4}$ vorstellen, wenn das Gegentheil nicht ausdrücklich erwähnt wird.

Anmerkung 2. Wenn man in der viel gebrauchten Modular-Gleichung $\lambda = \frac{1-k'}{1+k'}$ statt des Moduls k setzt $\frac{1}{k}$, so erhält man $\lambda = \frac{k-ik'}{k+ik'}$, wie im §. 49., und es kann dieser Ausdruck auch also dargestellt werden: $\lambda = \left(\frac{\sqrt{(1+k)}-i\sqrt{(1-k)}}{\sqrt{(1+k)}+i\sqrt{(1-k)}}\right)^2$. Wenn man gleichzeitig ku für u setzt, so verwandeln sich die Formeln des §. 51., §. 52., §. 53. in die des §. 48. und §. 49.

Fünfter Abschnitt.

§. 60.

Von der Integration der Modular-Functionen.

Differenziirt man den Ausdruck $t = \frac{1}{k}\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}(k\operatorname{sn} a \operatorname{sn} u)$, indem man u als veränderlich betrachtet, so erhält man $\partial t = \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \,.\, \partial u}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}$. Dieser Ausdruck kann auch also dargestellt werden: $\frac{\operatorname{sn}(a+u)+\operatorname{sn}(a-u)}{2}.\partial u$ und es ist also

$$1.\quad \int_0 \frac{\operatorname{sn}(a+u)+\operatorname{sn}(a-u)}{2}.\partial u = \frac{1}{k}\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}(k\operatorname{sn} a \operatorname{sn} u).$$

Setzt man in dieser Formel $a + iK'$ für a, so verwandelt sie sich zunächst in

$$\int_0 \frac{\frac{\partial u}{k\,\mathrm{sn}(a+u)} + \frac{\partial u}{k\,\mathrm{sn}(a-u)}}{2} = \frac{1}{k}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{sn}\,a}\right),$$

und es ist also

$$2.\quad \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\mathrm{sn}(a+u)} + \frac{\partial u}{\mathrm{sn}(a-u)}\right) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{sn}\,a}\right).$$

Setzt man in der Formel (1.) zuerst $K-a$ für a, so verwandelt sie sich in:

$$\int_0 \frac{\mathrm{snc}(a-u)+\mathrm{snc}(a+u)}{2}\,\partial u = \frac{1}{k}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\,(k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{sn}\,u);$$

setzt man in dieser Formel nun $k'a$ für a und $k'u$ für u, ferner $\frac{ik}{k'}$ statt des Moduls k, so erhält man auf der Stelle:

$$3.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{\mathrm{cn}(a-u)+\mathrm{cn}(a+u)}{2}.\partial u = \frac{1}{k}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cnc}\,u\right), & \text{oder} \\ \int_0 \frac{\mathrm{cn}(a-u)+\mathrm{cn}(a+u)}{2}.\partial u = \frac{1}{k}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right). \end{cases}$$

Vertauscht man in dieser Formel den Modul k mit k', indem man ai für a und ui für u setzt, so verwandelt sie sich in:

$$4.\quad \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\mathrm{cn}(a-u)} + \frac{\partial u}{\mathrm{cn}(a+u)}\right) = \frac{1}{k'}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k'\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,u}\right)$$
$$= \frac{1}{k'}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cn}\,a}\right).$$

Setzt man in der Formel (3.) ka für a, ku für u und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k, so verwandelt sie sich in:

$$5.\quad \int_0 \frac{\mathrm{dn}(a-u)+\mathrm{dn}(a+u)}{2}.\partial u = \mathrm{arc\,tang}\,(\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,u),$$

was mit den Formeln (13.) und (14.) im §. 12. übereinstimmt. Setzt man in dieser Formel $K-a$ für a, so verwandelt sie sich in:

$$6.\quad \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\mathrm{dn}(a+u)} + \frac{\partial u}{\mathrm{dn}(a-u)}\right) = \frac{1}{k'}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k'\,\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,a}\right).$$

Vertauscht man in der Formel (1.) die beiden conjugirten Modul, und setzt man ai für a, wie auch ui für u, so erhält man:

$$7.\quad \int_0 \frac{\mathrm{tn}(a+u)+\mathrm{tn}(a-u)}{2}\,\partial u = \frac{1}{k'}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\,(k'\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{tn}\,u),$$

und eben so erhält man aus der Formel (2.)

$$8.\quad \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\mathrm{tn}(a+u)} + \frac{\partial u}{\mathrm{tn}(a-u)}\right) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{tn}\,a}\right).$$

§. 61.

Der Formel $\partial \operatorname{am}(a \pm u) = \pm \operatorname{dn}(a \pm u)\partial u$ gemäfs ist rückwärts

$$\int_0 \operatorname{dn}(a+u).\partial u = \operatorname{am}(a+u) + \text{const.} \quad \text{und}$$

$$\int_0 -\operatorname{dn}(a-u).\partial u = \operatorname{am}(a-u) + \text{const.}$$

In beiden Fällen findet man die Constante $= -\operatorname{am} a$, und es ist also

$$1. \begin{cases} \int_0 \operatorname{dn}(a+u).\partial u = \operatorname{am}(a+u) - \operatorname{am} a = \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn}(a+u)) - \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn} a), \\ \int_0 -\operatorname{dn}(a-u).\partial u = \operatorname{am}(a-u) - \operatorname{am} a = \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn}(a-u)) - \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn} a). \end{cases}$$

Aus diesen beiden Formeln erhält man durch Addition:

$$\int_0 \frac{\operatorname{dn}(a+u) - \operatorname{dn}(a-u)}{2} \partial u = \frac{\operatorname{am}(a+u) + \operatorname{am}(a-u)}{2} - \operatorname{am} a.$$

und diese Formel verwandelt sich nach §. 12. in:

$$2. \int_0 \frac{\operatorname{dn}(a+u) - \operatorname{dn}(a-u)}{2} \partial u = \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn} a \operatorname{dn} u) - \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn} a),$$

oder auch in:

$$\int_0 \frac{\operatorname{dn}(a-u) - \operatorname{dn}(a+u)}{2} \partial u = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tn} a\,(1 - \operatorname{dn} u)}{1 + \operatorname{tn}^2 a \operatorname{dn} u}\right).$$

Setzt man in den Formeln (1.) $K - a$ für a, so erhält man:

$$\int_0 \frac{\partial u}{\operatorname{dn}(a-u)} = \frac{1}{k'}\left[\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{k' \operatorname{tn}(a-u)}\right) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{k' \operatorname{tn} a}\right)\right],$$

oder auch

$$3. \begin{cases} \int_0 \frac{\partial u}{\operatorname{dn}(a-u)} = \frac{1}{k'}\left[\operatorname{arc\,tang}(k' \operatorname{tn} a) - \operatorname{arc\,tang}(k' \operatorname{tn}(a-u))\right], \\ \int_0 \frac{-\partial u}{\operatorname{dn}(a+u)} = \frac{1}{k'}\left[\operatorname{arc\,tang}(k' \operatorname{tn} a) - \operatorname{arc\,tang}(k' \operatorname{tn}(a+u))\right]. \end{cases}$$

Die Formel (2.) aber verwandelt sich in

$$4. \int_0 \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\operatorname{dn}(a-u)} - \frac{\partial u}{\operatorname{dn}(a+u)}\right) = \frac{1}{k'}\left[\operatorname{arc\,tang}(k' \operatorname{tn} a) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k' \operatorname{tn} a}{\operatorname{dn} u}\right)\right].$$

Setzt man in den Gleichungen (1.) ka für a, ku für u, und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k, so erhält man:

$$5. \begin{cases} \int_0 \operatorname{cn}(a+u).\partial u = \frac{1}{k}\left[\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k \operatorname{sn}(a+u)}{\operatorname{dn}(a+u)}\right) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k \operatorname{sn} a}{\operatorname{dn} a}\right)\right], \\ \int_0 -\operatorname{cn}(a-u).\partial u = \frac{1}{k}\left[\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k \operatorname{sn}(a-u)}{\operatorname{dn}(a-u)}\right) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k \operatorname{sn} a}{\operatorname{dn} a}\right)\right], \end{cases}$$

und die Formel (2.) giebt eben so:

$$6. \int_0 \frac{-\operatorname{cn}(a-u) + \operatorname{cn}(a+u)}{2}.\partial u = \frac{1}{k}\left[\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k \operatorname{sn} a \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} a}\right) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k \operatorname{sn} a}{\operatorname{dn} a}\right)\right].$$

Setzt man in den Gleichungen (5.) ai für a, ui für u, nachdem man die beiden conjugirten Modul mit einander vertauscht hat, so erhält man:

$$7.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{\partial u}{\mathrm{cn}(a+u)} = \frac{1}{k'}\left[\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k'\,\mathrm{sn}(a+u)}{\mathrm{dn}(a+u)}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k'\,\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}\right)\right], \\ \int_0 \frac{\partial u}{\mathrm{cn}(a-u)} = \frac{1}{k'}\left[\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k'\,\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k'\,\mathrm{sn}(a-u)}{\mathrm{dn}(a-u)}\right)\right], \end{cases}$$

und die Formel (6.) verwandelt sich in

$$8.\quad \int_0 \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\mathrm{cn}(a-u)} - \frac{\partial u}{\mathrm{cn}(a+u)}\right] = \frac{1}{k'}\left[\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k'\,\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k'\,\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,u}\right)\right].$$

Setzt man in der Formel (5.) $K-a$ für a, so hat man zunächst

$$\int_0 \mathrm{cnc}(a-u).\partial u = \frac{1}{k}\left[\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}(a-u)\right) - \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}\,a\right)\right].$$

Hieraus erhält man nach §. 31. sofort

$$9.\quad \begin{cases} \int_0 \mathrm{sn}(a-u).\partial u = \frac{1}{k}\left[\mathfrak{Arc\,Tang}\,(k\,\mathrm{snc}(a-u)) - \mathfrak{Arc\,Tang}\,(k\,\mathrm{snc}\,a)\right], \\ \int_0 \mathrm{sn}(a+u).\partial u = \frac{1}{k}\left[\mathfrak{Arc\,Tang}\,(k\,\mathrm{snc}\,a) - \mathfrak{Arc\,Tang}\,(k\,\mathrm{snc}(a+u))\right]. \end{cases}$$

Wird auch in der Formel (6.) gesetzt $K-a$ für a, so wird sie

$$\int_0 \frac{\mathrm{cnc}(a+u) - \mathrm{cnc}(a-u)}{2}.\partial u = \frac{1}{k}\left[\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}\,a\right) - \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,u\right)\right],$$

und dem §. 31. gemäfs verwandelt sie sich in

$$10.\quad \int_0 \frac{\mathrm{sn}(a+u) - \mathrm{sn}(a-u)}{2}.\partial u$$
$$= \frac{1}{k}\left[\mathfrak{Arc\,Tang}\,(k\,\mathrm{snc}\,a) - \mathfrak{Arc\,Tang}\,(k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u)\right].$$

Aus den Formeln (7.) erhält man in gleicher Weise:

$$11.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{\partial u}{\mathrm{sn}(a+u)} = \mathfrak{Arc\,Tang}\,(\mathrm{snc}\,a) - \mathfrak{Arc\,Tang}\,(\mathrm{snc}(a+u)) \text{ und} \\ \int_0 \frac{\partial u}{\mathrm{sn}(a-u)} = \mathfrak{Arc\,Tang}\,(\mathrm{snc}(a-u)) - \mathfrak{Arc\,Tang}\,(\mathrm{snc}\,a), \end{cases}$$

und aus (8.) erhält man:

$$12.\quad \int_0 \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\mathrm{sn}(a-u)} - \frac{\partial u}{\mathrm{sn}(a+u)}\right] = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{snc}\,a}{\mathrm{snc}\,u}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}\,(\mathrm{snc}\,a).$$

Vertauscht man die beiden conjugirten Modul, und setzt man ai für a, wie auch ui für u, so erhält man noch:

$$13.\quad \begin{cases} \int_0 \mathrm{tn}(a-u).\partial u = \frac{1}{k'}\left[\mathfrak{Arc\,Tang}\,(\mathrm{dnc}\,a) - \mathfrak{Arc\,Tang}\,(\mathrm{dnc}(a-u))\right], \\ \int_0 \mathrm{tn}(a+u).\partial u = \frac{1}{k'}\left[\mathfrak{Arc\,Tang}\,(\mathrm{dnc}(a+u)) - \mathfrak{Arc\,Tang}\,(\mathrm{dnc}\,a)\right], \end{cases}$$

$$14.\quad \int_0 \frac{\mathrm{tn}(a+u) - \mathrm{tn}(a-u)}{2}.\partial u = \frac{1}{k'}\left[\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{dn}\,u}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}\,(\mathrm{dnc}\,a)\right],$$

15. $$\begin{cases} \int_0 \frac{\partial u}{\mathrm{tn}(a+u)} = \mathfrak{Arc\,Tang}(\mathrm{dn}\,a) - \mathfrak{Arc\,Tang}(\mathrm{dn}(a+u)), \\ \int_0 \frac{\partial u}{\mathrm{tn}(a-u)} = \mathfrak{Arc\,Tang}(\mathrm{dn}(a-u)) - \mathfrak{Arc\,Tang}(\mathrm{dn}\,a), \end{cases}$$

16. $$\int_0 \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\mathrm{tn}(a-u)} - \frac{\partial u}{\mathrm{tn}(a+u)}\right] = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{du}\,u}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}(\mathrm{dn}\,a).$$

Zusatz. Aus den entwickelten Formeln machen wir nun noch folgende Zusammenstellung:

1. $$\int \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\partial u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u} = \frac{1}{k}\,\mathfrak{Arc\,Tang}(k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u) + C,$$

2. $$\int \frac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\partial u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u} = -\frac{1}{k}\,\mathfrak{Arc\,Tang}(k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u) + C,$$

3. $$\int \frac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,u\,\partial u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u} = \frac{1}{k}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cnc}\,u\right) + C,$$

4. $$\int \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\partial u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u} = \frac{1}{k}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k}{k'}\,\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{cn}\,u\right) + C,$$

5. $$\int \frac{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,u\,.\,\partial u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u} = \mathrm{arc\,tang}(\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,u) + C,$$

6. $$\int \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\partial u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u} = \mathrm{arc\,tang}(\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,u) + C,$$

7. $$\int \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,u\,.\,\partial u}{\mathrm{cn}^2\,a\,\mathrm{cn}^2\,u - k'^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u} = \frac{1}{k'}\,\mathfrak{Arc\,Tang}(k'\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{tn}\,u) + C,$$

8. $$\int \frac{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,.\,\partial u}{\mathrm{cn}^2\,a\,\mathrm{cn}^2\,u - k'^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u} = \frac{1}{k'}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{du}\,u}\right) + C,$$

9. $$\int \frac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\partial u}{\mathrm{cn}^2\,a\,\mathrm{cn}^2\,u - k'^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{snc}\,a}\right) + C,$$

10. $$\int \frac{k'^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,.\,\partial u}{\mathrm{cn}^2\,a\,\mathrm{cn}^2\,u - k'^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{snc}\,u}\right) + C,$$

11. $$\int \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\partial u}{\mathrm{sn}^2\,a - \mathrm{sn}^2\,u} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{sn}\,a}\right) + C,$$

12. $$\int \frac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\partial u}{\mathrm{sn}^2\,a - \mathrm{sn}^2\,u} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{snc}\,a}{\mathrm{snc}\,u}\right) + C,$$

13. $$\int \frac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,u\,\partial u}{\mathrm{cn}^2\,a\,\mathrm{cn}^2\,u - k'^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u} = \frac{1}{k'}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cn}\,a}\right) + C,$$

14. $$\int \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\partial u}{\mathrm{cn}^2\,a\,\mathrm{cn}^2\,u - k'^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u} = \frac{1}{k'}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{cnc}\,a}{\mathrm{cn}\,u}\right) + C,$$

15. $$\int \frac{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,u\,\partial u}{\mathrm{dn}^2 a\,\mathrm{dn}^2 u + k^2 k'^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = \frac{1}{k'}\,\mathrm{arc\,tang}\,(\mathrm{dnc}\,a\,\mathrm{tn}\,u) + C,$$

16. $$\int \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\partial u}{\mathrm{dn}^2 a\,\mathrm{dn}^2 u + k^2 k'^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = \frac{1}{k'}\,\mathrm{arc\,tang}\,(\mathrm{dnc}\,u\,\mathrm{tn}\,a) + C,$$

17. $$\int \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,u\,\partial u}{\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2 u} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{tn}\,a}\right) + C,$$

18. $$\int \frac{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\partial u}{\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2 u} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{dn}\,u}\right) + C.$$

Alle vorhin betrachtete Integrale lassen sich also als Amplituden, oder auch entweder als cyklische oder als hyperbolische Arcus darstellen.

§. 62.

Zweite Differenziale der cyklischen Modular-Functionen und ihrer natürlichen Logarithmen.

Differenziirt man die Gleichung $\partial\,\mathrm{sn}\,u = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\partial u$ noch einmal, so erhält man $\partial^2\,\mathrm{sn}\,u = (-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}^2 u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}^2 u)\,\partial u^2$, und es ist also

1. $$\frac{\partial^2\,\mathrm{sn}\,u}{\partial u^2} = -(1+k^2)\,\mathrm{sn}\,u + 2k^2\,\mathrm{sn}^3 u.$$

Eben so findet man noch die Formeln:

2. $$\frac{\partial^2\,\mathrm{cn}\,u}{\partial u^2} = (-1+2k^2)\,\mathrm{cn}\,u - 2k^2\,\mathrm{cn}^3 u,$$

3. $$\frac{\partial^2\,\mathrm{tn}\,u}{\partial u^2} = (1+k'^2)\,\mathrm{tn}\,u + 2k'^2\,\mathrm{tn}^3 u,$$

4. $$\frac{\partial^2\,\mathrm{dn}\,u}{\partial u^2} = (1+k'^2)\,\mathrm{dn}\,u - 2\,\mathrm{dn}^3 u.$$

Ist also z irgend eine Modular-Function des Argumentes u, so hat ihr zweites Differenzial-Verhältnifs jeden Falles die Form

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \alpha.z + \beta z^3.$$

Da überhaupt $\partial \log P = \frac{\partial P}{P}$ ist, so erhält man

$$\frac{\partial \log \mathrm{sn}\,u}{\partial u} = \frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u} = \frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{tn}\,u} = \frac{k'\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{cnc}\,u},$$

$$\frac{\partial \log \mathrm{cn}\,u}{\partial u} = \frac{-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u} = \frac{-\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{snc}\,u} = -\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{am}\,2u = -\,\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u,$$

$$\frac{\partial \log \operatorname{dn} u}{\partial u} = -\frac{k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u,$$

$$\frac{\partial \log \operatorname{tn} u}{\partial u} = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u \operatorname{tn} u} = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u} = \frac{1}{\operatorname{sn} u \operatorname{snc} u}.$$

Differenziirt man diese Formeln noch einmal, so erhält man nach einer leichten Reduction:

$$5. \quad \frac{\partial^2 \log \operatorname{sn} u}{\partial u^2} = k^2 \operatorname{sn}^2 u - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u},$$

$$6. \quad \frac{\partial^2 \log \operatorname{cn} u}{\partial u^2} = -k^2 \operatorname{cn}^2 u - \frac{k'^2}{\operatorname{cn}^2 u},$$

$$7. \quad \frac{\partial^2 \log \operatorname{dn} u}{\partial u^2} = -\operatorname{dn}^2 u + \frac{k'^2}{\operatorname{dn}^2 u},$$

$$8. \quad \frac{\partial^2 \log \operatorname{tn} u}{\partial u^2} = k'^2 \operatorname{tn}^2 u - \frac{1}{\operatorname{tn}^2 u}.$$

Da $1 - k'^2 - k^2 = 0$ ist, so kann die Formel (6.) auch also geschrieben werden:

$$9. \quad \frac{\partial^2 \log \operatorname{cn} u}{\partial u^2} = 1 - \operatorname{dn}^2 u - \frac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 u}.$$

Zum Beschlusse entwickeln wir noch das zweite Differenzial-Verhältnifs von $\operatorname{dn}^2 u$. Es ist

$$\frac{\partial \operatorname{dn}^2 u}{\partial u} = -2k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

also

$$\frac{\partial^2 \operatorname{dn}^2 u}{\partial u^2} = 2k^2 \operatorname{dn}^2 u \operatorname{sn}^2 u + 2k^4 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u - 2k^2 \operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u.$$

Setzen wir der Kürze wegen $\operatorname{dn}^2 u = t$, also $k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1 - t$ und $k^2 \operatorname{cn}^2 u = t - k'^2$, so ist

$$\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} = 2t(1-t) + 2(1-t)(t-k'^2) - 2t(t-k'^2),$$

oder, wenn man nach Potenzen von t ordnet,

$$\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} = -2k'^2 + 4(1+k'^2)t - 6t^2, \quad \text{für} \quad t = \operatorname{dn}^2 u.$$

(Die Fortsetzung folgt im nächsten Hefte.)

16.
Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres.

(Par Mr. *G. Lejeune Dirichlet*, prof. à l'université de Berlin.)

Que toute progression arithmétique dont le premier terme et la raison sont des entiers sans diviseur commun, renferme une infinité de nombres premiers, c'est une proposition qui se présente, pour ainsi dire, d'elle-même, mais dont la démonstration rigoureuse n'en est pas moins sujette à de grandes difficultés. L'illustre *Legendre* qui l'a employée comme lemme dans différentes recherches et particulièrement pour établir la belle loi de réciprocité qu'il avait découverte entre deux nombres premiers impairs quelconques, s'est aussi attaché à en donner la démonstration qui était en effet à désirer, à cause des nombreuses applications dont la proposition est susceptible. Cette démonstration dont le principe est très ingénieux, ne semble pas complète; en la considérant avec beaucoup d'attention, on reconnaît que l'auteur y fait usage d'un théorème qu'il ne fonde que sur l'induction, et qui n'est peut-être pas moins difficile à prouver que la proposition que l'auteur en déduit. Du moins les tentatives que j'ai faites pour compléter les recherches de *Legendre,* ne m'ont pas réussi et j'ai été obligé de recourir à des moyens tout à fait différents. Je suis parvenu à établir la proposition dont il s'agit, en m'appuyant sur les propriétés d'une classe de séries infinies, qui ont beaucoup d'analogie avec celles qu'*Euler* considère dans le chap. XV. de son Introd. à l'Anal. de l'inf. Depuis que j'ai écrit le mémoire qui contient cette démonstration, et qui paraîtra dans le volume de l'Académie de Berlin, actuellement sous presse, j'ai continué à approfondir les propriétés des séries dont j'y ai fait usage. Ces nouvelles recherches m'ont fait reconnaître que la considération des séries de cette espèce constitue une méthode très féconde d'analyse indéterminée, et qui s'applique à des questions très variées. En attendant que je puisse achever un travail étendu sur cette matière, je vais indiquer rapidement quelques applications nouvelles de ce genre d'analyse. La méthode que j'emploie, me paraît surtout mériter quelque at-

tention par la liaison qu'elle établit entre l'Analyse infinitésimale et l'Arithmétique transcendante, et j'espère que sous ce rapport elle pourra même intéresser les géomètres qui ne s'occupent pas spécialement des questions relatives aux propriétés des nombres.

La lettre q désignant un nombre premier positif $4\nu+3$, les nombres premiers positifs impairs et différents de q seront de deux espèces. Pour ceux de la première espèce que nous désignerons généralement par f, on a suivant la notation et un théorème connus, $\left(\frac{-q}{f}\right)=\left(\frac{f}{q}\right)=1$, tandis que ceux de la seconde espèce, désignés par g, sont tels que $\left(\frac{-q}{g}\right)=\left(\frac{g}{q}\right)=-1$. Soit de plus s une variable continue et positive, assujétie à rester supérieure à l'unité. Cela posé, on a évidemment ces trois équations:

$$1.\quad \begin{cases} \Pi\frac{1}{1-\frac{1}{f^s}}.\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{g^s}} = \Sigma\frac{1}{n^s}, \\ \Pi\frac{1}{1-\frac{1}{f^s}}.\Pi\frac{1}{1+\frac{1}{g^s}} = \Sigma\left(\frac{n}{q}\right)\frac{1}{n^s}, \\ \Pi\frac{1}{1-\frac{1}{f^{2s}}}.\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{g^{2s}}} = \Sigma\frac{1}{n^{2s}}, \end{cases}$$

le signe de multiplication se rapportant à toutes les valeurs de f ou de g, et le signe sommatoire à toutes les valeurs de n positives, impaires et non-divisibles par q. On conclut des équations précédentes:

$$2.\quad \Pi\frac{1+\frac{1}{f^s}}{1-\frac{1}{f^s}} = \frac{\Sigma\frac{1}{n^s}.\Sigma\left(\frac{n}{q}\right)\frac{1}{n^s}}{\Sigma\frac{1}{n^{2s}}}.$$

Comme l'on a

$$\frac{1+\frac{1}{f^s}}{1-\frac{1}{f^s}} = 1+\frac{2}{f^s}+\frac{2}{f^{2s}}+\frac{2}{f^{3s}}+\ldots,$$

on voit facilement que le premier membre de l'équation (2.) peut être développé dans une série de la forme

$$3.\quad \Sigma\frac{2^\mu}{m^s},$$

le signe Σ se rapportant à toutes les valeurs positives et impaires de m qui n'ont que des facteurs premiers de l'espèce f, et μ étant le nombre des diviseurs premiers inégaux de m.

Considérons maintenant les différentes formes quadratiques dont $-q$ est le déterminant. Soient

4. $ax^2+2bxy+cy^2$, $a'x^2+2b'xy+c'y^2$, ...

ces formes, les coëfficients extrêmes étant positifs et jamais pairs à la fois, c'est-à-dire les formes qui constituent ce que Mr. *Gauſs* appelle *genus positivum proprie primitivum.*

Dans cette énumération des formes quadratiques, nous adoptons la classification de Mr. *Gauſs*, c'est-à-dire que nous regardons comme différentes deux formes qui ne présentent que ce que l'illustre auteur des *disquisitiones arithmeticae* appelle l'équivalence impropre. *Lagrange*, qui le premier a fait voir que pour un déterminant donné, il n'y a qu'un nombre fini de formes différentes, considère comme équivalentes deux expressions telles que

$$ax^2+2bxy+cy^2, \quad a'x'^2+2b'x'y'+c'y'^2,$$

lorsqu'on peut passer de l'une à l'autre par une substitution de la forme

$$x=\alpha x'+\beta y', \quad y=\gamma x'+\delta y',$$

les entiers α, β, γ, δ étant tels que $\alpha\delta-\beta\gamma=\pm 1$.

Cette condition est en effet suffisante pour que les deux formes représentent les mêmes nombres. Néanmoins, il y a de l'avantage à ne regarder les deux formes comme complètement équivalentes que dans le cas, où il y a une transformation de l'une dans l'autre pour laquelle on a $\alpha\delta-\beta\gamma=+1$. En adoptant cette notion de l'équivalence propre, on simplifie singulièrement un grand nombre de recherches et l'on conserve la concision dans beaucoup d'énoncés, qui faute d'y avoir égard, se trouveraient surchargés de restrictions. Il y a même des théorèmes qui paraissent isolés et restreints aux déterminants qui remplissent certaines conditions, dans la manière ordinaire de considérer les formes quadratiques, tandis qu'ils ne se présentent que comme des cas particuliers de propriétés générales communes aux formes qui ont un même déterminant quelconque, lorsqu'on envisage les choses sous le même point de vue que Mr. *Gauſs*. On en voit un exemple remarquable, si l'on rapproche le théorème, démontré dans la Théor. des nombr. 4. part. §. VI., de celui qui fait l'objet de l'art. 252. des Disq. arith.

Il est d'ailleurs facile de passer de la classification de *Legendre* à celle de Mr. *Gauſs*. Ce passage consiste simplement à attribuer l'un et l'autre signe aux coëfficients moyens, en exceptant toutefois quelques formes particulières, qui ne se doublent pas et qui sont précisément celles, qui troublent la concision des propositions.

Supposons que dans l'une quelconque des formes (4.), on attribue aux indéterminées x et y, des valeurs positives ou négatives, premières entre elles et telles que la valeur correspondante m du trinome soit impaire et non-divisible par q. Il résulte des théorèmes connus que m n'aura que des diviseurs premiers de l'espèce f. Réciproquement, un nombre quelconque m qui n'a que de pareils diviseurs, peut toujours être exprimé par une ou par plusieurs des formes (4.), x et y recevant des valeurs sans diviseur commun, et pourra l'être autant de fois par la totalité de ces formes qu'il y a d'unités dans la puissance $2^{\mu+1}$, μ désignant, comme plus haut, le nombre des diviseurs simples inégaux de m. Il suffit pour s'en assurer, de rapprocher les art. 180. I., 155., 156. et 105. des Disq. arithm. On conclut de là cette équation

$$2\Sigma\frac{2^{\mu}}{m^{s}} = \Sigma\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s} + \Sigma\frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s} + \ldots,$$

chacune des sommations indiquées dans le second membre s'étendant à tous les systèmes de valeurs positives ou négatives de x et y, premières entre elles et qui rendent le trinome où elles sont substituées, impair et non-divisible par q. En comparant l'équation précédente aux équations (2.) et (3.), on aura

$$5.\quad 2\Sigma\frac{1}{n^s}.\Sigma\left(\frac{n}{q}\right)\frac{1}{n^s} = \Sigma\frac{1}{n^{2s}}.\Sigma\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s} + \ldots.$$

Les termes du second nombre peuvent prendre une forme plus simple. Le premier de ces termes, par exemple, est évidemment équivalent à l'expression

$$\Sigma'\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s},$$

la double sommation indiquée par Σ', se rapportant à tous les systèmes de valeurs positives ou négatives de x et y, qui remplissent la double condition 1°. de n'avoir pas q pour commun diviseur et 2°. de rendre le trinome impair et non-divisible par q.

Cette double sommation ne saurait être effectuée tant que la variable s reste indéterminée, mais le résultat devient extrêmement simple,

lorsque cette variable surpasse infiniment peu l'unité. En posant $s = 1 + \varrho$, ϱ étant positif et infiniment petit, et exprimant la série double par une intégrale définie, on trouve assez facilement, surtout si l'on s'aide de considérations géométriques, que la valeur de la série est

$$\frac{(q-1)}{2q\sqrt{q}} \cdot \frac{\pi}{\varrho},$$

c'est-à-dire que le rapport de la série à l'expression précédente converge vers l'unité, lorsque ϱ converge vers zéro. Ce résultat étant indépendant des coëfficients a, b, c, et ne renfermant que le déterminant commun à toutes les formes (4.), dont nous désignerons le nombre par h, on conclut que le second membre de l'équation (5.) est équivalent à $h\frac{(q-1)}{2q\sqrt{q}} \cdot \frac{\pi}{\varrho}$, ϱ étant toujours considéré comme infiniment petit. D'un autre côté, on s'assure facilement que le facteur $\Sigma \frac{1}{n^s}$ du premier membre a la valeur $\frac{q-1}{2q} \cdot \frac{1}{\varrho}$, tandis que l'autre facteur converge vers la limite finie $\Sigma \left(\frac{n}{q}\right) \frac{1}{n}$. On a donc l'égalité

$$h = \frac{2\sqrt{q}}{\pi} \Sigma \left(\frac{n}{q}\right) \frac{1}{n} = \frac{2\sqrt{q}}{\pi} S.$$

Pour obtenir le nombre h, tout se réduit donc à déterminer S. Pour parvenir à cette détermination, multiplions par $\frac{1}{1-\left(\frac{2}{q}\right)\frac{1}{2}}$. Il viendra ainsi

$$\frac{1}{1-\left(\frac{2}{q}\right)\frac{1}{2}} S = \Sigma \left(\frac{n}{q}\right) \frac{1}{n},$$

le signe se rapportant maintenant à toutes les valeurs entières de n, paires ou impaires, à partir de $n = 1$, à l'exception de celles qui sont divisibles par q. Pour effectuer cette sommation, nous aurons recours aux belles formules de Mr. *Gauſs*. Désignant généralement par a et b, (il est sans doute inutile d'avertir qu'il ne faut pas confondre cette signification des lettres a et b, avec celle que nous leur avions donnée plus haut) les résidus et les non-résidus quadratiques de q, moindres que ce nombre, et par n un entier quelconque non-divisible par q, on a

$$\Sigma \sin \frac{2an\pi}{q} - \Sigma \sin \frac{2bn\pi}{q} = \left(\frac{n}{q}\right)\sqrt{q}\ ^*),$$

*) Ce théorème et les théorèmes analogues que nous emploierons plus bas, ont été énoncés dans les Disq. arithm. art. 356., mais la démonstration complète qui présentait de

les sommations se rapportant à toutes les valeurs de a ou de b. En introduisant cette expression de $\left(\frac{n}{q}\right)$ dans l'équation précédente, il viendra

$$\frac{\sqrt{q}}{1-\left(\frac{2}{q}\right)\frac{1}{2}}S = \Sigma\Sigma\frac{1}{n}\sin\frac{2an\pi}{q} - \Sigma\Sigma\frac{1}{n}\sin\frac{2bn\pi}{q}.$$

Les sommations se rapportent l'une à a ou b, l'autre à n, et il n'est plus nécessaire maintenant d'exclure les valeurs de n divisibles par q, le sinus s'évanouissant pour ces valeurs particulières de n. En commençant par la sommation relative à n, qui peut s'effectuer au moyen de l'équation connue $\frac{\pi-z}{2} = \Sigma\frac{1}{n}\sin nz$, qui a lieu tant que z reste compris entre 0 et 2π, on aura

$$\frac{\sqrt{q}}{1-\left(\frac{2}{q}\right)\frac{1}{2}}S = \Sigma\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a\pi}{q}\right) - \Sigma\left(\frac{\pi}{2}-\frac{b\pi}{q}\right)$$

et par suite, en remarquant qu'il y a autant de valeurs de a que de b,

$$S = \left[1-\left(\frac{2}{q}\right)\frac{1}{2}\right]\frac{\pi}{q\sqrt{q}}(\Sigma b - \Sigma a).$$

L'expression de h deviendra donc

$$h = 2\left[1-\left(\frac{2}{q}\right)\frac{1}{2}\right]\frac{\Sigma b-\Sigma a}{q}.$$

Le nombre premier q peut présenter deux cas. S'il est de la forme $8\nu+3$, on a $\left(\frac{2}{q}\right)=-1$, et s'il est compris dans la forme $8\nu+7$, $\left(\frac{2}{q}\right)=+1$. On a donc pour le nombre h des formes quadratiques différentes dont le déterminant est $-q$,

$$h = 3\frac{\Sigma b-\Sigma a}{q}, \quad q=8\nu+3 \quad \text{ou} \quad h=\frac{\Sigma b-\Sigma a}{q}, \quad q=8\nu+7.$$

Ce double résultat s'accorde avec l'élégant théorème que Mr. *Jacobi* a énoncé, il y déjà plusieurs années *). Pour faire coïncider les deux résultats, il faut remarquer d'abord que l'illustre géomètre a adopté la clas-

---

grandes difficultés à cause de l'ambiguité du radical, n'a été donnée que postérieurement par l'illustre auteur dans un mémoire spécial. Novi comment. societ. Gotting. Tom. I. J'en ai donné une autre, fondée sur des principes entièrement différents. Voyez les mémoires de Berlin, année 1835, ou ce Journal, tome XVII. On pourra se convaincre par les nombreuses applications que nous ferons de ces formules, combien il importait de faire cesser l'ambiguité du signe, qui affecterait également tous les résultats que ces formules concourent à faire obtenir.

*) Observatio arithmetica etc. Vol. IX. de ce journal. Voyez aussi le compte rendu des séances de l'Académie de Berlin, Oct. 1837, ainsi que les Disq. arith. art. 306, X. et surtout la note relative à cet art., à la fin de l'ouvrage, où Mr. *Gauss* annonce des recherches sur le même sujet, mais qui n'ont pas été publiées jusqu'à présent.

sification de *Legendre*, de sorte que le nombre des formes qu'il désigne par N, est tel qu'on a $h = 2N - 1$. En effet, parmi les formes du déterminant $-q$, il n'y a qu'une seule forme ambiguë qui est $x^2 + qy^2$, et qui ne se double pas en passant de la classification de *Legendre* à celle de Mr. *Gauſs*. En second lieu, il faut faire attention que dans le cas où q est de la forme $8\nu + 3$, Mr. *Jacobi* considère des formes à coëfficient moyen impair, comme *Legendre* l'avait déjà fait dans sa Table, ce qui réduit le nombre des formes au tiers.

Si l'on somme la série S sans introduire le facteur $\frac{1}{1-\left(\frac{2}{q}\right)\frac{1}{2}}$, on arrive à cet autre résultat plus simple que le précédent

$$h = A - B = 2A - \frac{q-1}{2},$$

où A et B désignent resp. combien il y a de résidus et de non-résidus quadratiques de q, moindres que $\frac{1}{2}q$.

Soit p un nombre premier $4\nu + 1$, l'unité excepté, et partageons les nombres premiers impairs et différents de p, en deux classes. Désignons généralement par f ceux pour lesquels on a $\left(\frac{-p}{f}\right) = \left(\frac{f}{p}\right)(-1)^{\frac{f-1}{2}} = 1$, et par g ceux qui satisfont à la condition $\left(\frac{-p}{g}\right) = \left(\frac{g}{p}\right)(-1)^{\frac{g-1}{2}} = -1$. On aura alors, comme dans le cas déjà considéré,

$$\Pi \frac{1}{1-\frac{1}{f^s}} . \Pi \frac{1}{1-\frac{1}{g^s}} = \Sigma \frac{1}{n^s},$$

$$\Pi \frac{1}{1-\frac{1}{f^s}} . \Pi \frac{1}{1+\frac{1}{g^s}} = \Sigma (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n}{p}\right) \frac{1}{n^s},$$

$$\Pi \frac{1}{1-\frac{1}{f^{2s}}} . \Pi \frac{1}{1-\frac{1}{g^{2s}}} = \Sigma \frac{1}{n^{2s}},$$

et par suite

$$\Sigma \frac{1}{n^{2s}} . \Pi \frac{1+\frac{1}{f^s}}{1-\frac{1}{f^s}} = \Sigma \frac{1}{n^s} . \Sigma (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n}{p}\right) \frac{1}{n^s},$$

le signe Σ se rapportant aux valeurs de n, impaires et non-divisibles par p, à partir de $n = 1$. Cette équation prendra comme précédemment cette autre forme:

$$6. \quad \Sigma \frac{1}{n^{2s}} . \Sigma \frac{2^\mu}{m^s} = \Sigma \frac{1}{n^s} . \Sigma (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n}{q}\right) \frac{1}{n^s},$$

m désignant tous les nombres impairs qui n'ont que des diviseurs premiers de l'espèce f, et μ le nombre de ces diviseurs premiers inégaux. On a par suite

$$7. \quad \Sigma' \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s} + \Sigma' \frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s} + \ldots$$
$$= 2\Sigma\frac{1}{n^s}.\Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n^s},$$

où le premier membre a autant de termes qu'il y a de formes pour le déterminant $-p$, et les sommations indiquées par Σ', s'étendant à tous les systèmes de valeurs positives ou négatives de x et y, qui n'ont pas p pour commun diviseur et qui rendent le trinome sous le signe, premier à $2p$. En faisant $s = 1+\varrho$, et désignant par h le nombre des formes, le premier membre deviendra $\frac{h(p-1)}{2p\sqrt{p}}.\frac{\pi}{\varrho}$ et l'on aura en même temps $\Sigma\frac{1}{n^s} = \frac{p-1}{2p}.\frac{1}{\varrho}$. On conclut de là

$$h = \frac{2\sqrt{p}}{\pi}\Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n} = \frac{2\sqrt{p}}{\pi}S.$$

Pour obtenir la série qui entre dans cette expression de h, nous aurons recours à la formule de Mr. *Gaufs*

$$\Sigma\cos\frac{2an\pi}{p} - \Sigma\cos\frac{2bn\pi}{p} = \left(\frac{n}{p}\right)\sqrt{p},$$

dans laquelle n est un nombre quelconque non-divisible par p, et les sommations s'étendant à tous les résidus quadratiques a ou à tous les non-résidus quadratiques b de p, qui sont moindres que ce nombre premier. Au moyen de ce théorème, il viendra

$$\sqrt{p}.S = \Sigma\Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{n}\cos\frac{2an\pi}{p} - \Sigma\Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{n}\cos\frac{2bn\pi}{p},$$

où il est permis de ne plus exclure les valeurs de n divisibles par p, car il est facile de voir qu'on introduit ainsi les mêmes termes étrangers dans chacune des deux séries doubles qui sont précédées de signes opposés. La sommation relative à n peut être effectuée au moyen de la formule connue

$$\varphi(z) = \Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\cos nz}{n}\ *),$$

dont le premier membre est une fonction discontinue de z, et qui a respectivement $\frac{1}{4}\pi$, $-\frac{1}{4}\pi$, ou $\frac{1}{4}\pi$ pour valeur selon que z est compris entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$, entre $\frac{1}{2}\pi$ et $\frac{3}{2}\pi$, ou enfin entre $\frac{3}{2}\pi$ et 2π. Si donc l'on dé-

*) Théorie analytique de la chaleur, pag. 175.

signe par A, A', A'' les nombres des valeurs de a comprises entre 0 et $\frac{1}{4}p$, $\frac{1}{4}p$ et $\frac{3}{4}p$, $\frac{3}{4}p$ et p, et par B, B', B'' les nombres analogues relatifs aux valeurs de b, l'expression de S deviendra

$$S = \frac{\pi}{4\sqrt{p}}(A - A' + A'' - B + B' - B'')$$

et comme l'on a en vertu de propriétés connues du nombre premier p, $A = A''$, $B = B''$, $A + A' + A'' = B + B' + B'' = \frac{p-1}{2}$, on conclut

$$S = \frac{\pi}{\sqrt{p}}(A - B).$$

On a donc cette formule très simple pour déterminer le nombre h des formes quadratiques dont le déterminant est $-p$,

$$h = 2(A - B) = 4A - \frac{p-1}{2}.$$

On sait que ces formes sont de deux espèces, les unes ne représentant que des nombres impairs $4\nu + 1$, et les autres que des nombres impairs $4\nu + 3$. Désignons par k et l les nombres des formes qui appartiennent respectivement au premier et au second de ces deux genres. Pour déterminer k et l, on remarquera que l'égalité (6.) reste exacte, en y modifiant les signes comme il suit,

$$\Sigma \frac{1}{n^{2s}} \cdot \Sigma (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{2\mu}{m^s} = \Sigma (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n^s} \cdot \Sigma \left(\frac{n}{p}\right) \frac{1}{n^s}.$$

L'équation qui en dérive et qui est analogue à l'équation (7.), ne diffère de cette dernière qu'en ce que les séries doubles désignées par Σ', sont précédées du signe $-$, lorsque la forme quadratique qui s'y trouve sous le signe Σ', appartient au second genre. On aura donc, en posant toujours $s = 1 + \varrho$, $(k - l)\frac{(p-1)}{2p\sqrt{p}} \cdot \frac{\pi}{\varrho}$ pour la valeur du premier membre, et comme le second membre reste évidemment fini, on conclut

$$k - l = 0,$$

ce qui donne

$$k = l = A - B = 2A - \frac{p-1}{2}.$$

Les deux genres contiennent donc chacun le même nombre de formes.

Ce résultat renferme le théorème déjà cité de la Th. des Nombr. En effet, lorsque p est de la forme $8\nu + 1$, les deux formes ambiguës $x^2 + py^2$, $2x^2 + 2xy + \frac{p+1}{2}y^2$, qui ne se doublent pas en passant à la classification de Mr. *Gauſs*, appartiennent l'une et l'autre au premier genre. On a donc ces relations entre les signes de *Legendre* et ceux que nous

venons d'employer, $k = 2(M-2)+2$, $l = 2N$, d'où l'on conclut $M = N+1$.

Par une analyse entièrement semblable à celle que nous avons appliquée dans ce qui précède aux déterminants $-q$ et $-p$, on peut obtenir le nombre des formes quadratiques dont le déterminant est un nombre quelconque, positif ou négatif, premier ou composé. On trouve ainsi les théorèmes suivants.

„q étant toujours un nombre premier $4\nu+3$, désignons par A et par B respectivement combien il y a de résidus et de non-résidus quadratiques de q entre les limites $\frac{1}{8}q$ et $\frac{3}{8}q$. Cela posé, le nombre des formes dont le déterminant est $-2q$, sera exprimé par $2(A-B)$, ces formes étant d'ailleurs également réparties entre les deux genres qui existent pour ce cas."

„p étant un nombre premier $4\nu+1$, soient A et B resp. les nombres des résidus et de non-résidus quadratiques compris entre 0 et $\frac{1}{8}p$; soient de même A' et B' les nombres des résidus et des non-résidus qui tombent entre $\frac{3}{8}p$ et $\frac{1}{2}p$; cela posé, le nombre des formes quadratiques, ayant $-2p$ pour déterminant, sera exprimé par $2(A-B-A'+B')$, ces formes étant d'ailleurs également réparties entre les deux genres."

„Les lettres p et q conservant la signification précédente, désignons généralement par a les nombres inférieurs et premiers à pq, qui sont tels que $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a}{q}\right)$, et par b les nombres analogues qui remplissent la condition $\left(\frac{b}{p}\right) = -\left(\frac{b}{q}\right)$. Cela posé, l'expression du nombre des formes quadratiques dont le déterminant est $-pq$, sera $\frac{\Sigma b - \Sigma a}{pq}$ ou $3\frac{\Sigma b - \Sigma a}{pq}$, selon que l'on aura $pq \equiv 7$ ou $\equiv 3 \pmod 8$, ces formes étant toujours également partagées entre les deux genres." (Ce théorème est susceptible d'un autre énoncé plus simple comme celui donné ci-dessus pour le déterminant $-q$.)

Et ainsi de suite.

Lorsque le déterminant est un nombre positif D, l'analyse qui fait connaître le nombre des formes quadratiques différentes, exige une attention toute particulière à cause des nouvelles conditions auxquelles ils faut avoir égard dans les sommations doubles que nous avons désignées par Σ'. Ces conditions qui s'ajoutent à celles qui ont lieu pour les détermi-

nants négatifs, consistent 1°. en ce que les valeurs de x et de y doivent être choisies de manière à rendre le trinome $ax^2+2bxy+cy^2$ positif et 2°. en ce qu'il ne faut employer qu'un seul des systèmes de valeurs de x et de y, en nombre infini, qui se déduisent les uns des autres, au moyen des formules

$$x' = xt-(bx+cy)u, \qquad y' = yt+(ax+by)u,$$

t et u désignant généralement tous les nombres positifs ou négatifs qui satisfont à l'équation

$$8. \quad t^2-Du^2 = 1.$$

Cette circonstance introduit dans l'expression de la série double le facteur $\log(T+U\sqrt{D})$, T et U désignant les plus petits nombres (à l'exception de 1 et 0) qui résolvent l'équation précédente, en sorte que ce logarithme joue ici le même rôle que le nombre π dans le cas des déterminants négatifs. D'un autre côté, la série analogue à celles que nous avons désignées par $\Sigma\left(\frac{n}{q}\right)\frac{1}{n}$ et $\Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}$, et que renferme l'autre membre de l'équation, sera également exprimée par un logarithme tel que $\log(T'+U'\sqrt{D})$, T' et U' étant la solution de l'équation (8.), qui se déduit de l'application des fonctions circulaires. Or, on a en vertu d'un théorème connu

$$T'+U'\sqrt{D} = (T+U\sqrt{D})^{\lambda}.$$

λ étant un entier et par conséquent

$$\lambda = \frac{\log(T'+U'\sqrt{D})}{\log(T+U\sqrt{D})}.$$

C'est donc de cet entier λ, que dépend le nombre des formes, mais l'expression de cette dépendance présente quelque légère différence selon les différentes formes dont le déterminant D est susceptible.

L'analyse que nous venons d'indiquer d'une manière rapide, en même temps qu'elle détermine le nombre des formes, a l'avantage de simplifier singulièrement plusieurs théories très-importantes déjà connues, mais qui n'avaient été établies que par des méthodes très compliquées. De ce genre sont celles qui se résument dans les beaux théorèmes démontrés par Mr. *Gauſs* dans les art. 252., 261. et 287., III. des Disq. arith., et dont le dernier surtout exigeait jusqu'à présent le concours d'un grand nombre de recherches très-étendues. (Voyez la fin de l'art. 287.) Ce même théorème résulte aussi d'une combinaison très-simple de la loi de réciprocité avec la proposition sur la progression arithmétique, mais ce moyen de démonstration ne diffère pas au

venons d'employer, $k = 2(M-2)+2$, $l = 2N$, d'où l'on conclut $M = N+1$.

Par une analyse entièrement semblable à celle que nous avons appliquée dans ce qui précède aux déterminants $-q$ et $-p$, on peut obtenir le nombre des formes quadratiques dont le déterminant est un nombre quelconque, positif ou négatif, premier ou composé. On trouve ainsi les théorèmes suivants.

„q étant toujours un nombre premier $4\nu+3$, désignons par A et par B respectivement combien il y a de résidus et de non-résidus quadratiques de q entre les limites $\frac{1}{8}q$ et $\frac{3}{8}q$. Cela posé, le nombre des formes dont le déterminant est $-2q$, sera exprimé par $2(A-B)$, ces formes étant d'ailleurs également réparties entre les deux genres qui existent pour ce cas."

„p étant un nombre premier $4\nu+1$, soient A et B resp. les nombres des résidus et de non-résidus quadratiques compris entre 0 et $\frac{1}{8}p$; soient de même A' et B' les nombres des résidus et des non-résidus qui tombent entre $\frac{3}{8}p$ et $\frac{1}{2}p$; cela posé, le nombre des formes quadratiques, ayant $-2p$ pour déterminant, sera exprimé par $2(A-B-A'+B')$, ces formes étant d'ailleurs également réparties entre les deux genres."

„Les lettres p et q conservant la signification précédente, désignons généralement par a les nombres inférieurs et premiers à pq, qui sont tels que $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a}{q}\right)$, et par b les nombres analogues qui remplissent la condition $\left(\frac{b}{p}\right) = -\left(\frac{b}{q}\right)$. Cela posé, l'expression du nombre des formes quadratiques dont le déterminant est $-pq$, sera $\frac{\Sigma b - \Sigma a}{pq}$ ou $3\,\frac{\Sigma b - \Sigma a}{pq}$, selon que l'on aura $pq \equiv 7$ ou $\equiv 3 \pmod 8$, ces formes étant toujours également partagées entre les deux genres." (Ce théorème est susceptible d'un autre énoncé plus simple comme celui donné ci-dessus pour le déterminant $-q$.)

Et ainsi de suite.

Lorsque le déterminant est un nombre positif D, l'analyse qui fait connaître le nombre des formes quadratiques différentes, exige une attention toute particulière à cause des nouvelles conditions auxquelles ils faut avoir égard dans les sommations doubles que nous avons désignées par Σ'. Ces conditions qui s'ajoutent à celles qui ont lieu pour les détermi-

nants négatifs, consistent 1°. en ce que les valeurs de x et de y doivent être choisies de manière à rendre le trinome $ax^2+2bxy+cy^2$ positif et 2°. en ce qu'il ne faut employer qu'un seul des systèmes de valeurs de x et de y, en nombre infini, qui se déduisent les uns des autres, au moyen des formules

$$x' = xt-(bx+cy)u, \qquad y' = yt+(ax+by)u,$$

t et u désignant généralement tous les nombres positifs ou négatifs qui satisfont à l'équation

$$8. \qquad t^2-Du^2 = 1.$$

Cette circonstance introduit dans l'expression de la série double le facteur $\log(T+U\sqrt{D})$, T et U désignant les plus petits nombres (à l'exception de 1 et 0) qui résolvent l'équation précédente, en sorte que ce logarithme joue ici le même rôle que le nombre π dans le cas des déterminants négatifs. D'un autre côté, la série analogue à celles que nous avons désignées par $\Sigma\left(\frac{n}{q}\right)\frac{1}{n}$ et $\Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}$, et que renferme l'autre membre de l'équation, sera également exprimée par un logarithme tel que $\log(T'+U'\sqrt{D})$, T' et U' étant la solution de l'équation (8.), qui se déduit de l'application des fonctions circulaires. Or, on a en vertu d'un théorème connu

$$T'+U'\sqrt{D} = (T+U\sqrt{D})^{\lambda}.$$

λ étant un entier et par conséquent

$$\lambda = \frac{\log(T'+U'\sqrt{D})}{\log(T+U\sqrt{D})}.$$

C'est donc de cet entier λ, que dépend le nombre des formes, mais l'expression de cette dépendance présente quelque légère différence selon les différentes formes dont le déterminant D est susceptible.

L'analyse que nous venons d'indiquer d'une manière rapide, en même temps qu'elle détermine le nombre des formes, a l'avantage de simplifier singulièrement plusieurs théories très-importantes déjà connues, mais qui n'avaient été établies que par des méthodes très compliquées. De ce genre sont celles qui se résument dans les beaux théorèmes démontrés par Mr. *Gauſs* dans les art. 252., 261. et 287., III. des Disq. arith., et dont le dernier surtout exigeait jusqu'à présent le concours d'un grand nombre de recherches très-étendues. (Voyez la fin de l'art. 287.) Ce même théorème résulte aussi d'une combinaison très-simple de la loi de réciprocité avec la proposition sur la progression arithmétique, mais ce moyen de démonstration ne diffère pas au

fond de celui que nous venons d'indiquer, du moins, lorsque pour établir que toute progression arithmétique renferme une infinité de nombres premiers, on a recours aux séries, comme nous l'avons fait dans le mémoire cité plus haut.

Les théorèmes qui déterminent le nombre des formes quadratiques, renferment implicitement un grand nombre de propositions qui peuvent s'énoncer indépendamment de la théorie de ces formes, et qui seraient peut-être très-difficiles à démontrer sans le secours combiné de nos séries et des formules de Mr. *Gauſs*. Il résulte, par exemple, de ce qu'on a vu plus haut que pour un nombre premier $q = 4\nu + 3$, la somme des non-résidus quadratiques surpasse toujours celle des résidus *), que pour un nombre premier $p = 4\nu + 1$, il y a toujours un plus grand nombre de résidus que de non-résidus moindres que $\frac{1}{4}p$, etc. On peut encore augmenter le nombre de ces propositions, les séries que nous avons considérées, étant susceptibles d'être sommées dans plusieurs cas sans que l'on y suppose $s = 1$. C'est ce qui arrive, par exemple, pour la série $\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n^2}$, le signe Σ se rapportant à toutes les valeurs entières de n, à partir de $n = 1$, à l'exclusion de celles divisibles par p. En effectuant cette sommation, on arrive à la conclusion que pour un nombre premier $p = 4\nu + 1$, on a toujours $\Sigma a^2 > \Sigma b^2$.

Des considérations du même genre peuvent aussi servir à faire cesser l'indétermination que présentent les formules qui donnent une solution de l'équation $t^2 - Du^2 = 1$, au moyen des fonctions circulaires, et qui ont été publiées par Mr. *Jacobi* et par moi **). Pour en donner un exemple, supposons $D = p$. On a alors:

$$k\sqrt{p} + h = \frac{2}{\sqrt{p}}\Pi\left(1 - e^{\frac{2a\pi}{p}\sqrt{-1}}\right) = \frac{2^{\frac{p+1}{2}}}{\sqrt{p}}\Pi \sin\frac{a\pi}{p},$$

$$k\sqrt{p} - h = \frac{2}{\sqrt{p}}\Pi\left(1 - e^{\frac{2b\pi}{p}\sqrt{-1}}\right) = \frac{2^{\frac{p+1}{2}}}{\sqrt{p}}\Pi \sin\frac{b\pi}{p},$$

---

*) On a encore $A > B$, A et B désignant comme ci-dessus combien il y a de résidus et de non-résidus de q, au dessous de $\frac{1}{2}q$. Dans un article du bulletin de Mr. *de Férussac* (Mars 1831, pag. 137), où Mr. *Cauchy* énonce un théorème très-remarquable sur les nombres premiers $4\nu + 3$, ce célèbre analyste distingue deux cas selon que $A > B$ ou $A < B$. Ce qu'on a prouvé plus haut, montre que le second cas ne saurait avoir lieu et fait cesser l'indétermination que le théorème de Mr. *Cauchy* semblait présenter.

**) Compte rendu de l'Académie de Berlin, Octob. 1837. Tome XVII. de ce journal.

le signe Π se rapportant à toutes les valeurs de a ou de b, et les entiers h et k satisfaisant à l'équation

$$h^2 - pk^2 = -4.$$

Il y a des questions qui exigent qu'on connaisse les signes dont les valeurs de k et h, tirées des équations précédentes, sont affectées.

Il est évident que la valeur de k est positive, mais la détermination du signe de h présente des difficultés. Pour résoudre cette question, on remarquera que h sera positif ou négatif, selon que le rapport $\frac{k\sqrt{p}+h}{k\sqrt{p}-h}$ sera supérieur ou inférieur à l'unité. Tout se réduit donc à voir si $\log\left(\frac{k\sqrt{p}+h}{k\sqrt{p}-h}\right)$ est positif ou négatif. Le développement en série donne

$$\log\left(\frac{k\sqrt{p}+h}{k\sqrt{p}-h}\right) = -\Sigma\frac{1}{n}\left(\Sigma e^{\frac{2an\pi}{p}\sqrt{-1}} - \Sigma e^{\frac{2bn\pi}{p}\sqrt{-1}}\right),$$

la sommation relative à n, s'étendant à toutes les valeurs entières et positives. Or, la différence $\Sigma e^{\frac{2an\pi}{p}\sqrt{-1}} - \Sigma e^{\frac{2bn\pi}{p}\sqrt{-1}}$ s'évanouit lorsque n est divisible par p; dans les autres cas elle devient par les formules de Mr. *Gauſs*, $\left(\frac{n}{p}\right)\sqrt{p}$. On a donc simplement

$$\log\left(\frac{k\sqrt{p}+h}{k\sqrt{p}-h}\right) = -\sqrt{p}\,\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n},$$

où il faut exclure les valeurs de n, divisibles par p.

La série renfermée dans la second membre, étant la limite de $\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n^s}$, lorsque s converge vers l'unité, et cette dernière pouvant se décomposer en une infinité de facteurs tous positifs, comme il suit:

$$\frac{1}{1-\left(\frac{2}{p}\right)\frac{1}{2^s}}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{3}{p}\right)\frac{1}{3^s}}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{5}{p}\right)\frac{1}{5^s}}\quad \text{etc.}$$

où il entre toute la série des nombres premiers, le seul nombre p excepté, on conclut que $\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}$ a une valeur positive, et partant que le signe de h qu'il s'agissait de déterminer, est négatif.

Je terminerai cette note, en montrant le parti qu'on peut tirer des séries précédentes, pour déterminer les expressions-limites des valeurs moyennes de certaines fonctions très-irrégulières, relatives aux propriétés des nombres. (Voyez pour la définition des valeurs moyennes des fonctions de ce genre, les Disq. arithm. art. 301.) Dans un mémoire récemment

lu à l'Académie de Berlin *), je me suis attaché à établir quelques principes desquelles on peut déduire ces expressions-limites ou lois finales, dont la connaissance est très-utile dans différentes recherches, et j'ai fait l'application de ces principes à la démonstration de la formule remarquable que *Legendre* a donnée pour exprimer d'une manière très-approchée combien il y a de nombres premiers au dessous d'une limite quelconque, mais très-grande, et à d'autres questions du même genre. J'ai trouvé, par exemple, que la formule très-simple

$$\log n + 2C,$$

C désignant une constante connue (*Euleri* Calc. diff. pag. 444), exprime avec d'autant plus d'exactitude que n est plus grand, la valeur moyenne du nombre des diviseurs de l'entier n, et qu'on a pareillement pour la somme moyenne de ces mêmes diviseurs,

$$\tfrac{1}{6}\pi^2 n - \tfrac{1}{2}.$$

Ces résultats ont été conclus de la série connue de *Lambert* et d'une autre série analogue. Ils pourraient aussi se déduire des séries considérées plus haut. Voici maintenant un nouveau résultat qu'on tire de ces dernières séries. Soit $f(n)$ la fonction de n, qui indique de combien de manières le nombre n peut se décomposer en deux facteurs premiers entre eux. On a, comme l'on sait, $f(n) = 2^\lambda$, λ désignant le nombre des diviseurs premiers inégaux de n. Cela posé, on trouve facilement

$$\Sigma \frac{f(n)}{n^s} = \frac{\varphi^2(s)}{\varphi(2s)},$$

où l'on a fait $\varphi(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots$, et la sommation devant s'étendre à toutes les valeurs entières de n, à partir de $n = 1$. En posant, comme plus haut, $s = 1 + \varrho$, et développant le second membre suivant les puissances ascendantes de ϱ, il viendra:

$$\Sigma \frac{f(n)}{n^{1+\varrho}} = \frac{6}{\pi^2}\left[\frac{1}{\varrho^2} + \left(\frac{12\,C'}{\pi^2} + 2C\right)\frac{1}{\varrho} + \ldots\right]$$

La constante C est la même que ci-dessus, et C' désigne la série $\frac{\log 2}{2^2} + \frac{\log 3}{3^2} + \frac{\log 4}{4^2} + \ldots$

Au moyen de la méthode développée dans le mémoire cité, on trouve sur le champ que l'expression-limite de la valeur moyenne de $f(n)$, est celle-ci:

$$\frac{6}{\pi^2}\left(\log n + \frac{12\,C'}{\pi^2} + 2C\right).$$

*) Compte rendu pour le mois de Février 1838.

Les formules remarquables que Mr. *Gauſs* a indiquées dans les art. 301. et suiv. de son bel ouvrage, peuvent être obtenues par une analyse du même genre. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'obtenir la valeur moyenne du nombre des genres qui ont lieu pour le déterminant $-n$, nombre que nous désignerons par $F(n)$. Si l'on compare l'art. 231., où tous les caractères complets assignables *a priori* sont énumérés, avec les art. 261. et 287., où l'illustre auteur fait voir qu'il n'y a que la moitié de ces caractères, qui correspondent à des genres réellement existants, on trouvera facilement les 5 équations qui suivent et dans lesquelles on a posé, pour abréger,

$$\psi(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots., \quad \chi(s) = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \text{etc.},$$

$$\frac{2}{8^s} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2^s}} \cdot \frac{\psi^2(s)}{\psi(2s)} = \Sigma \frac{F(n)}{n^s}, \quad n = 8\nu,$$

$$\frac{1}{4^s} \cdot \frac{\psi^2(s)}{\psi(2s)} = \Sigma \frac{F(n)}{n^s}, \quad n = 8\nu + 4,$$

$$\frac{1}{2^s} \cdot \frac{\psi^2(s)}{\psi(2s)} = \Sigma \frac{F(n)}{n^s}, \quad n = 4\nu + 2,$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\psi^2(s) + \chi^2(s)}{\psi(2s)} = \Sigma \frac{F(n)}{n^s}, \quad n = 4\nu + 1,$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{\psi^2(s) - \chi^2(s)}{\psi(2s)} = \Sigma \frac{F(n)}{n^s}, \quad n = 4\nu + 3,$$

les sommations se rapportant à toutes les valeurs positives et entières de n, comprises dans la forme linéaire indiquée à côté. En faisant comme plus haut $s = 1 + \varrho$, on trouve que l'expression-limite de la valeur moyenne de $F(n)$, est suivant les 5 formes qu'on vient d'énumérer:

$$\frac{8}{\pi^2}\left(\log n + \frac{12\,C'}{\pi^2} + 2\,C - \tfrac{8}{3}\log 2\right),$$

$$\frac{4}{\pi^2}\left(\log n + \frac{12\,C'}{\pi^2} + 2\,C - \tfrac{2}{3}\log 2\right),$$

$$\frac{4}{\pi^2}\left(\log n + \frac{12\,C'}{\pi^2} + 2\,C + \tfrac{1}{3}\log 2\right),$$

$$\frac{4}{\pi^2}\left(\log n + \frac{12\,C'}{\pi^2} + 2\,C + \tfrac{4}{3}\log 2\right),$$

$$\frac{2}{\pi^2}\left(\log n + \frac{12\,C'}{\pi^2} + 2\,C + \tfrac{4}{3}\log 2\right),$$

et comme sur 8 entiers consécutifs quelconques il y en a resp. 1, 1, 2, 2, 2, qui sont compris dans ces 5 formes, 8ν, $8\nu+4$, $4\nu+2$, $4\nu+1$, $4\nu+3$,

on conclut que l'expression-limite de la valeur moyenne du nombre des genres qui ont lieu pour un déterminant $-n$, dont on ne désigne pas la forme linéaire, est la somme des expressions précédentes resp. multipliées par les fractions $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{2}{8}$. On trouve ainsi

$$\frac{4}{\pi^2}\left(\log n + \frac{12\,C'}{\pi^2} + 2\,C - \tfrac{1}{6}\log 2\right),$$

ce qui coïncide avec le résultat de Mr. *Gauſs*.

P. S. En démontrant plus haut les théorèmes relatifs aux déterminants $-q$ et $-p$, on a énoncé deux conditions auxquelles il faut avoir égard dans les sommations désignées par Σ', et dont la première consistait en ce que les valeurs simultanées de x et de y ne devaient pas avoir le diviseur commun q ou p. Cette condition est en effet exacte et résultait de ce qui précédait, mais on a oublié de faire remarquer qu'elle pouvait être omise comme étant comprise dans la seconde condition d'après laquelle le trinome ne doit recevoir que des valeurs premières à $2q$ ou à $2p$.

Berlin, au mois de Mai 1838.

17.

Ein polyedrischer Satz.

(Von Herrn *C. Koppe* in Soest.)

Lehrsatz. **Ein Körper, welcher von zwei parallelen Vielecken als Grundflächen und von Trapezen als Seitenflächen eingeschlossen wird, ist einem Prisma gleich, welches zur Höhe hat den senkrechten Abstand der beiden parallelen Grundflächen von einander und zur Grundfläche den in der Mitte zwischen beiden Grundflächen parallel zu denselben geführten Durchschnitt des Körpers vermehrt um den zwölften Theil eines Vielecks, welches mit den Grundflächen einerlei Winkel und die Unterschiede ihrer homologen Seiten zu Seiten hat.**

Beweis. Die parallelen Grundflächen seien A und B, ihre Seiten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und $b_1, b_2, b_3, \ldots$; eine Ebene parallel mit denselben durchschneide die Seitenflächen in einem Vielecke Z, dessen Seiten $z_1, z_2, z_3, \ldots$ sein mögen, wo die mit einerlei Ziffer bezeichneten Seiten a_1 u. b_1 u. z_1, a_2 u. b_2 u. z_2 u. s. f. als in derselben Seitenfläche liegend gedacht werden sollen. Endlich seien die Winkel, welche zwei Seiten eines Vielecks oder ihre Verlängerungen einschliefsen, auf die gebräuchliche Weise durch $(a_1\,a_2)$, $(a_1\,a_3)$ u. s. w. bezeichnet. Nun ist bekanntlich der Inhalt des Vielecks A gleich einer Summe, deren erstes Glied $= \frac{1}{2} a_1 a_2 \sin(a_1\,a_2)$ ist, und deren folgende Glieder ebenfalls gleich sind den halben Producten aus je zweien Seiten multiplicirt in den Sinus des Winkels, welchen dieselben oder ihre Verlängerungen mit einander bilden. Bei dieser Uebereinstimmung der einzelnen Glieder unter sich reicht es für die Vergleichung der verschiedenen parallelen Durchschnitte vollkommen aus, die Betrachtung für alle auf ein homologes Glied zu beschränken. Demnach will ich also ganz kurz setzen:

$$1.\quad \begin{cases} A = \frac{1}{2} a_1 a_2 \sin(a_1\,a_2) + \ldots. \\ B = \frac{1}{2} b_1 b_2 \sin(b_1\,b_2) + \ldots. = \frac{1}{2} b_1 b_2 \sin(a_1\,a_2) + \ldots., \\ Z = \frac{1}{2} z_1 z_2 \sin(z_1\,z_2) + \ldots. = \frac{1}{2} z_1 z_2 \sin(a_1\,a_2) + \ldots. \end{cases}$$

Denn da die Ebene der Vielecke A, B, Y parallel sind, so ist offenbar $\angle(a_1\,a_2) = (b_1\,b_2) = (z_1\,z_2)$, $\angle(a_1\,a_3) = (b_1\,b_3) = (z_1\,z_3)$ u. s. w. Ist der

Abstand der Grundflächen A und B von einander $= h$, und der Abstand des Durchschnitts Z von der Grundfläche A gleich x, so ist

$$2. \quad z_1 = a_1 - (a_1 - b_1)\frac{x}{h} \quad \text{und} \quad z_2 = a_2 - (a_2 - b_2)\frac{x}{h},$$

also aus (1.):

$$3. \quad Z = \tfrac{1}{2}\left(a_1 a_2 - (2a_1 a_2 - a_1 b_2 - a_2 b_1)\frac{x}{h} + (a_1 - b_1)(a_2 - b_2)\frac{x^2}{h^2}\right)\sin(a_1 a_2) + \ldots.$$

Der Inhalt des ganzen zwischen A und B enthaltenen Körpers ist folglich

$$4. \quad K = \int_{0\ldots h} Z\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}[a_1 a_2 h - \tfrac{1}{2}(2a_1 a_2 - a_1 b_2 - a_2 b_1)h + \tfrac{1}{3}(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)h]\sin(a_1 a_2) + \ldots.$$

$$= \tfrac{1}{12}h(2a_1 a_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + 2b_1 b_2)\sin(a_1 a_2) + \ldots.$$

Bezeichne ich den Durchschnitt, welcher — parallel zu den Grundflächen — von beiden gleich weit absteht, mit M, und ein Prisma, welches M zur Grundfläche und h zur Höhe hat, mit P, so ist

$$5. \quad P = hM = \tfrac{1}{8}h(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)\sin(a_1 a_2) + \ldots.$$

folglich

$$6. \quad K - P = \tfrac{1}{24}h(a_1 a_2 - a_1 b_2 - a_2 b_1 + b_1 b_2)\sin(a_1 a_2) + \ldots.$$

$$= \tfrac{1}{24}h(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)\sin(a_1 a_2) + \ldots.$$

Dieser letzte Ausdruck ist aber offenbar der zwölfte Theil vom Inhalt eines Prisma, welches h zur Höhe und zur Grundfläche hat ein Vieleck mit den Seiten $a_1 - b_1$, $a_2 - b_2$, ... und den Winkeln $(a_1 a_2)$, $(a_1 a_3)$...., woraus die Richtigkeit des zu erweisenden Satzes hervorgeht.

Dieser Satz wird aber noch besonders nützlich durch die vielen practischen Anwendungen, welche er zuläfst. So erhält z. B. nach demselben der Ausdruck für den Inhalt eines abgekürzten Kegels mit der Höhe h und den Radien r und ϱ folgende bequeme Gestalt:

$$I = \pi h\left[\left(\frac{r+\varrho}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{12}(r-\varrho)^2\right];$$

der Inhalt eines elliptischen Kegels (z. B. einer Badewanne) von der Höhe h und den halben Axen a_1 und a_2 für die eine Grundfläche, b_1 und b_2 für die andere:

$$I = \pi h\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\cdot\frac{a_2 + b_2}{2} + \tfrac{1}{12}(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)\right);$$

der Inhalt eines Pontons, welches die Höhe h, unten die Länge a_1 und die Weite a_2, oben die Länge b_1 und die Weite b_2 hat:

$$I = h\left(\frac{a_1+b_1}{2}.\frac{a_2+b_2}{2} + \tfrac{1}{12}(a_1-b_1)(a_2-b_2)\right);$$

der Inhalt eines von zwei parallelen Trapezen als Grundflächen und von vier Trapezen als Seitenflächen eingeschlossenen Körpers, wenn a_1 und a_2 die beiden parallelen Seiten der einen Grundfläche, c die senkrechte Entfernung derselben von einander, b_1, b_2 und d das Nemliche für die andere Grundfläche und endlich h die Höhe des ganzen Körpers bezeichnet:

$$I = h\left(\frac{a_1+b_1+a_2+b_2}{2}.\frac{c+d}{2} + \tfrac{1}{12}(a_1-b_1+a_2-b_2).\frac{c-d}{2}\right).$$

In diesem letzten Ausdrucke dürften wohl ziemlich alle, von sechs Vierecken eingeschlossenen Körper, deren Ausmessung im practischen Leben Anwendung findet, enthalten sein.

Sämmtliche Ausdrücke empfehlen sich aber für die practische Anwendung ganz besonders durch ihre ausgezeichnete Einfachheit. Sie sind nemlich insgesammt Producte, welche zum einen Factor die Höhe h haben, während der andere Factor aus zwei Theilen besteht, aus einem Näherungswerthe — dem mittlern Durchschnitt des Körpers — und aus einer Correction, welche nach Befinden der Umstände entweder ganz weggelassen, oder wo gröfsere Genauigkeit gefordert wird, sehr leicht angebracht werden kann. Auch ist diese Correction von der Art, dafs sich ihre Gröfse, also auch ihre Entbehrlichkeit oder Unentbehrlichkeit in jedem besondern Falle schon von vorn herein gar leicht abschätzen läfst.

Soest den 1sten Mai 1838.

18.

Aufgaben und Lehrsätze,

erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.

(Vom Hrn. Prof. *Steiner* zu Berlin.)

Ist C irgend eine ebene geschlossene und überall convexe Curve in fester Lage, und rollt ein gegebener Kreis K in der nämlichen Ebene auf der convexen Seite derselben: so beschreibt jeder mit dem Kreise fest verbunden gedachte Punct P irgend eine Curve V, welche, wenn K immer fortrollt, beliebig oft um C herumläuft, entweder nach einem oder mehreren Umläufen in sich zurückkehrt, sich schliefst, oder nie in sich zurückkehrt (oder nur nach unendlich vielen Umläufen), je nachdem nämlich die Umfänge von K und C beziehlich *commensurabel* oder *incommensurabel* sind. Für den ersten Fall, welcher hier allein betrachtet werden soll, sei Umfang K: Umfg. $C = k : c$, wo k und c beliebige ganze Zahlen, jedoch relative Primzahlen sind; alsdann wird nach k Umläufen jede Curve V in sich zurückkehren. Nur die vom Mittelpuncte p des Kreises K beschriebene Curve v macht hierbei eine Ausnahme, indem sie nämlich schon nach dem ersten Umlaufe in sich zurückkehrt, und dann diesen geschlossenen Theil von ihr k mal wiederholt, bis sich die andern Curven V schliefsen. Der zwischen einer solchen geschlossenen Curve V und der Basis C liegende Flächenraum soll ebenfalls durch V bezeichnet und Inhalt der Curve V genannt werden. Dabei sind jedoch, wenn $k > 1$ und mithin mehrere (k) Umläufe statt finden, gewisse Theile der Ebene mehrfach zu nehmen und zu jenem Inhalte zu rechnen; so besteht namentlich der Inhalt der Curve v aus k mal dem Raume, welcher zwischen dem einfachen Bogen derselben, der beim ersten Umlaufe beschrieben wird, und der Basis C liegt. Bezeichnet man ferner den Radius des Kreises K durch r und den Abstand des Punctes P vom Mittelpuncte p desselben durch a, so finden unter andern nachstehende Sätze und Gleichungen statt:

1. *„Die von dem Mittelpuncte p des Kreises K beschriebene Curve v hat unter allen den kleinsten Inhalt und zwar ist derselbe:*

$$v = (2c + k).\pi r^2,$$

d. h. $2c + k$ mal so grofs als die Fläche des rollenden Kreises."

2. *„Puncte P, welche gleich weit vom Mittelpuncte p des Kreises entfernt sind, beschreiben Curven V von gleichem Inhalte, und auch umgekehrt; und zwar ist*

$$V = (2c + k).\pi r^2 + (c + k).\pi a^2 = v + (c + k).\pi a^2,$$

d. h. der Inhalt jeder solchen Curve ist um die $c + k$fache Fläche desjenigen Kreises, welcher mit dem rollenden concentrisch ist und durch den erzeugenden Punct P geht, gröfser als der Inhalt der vom Mittelpuncte p beschriebenen Curve v." Liegt insbesondere der Punct P in der Kreislinie K, so dafs $a = r$, so ist $V = (3c + 2k).\pi r^2$."

3. *„Die von dem Mittelpuncte p beschriebene Curve v ist unter allen die kürzeste und zwar ist ihre Länge*

$$(v) = (c+k)\pi . 2r,$$

d. h. $c+k$ mal so grofs, als der Umfang des rollenden Kreises." *)

Die vorstehenden drei Sätze verlieren nur in dem ganz speciellen Falle ihre Gültigkeit, wo $k = c = 1$, d. h. wo der Kreis K und die Basis C gleichen Umfang haben, denn in diesem Falle sind sie nur unter gewissen Bedingungen wahr, wie z. B. wenn die Curve C einen Mittelpunct hat. Dagegen finden aber andere Sätze statt, wovon der folgende einer der einfachsten ist:

4. *„Rollt ein Kreis K um irgend eine geschlossene convexe Curve C von gleichem Umfange, bis er in seine anfängliche Lage zurückkehrt, so ist die Summe S der Inhalte der n Curven $V_1, V_2, \ldots V_n$, die von je n Puncten $P_1, P_2, \ldots P_n$, welche die Kreislinie K in n gleiche Theile theilen (also die Ecken eines regelmäfsigen n Ecks sind) beschrieben werden, constant, die Curve C mag sein, welche man will, nämlich die Summe ist allemal der 5 nfachen Kreisfläche K gleich, d. i.*

$$S = 5n.\pi r^2."$$

Es kann noch bemerkt werden, dafs im Allgemeinen analoge Sätze statt finden, wenn der Kreis K auf der inneren concaven Seite der Basis C rollt, und dafs man zum Theil die entsprechenden Gleichungen unmittelbar erhält, wenn in den obigen $-k$ statt $+k$ gesetzt wird.

Wenn insbesondere die Basis C ein Kreis ist, so reduciren sich die Sätze zum Theil auf bekannte Sätze über die Epi- und Hypocykloiden.

Dagegen finden auch allgemeinere Sätze statt, wie z. B. die folgenden:

5. *Wenn K, anstatt ein Kreis, irgend eine geschlossene convexe Curve ist, die einen Mittelpunct p hat, und wenn bei denselben übrigen Voraussetzungen, wie oben, k eine gerade Zahl ist: so ist gleichfalls sowohl der Inhalt als der Umfang der vom Mittelpuncte p beschriebenen Curve v ein Minimum, und für den Inhalt der von irgend einem anderen Puncte P beschriebenen Curve V hat man wie oben* (2.)

$$V = v + (c+k).\pi a^2;"$$

---

*) Betrachtet man von der Curve v nur einen Umlauf, nur den einfachen Bogen und bezeichnet ihn durch v_1, so ist der zugehörige Inhalt (1)

$$v_1 = \left(2\frac{c}{k}+1\right).\pi r^2,$$

und der Umfang (3.):

$$(v_1) = \left(\frac{c}{k}+1\right).2\pi r.$$

Diese zwei Resultate folgen auch aus den Sätzen, welche *Crelle* in den *Gergonne*'schen Annalen (tom. 12. pag. 1 — 36.) bewiesen hat, wo er zuerst den Begriff paralleler Curven und die wesentlichsten Eigenschaften derselben aufstellte. Denn nach diesem Begriffe ist die Curve v_1 der Basis C parallel.

wobei a, wie früher, den Abstand des Punctes P vom Mittelpuncte p bezeichnet. Hier kehrt die Curve v nicht mehr früher als die übrigen V, also ebenfalls erst nach k Umläufen in sich zurück.

6. *Ist die rollende Curve K beschaffen wie vorhin* (5.), *hat dagegen die Basis C auch einen Mittelpunct und sind die Zahlen k und c beide ungerade (aber immerhin relative Primzahlen): so repräsentirt die von dem Mittelpuncte p erzeugte Curve v ebenfalls, in Rücksicht des Inhaltes sowohl als des Umfanges, ein Minimum, und für den Inhalt der von irgend einem Puncte P beschriebenen Curve V hat man denselben Ausdruck, wie vorhin* (5.)." — Dieser Satz gilt auch für den besonderen Fall, wo $k = c = 1$.

7. Sind die Curven K, C beschaffen, wie beim letzten Satze (6.): so wird die vom Mittelpuncte p der rollenden Curve K beschriebene Curve v gröfseren oder kleineren Inhalt haben, je nachdem diejenigen Puncte, in welchen K und C anfänglich einander berühren, gewählt werden. Daher kann gefragt werden: *„In welchen Puncten müssen K und C anfänglich einander berühren, damit der Inhalt (oder Umfang) der Curve v (für sich betrachtet) ein Maximum oder Minimum wird?"* Offenbar wird damit zugleich auch der Inhalt der irgend einem anderen bestimmten Puncte P entsprechenden Curve V beziehlich ein Maximum oder Minimum.

Ein einfaches Beispiel dieser Aufgabe wäre, wenn K und C Ellipsen von gleichem Umfange sind, oder noch beschränkter, wenn sie gleiche Ellipsen sind.

Ferner kann gefragt werden: wenn K und C gleichen Umfang haben und einander in beliebigen Puncten berühren, und wenn sodann das eine Mal K auf C und das andere Mal C auf K rollt, wie sich dann die von ihren Mittelpuncten beschriebenen Curven in Rücksicht des Inhaltes oder Umfanges zu einander verhalten? und ob namentlich, wenn der von dem einen Mittelpuncte beschriebenen Curve ein Maximum oder Minimum zukommt, dann auch die andere eine gleiche Eigenschaft habe?

8. *„Sind K und C gleiche Ellipsen und berühren sie einander, während K auf C rollt, stets in entsprechenden oder homologen Puncten, so ist:*

$$v = 2\pi(\alpha^2+\beta^2) - \pi\alpha\beta \quad \text{und} \quad V = 2\pi(\alpha^2+\beta^2+a^2) - \pi\alpha\beta,$$

wo α, β die halben Axen der Ellipse sind, und v, V und a die ihnen oben zugeschriebene Bedeutung haben. Oder bezeichnet man die von den Curven v, V allein eingeschlossenen ganzen Räume durch v_1, V_1, so ist:

$$v_1 = 2\pi(\alpha^2+\beta^2) \quad \text{und} \quad V_1 = 2\pi(\alpha^2+\beta^2+a^2)".$$

19.

Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze.

(Von Hrn. Prof. *Steiner* zu Berlin.)

(Auszug aus einer am 1. December 1836 in der hiesigen Akademie der Wissenschaften gehaltenen Vorlesung.)

Die Relationen zwischen dem Umfange und Inhalte der Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raume geben zu einer Menge von Fragen über Maximum und Minimum Anlafs, deren leichte und klare Beantwortung sich fast durchweg auf die Eigenschaft des Kreises, des geraden Kegels oder Cylinders und der Kugel stützt. *Lhuilier* hat dieses Gesetz (namentlich für die Figuren in der Ebene und im Raume) zuerst erkannt und in seinem Werke „*De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum etc. Varsaviae. 1782.*" ziemlich deutlich ausgesprochen. Alles, was vor ihm auf elementarem Wege hierin geleistet worden ist, hat er mit grofser Umsicht zusammengefafst und mit Scharfsinn verbessert und erweitert. Leider scheint öfter sein Werk citirt, als die darin herrschende Methode richtig verstanden oder gehörig gewürdigt und befolgt worden zu sein; denn alle seine Nachfolger sind mehr oder minder von seiner einfachen natürlichen Betrachtungsweise abgewichen, — abgesehen davon, dafs sie sich auch auf eine viel geringere Zahl von Aufgaben und Sätzen beschränkten, — wodurch aber auch in gleichem Maafse die schöne Einfachheit der Beweise, der innige Zusammenhang der Sätze zusammt seiner inneren Begründung verschwand. Die rein geometrische Betrachtung ist indefs weit davon entfernt, die ihr, als einer unbequemen und unzulänglichen, vielfältig wiederfahrene Mifsachtung zu verdienen; vielmehr macht gerade sie es möglich, die Eigenschaften, worauf es hierbei hauptsächlich ankommt, auf eine höchst einfache und zugleich elegante Weise darzustellen, und zeigt überdies jeder anderen Methode den Weg, auf welchem sie sich ohne grofse Schwierigkeit des Gegenstandes bemächtigen könne.

Das eigentliche Wesen des hier zu befolgenden Ganges besteht darin, dafs nach den primitiven Ursachen und Umständen geforscht wird, welche das Maximum oder Minimum bewirken. Es zeigt sich hierbei, dafs aus

wenigen einfachen Fundamentalsätzen leicht gewisse Hauptsätze folgen, aus denen sodann alle übrigen gleichsam wie blofse Zusätze sich stufenweise entwickeln lassen. Auf diese Weise giebt sich ein eigenthümlicher Zusammenhang zwischen allen denjenigen Figuren kund, welchen die Eigenschaft eines Maximums oder Minimums zukommt; es tritt nämlich klar hervor, dafs dieselben nur verschiedene Theile derjenigen Figuren sind, worauf sich die Hauptsätze beziehen, und dafs die nämlichen Gründe auf denen die letzteren beruhen, auch in jenen zusammengesetzteren anscheinend schwierigeren Sätzen fortwirken.

Bei den von mir angestellten Versuchen die genannten Gegenstände rein synthetisch zu behandeln, stellte es sich heraus, dafs die drei Gattungen von Figuren, ebene, sphärische und körperliche nicht gleichförmige Beweise gestatten, vielmehr die sphärischen ein ganz anderes Verfahren erheischen, als die körperlichen, während die ebenen beide Beweisarten zulassen. Hier wird, als eine kleine Probe, nur diejenige gegeben, welche für die Figuren in der Ebene und im Raume auf analoge Weise statt findet.

Von den ebenen Figuren.

§. 1. Fundamentalsatz. „*Unter allen Dreiecken über gleichen Grundlinien und von gleicher Höhe (oder gleichem Inhalte) hat das gleichschenklige die kleinste Schenkelsumme; und auch umgekehrt.*" Oder mit anderen Worten:

„*Jedes ungleichschenklige Dreieck ABC* (Fig. 28.) *läfst sich in ein anderes (gleichschenkliges) abc von gleichem Inhalte und gleicher Grundlinie (AB = ab) verwandeln, welches kleinere Schenkelsumme hat und in Bezug auf eine bestimmte Axe X, die durch die Spitze c und die Mitte m der Grundlinie geht, symmetrisch ist.*"

Dieser allgemein bekannte Satz bedarf hier keines Beweises.

§. 2. „Sind die parallelen Seiten oder Grundlinien *AB*, *DE* eines Paralleltrapezes *ADEB*, so wie die Höhe oder der Inhalt desselben gegeben, so ist die Summe der übrigen zwei Seiten, *AD* + *BE*, dann am kleinsten, wenn sie einander gleich, oder wenn sie gegen jede der parallen Seiten unter gleichen Winkeln geneigt sind." Oder:

„*Jedes Paralleltrapez ADEB, welches an der einen oder anderen Grundlinie AB oder DE nicht zwei gleiche Winkel, hat kann in*

ein anderes adeb von gleichem Inhalte und gleichen Grundlinien (AB = ab, DE = de) verwandelt werden, in welchem die zwei übrigen Seiten eine kleinere Summe haben, und welches in Bezug auf eine Axe X, die durch die Mitten (g, h) der parallelen Seiten geht und auf diesen senkrecht steht, symmetrisch ist."

Wie leicht zu sehen, folgt dieser Satz unmittelbar aus dem vorhergehenden (§. 1.). Denn ist $DE < AB$, so sind die Paralleltrapeze $ADEB$, $adeb$ immer als Theile zweier Dreiecke ACB, acb anzusehen, von welchen sie mittelst der Geraden De abgeschnitten sind; und da sofort, vermöge der Parallelität der drei Geraden Aa, De und Cc, die Seiten der Paralleltrapeze, nämlich AD und BE, ad und be, von den zugehörigen Seiten der Dreiecke, AC und BC, ac und bc, gleichvielte Theile sind, so mufs folglich, wenn $ac + bc < AC + BC$, auch $ad + be < AD + BE$ sein. — Wenn insbesondere die gegebenen Grundlinien einander gleich, also $AB = DE$, dann ist $ADEB$ ein Parallegramm und $adeb$ ein Rechteck und der Satz bleibt offenbar auch für diesen Fall gültig.

§. 3. Mittelst der beiden vorstehenden Sätze kann nun jedes beliebige convexe Vieleck V in ein anderes Vieleck V_1 von gleichem Inhalte verwandelt werden, welches kleineren Umfang hat, und in Bezug auf irgend eine Axe X symmetrisch ist. Dies mag durch folgende Beispiele anschaulich gemacht werden.

I. Es sei ein Dreieck ABC (Fig. 29.) gegeben. Aus den Ecken desselben fälle man auf die beliebig angenommene Axe X Perpendikel Aa, Be, Cc, trage das Stück BD des einen Perpendikels Be, welches innerhalb des Dreiecks liegt, symmmetrisch auf die Axe X, so dafs $eb = ed$ und $bd = BD$: so hat man das symmetisrische Viereck $abcd$, welches mit dem gegebenen Dreieck gleichen Inhalt aber kleineren Umfang hat. Denn vermöge der Construction und zufolge §. 1. ist Inhalt $\triangle BAD = \triangle bad$, aber im Allgemeinen $ab + ad < AB + AD$; eben so $\triangle BCD = \triangle bcd$, und $cb + cd < CB + CD$; mithin ist Inhalt $\triangle ABC =$ Inhalt $abcd$, aber $ab + bc + cd + da < AB + BC + CA$.

II. Durch eine neue Axe Y, welche zu der vorigen X senkrecht ist, wird das erhaltene Viereck $abcd$ auf gleiche Weise in ein anderes Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ verwandelt, welches bei gleichem Inhalte wiederum kleineren Umfang hat, als jenes, und welches in Rücksicht beider Axen symmetrisch, mithin gleichseitig oder eine Raute ist und den gegenseitigen Durchschnitt

der Axen, μ, zum Mittelpuncte hat. Also wird mittelst zweier nach einander folgender und zu einander senkrechter Axen X, Y jedes beliebige Dreieck ABC in eine Raute $\alpha\beta\gamma\delta$ von gleichem Inhalte, aber kleinerem Umfange, verwandelt. Es kann aber auch mittelst der ersten Axe X allein das Dreieck ABC in eine Raute verwandelt werden; denn wenn z. B. der Umfang desselben durch das Perpendikel Be gehälftet wird, so dafs $BA+AD = BC+CD$, so ist $abcd$ eine Raute.

III. Es sei ferner das gegebene Vieleck V etwa ein Sechseck $ABCDEF$ (Fig. 30.), so wird dasselbe, durch ein gleiches Verfahren, mittelst der Axe X in ein symmetrisches Zehneck $abf_1ce_1dec_1fb_1$ verwandelt, welches, vermöge der correspondirenden Dreiecke und Paralleltrapetze, zufolge (§. 1. u. §. 2.), gleichen Inhalt, aber kleineren Umfang hat, als jenes. — Es ist klar, dafs durch eine neue, zu X senkrechte Axe Y das eben erhaltene Zehneck, im Allgemeinen, in ein 16Eck verwandelt wird, welches, bei gleichem Inhalte, abermals kleineren Umfang hat, und welches in Rücksicht beider Axen X, Y symmetrisch ist, also deren Durchschnitt zum Mittelpuncte hat.

IV. Gleicherweise wird jedes gegebene Vieleck V, von irgend einer Anzahl n Seiten, mittelst einer ersten Axe X_1 in ein symmetrisches Vieleck V_1 von gleichem Inhalte, aber kleinerem Umfange verwandelt, welches, im Allgemeinen und höchstens, $2n-2$ Seiten hat; ferner mittelst einer zweiten beliebigen Axe X_2 in ein symmetrisches Vieleck V_2 von höchstens $2(2n-2)-2$ Seiten; und fährt man so fort, so gelangt man mittelst der $x$ten willkürlichen Axe X_x zu einem symmetrischen Vieleck V_x von höchstens $2^x(n-2)+2$ Seiten, welches bei gleichem Inhalte kleineren Umfang hat, als jedes der vorhergehenden. — Wenn insbesondere die zweite Axe X_2 zu der ersten X_1 senkrecht ist, so hat das Vieleck V_2 einen Mittelpunct M und zwei zu einander rechtwinklige Symmetral-Axen (X_2 und X_1), aber höchstens nur $2(2n-4)$ Seiten, und alsdann hat auch jedes folgende Vieleck V_3, V_4, ... V_x einen Mittelpunct M und zwei zu einander senkrechte Symmetral-Axen, man mag die späteren Axen X_3, X_4, ... X_x annehmen, wie man will, was leicht zu sehen ist.

§. 4. Diese Beispiele zeigen, dafs durch Wiederholung desselben Verfahrens jedes gegebene convexe Vieleck V sich in ein anderes Vieleck V_x von gleichem Inhalte, aber kleinerem Umfange, verwandeln läfst, welches so viele Seiten haben kann, als man will. Wird aber die Zahl

der Seiten sehr grofs, oder unendlich grofs gedacht, so mufs, da der Umfang nicht wächst, sondern schwindet, jede Seite einzeln sehr klein, oder unendlich klein werden und mithin der Umfang des Vielecks V_x irgend einer Curve sehr nahe, oder unendlich nahe, kommen. Da in gleichem Sinne jede gegebene Curve V als Vieleck von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten angesehen werden kann, so folgt, dafs dieselbe, durch das nämliche Verfahren, mittelst einer beliebigen Axe X_1, sich in eine andere Curve V_1 von gleichem Inhalte, aber kleinerem Umfange, verwandeln läfst, welche in Rücksicht der Axe X_1 symmetrisch ist. Eben so gelangt man mittelst einer zweiten, zu X_1 senkrechten, Axe X_2 zu einer Curve V_2 von abermals kleinerem Umfange, aber demselben Inhalte, welche zwei zu einander senkrechte Symmetral-Axen X_1, X_2 und daher einen Mittelpunct M hat. Durch fernere beliebig gewählte Axen X_3, X_4, ... entstehen neue Curven V_3, V_4, ..., welche, bei gleichem Inhalte, nach der Reihe immer kleineren Umfang haben, und wovon jede einen Mittelpunct und irgend zwei zu einander rechtwinklige Symmetral-Axen hat; auch näheren sich dadurch die Durchmesser der Curve offenbar immer mehr der Gleichheit, d. h. der Unterschied zwischen dem kleinsten und gröfsten Durchmesser (welche allemal die genannten zwei Axen sind) wird immer kleiner, indem durch die Verwandlung, wie auch die neue Axe gewählt werden mag (nur nicht einer der vorigen parallel), der gröfste Durchmesser verkleinert und der kleinste vergröfsert wird, wie leicht zu sehen. Durch zweckmäfsige Wahl der neuen Axen können jedoch die Durchmesser rascher der Gleichheit näher gebracht werden *).

Demnach kann jede geschlossene convexe Figur V, mag sie von geraden oder krummen, oder geraden und krummen Linien begrenzt sein, mit Beibehaltung ihres Inhaltes, so lange verwandelt und dadurch ihr Umfang verkleinert werden, als dieselbe nach irgend einer Richtung keine Symmetral-Axe hat. Hätte aber die Figur nach jeder beliebigen Rich-

*) So z. B. kann auf diese Weise eine gegebene Ellipse V mittelst einer einzigen Axe X in einen Kreis V_1 verwandelt werden, dessen Durchmesser alle einander gleich, und welcher unzählige Paare zu einander rechtwinklige Symmetral-Axen hat. Nämlich sind a, b die halben Axen der Ellipse, so construire man die Gerade $r = \sqrt{(ab)}$, trage dieselbe als Halbmesser in die Ellipse ein, und nehme sofort X zu diesem Halbmesser senkrecht an, so wird die neue Figur V_1 ein Kreis sein. Da r nach zwei verschiedenen Richtungen sich als Halbmesser in die Ellipse eintragen läfst, so kann auch die Axe X in zwei verschiedenen Richtungen der Forderung genügen.

tung eine Symmetral-Axe, oder würde dieser Zustand nach einigen Verwandlungen herbeigeführt, so bliebe sofort bei allen folgenden Verwandlungen der Umfang sowohl als der Inhalt constant, oder vielmehr fände keine eigentliche Verwandlung mehr statt, sondern die neue Figur (V_1) würde stets mit der alten (V) congruent sein. Eine solche Figur aber, die nach allen Richtungen Symmetral-Axen hat, mufs nothwendig einen Mittelpunct M haben, in welchem sich alle Axen schneiden; denn derselbe wird, nach dem Obigen, schon durch irgend zwei zu einander senkrechte Axen bedingt. Ferner müssen alle Axen oder Durchmesser der Figur einander gleich sein. Denn sind z. B. X_1, X_2 (Fig. 31.) zwei beliebige Axen derselben und X diejenige dritte, welche mit jenen gleiche Winkel bildet, $\alpha = \beta$, so mufs dem Endpuncte A der Axe X_1 in Bezug auf die Axe X ein solcher Punct C entsprechen, welcher sowohl im Umfange der Figur V, als in der Axe X_2 liegt, folglich mufs C der Endpunct der Axe X_2 sein; daher sind ferner die halben Axen MA, MC und mithin auch die ganzen AB, CD einander gleich. Demzufolge giebt es nur eine einzige solche Figur, welche nach jeder Richtung eine Symmetral-Axe hat, und dieselbe ist der Kreis.

§. 5. Aus der vorstehenden Betrachtung schliefst man, unter andern, den folgenden

Hauptsatz.

„Unter allen Figuren von gleichem Inhalte hat der Kreis den kleinsten Umfang;" und umgekehrt: *„unter allen Figuren von gleichem Umfange hat der Kreis den gröfsten Inhalt."*

Denn man denke sich diejenige Figur V, welche bei irgend einem bestimmten Inhalte den möglichst kleinsten Umfang habe: so mufs dieselbe nach allen Richtungen symmetrisch sein. Denn wäre sie es nach irgend einer Richtung nicht, so liefse sie sich, mittelst einer nach dieser Richtung gezogenen Axe X, in eine andere Figur V_1 verwandeln, welche denselben Inhalt, aber kleineren Umfang hätte; dann aber würde eine dritte Figur V', welche der zweiten V_1 ähnlich und mit der ersten V gleichen Umfang hätte, offenbar gröfseren Inhalt haben, als die zweite, also $V' > V_1$ und also auch $V' > V$, was der Annahme widerspräche; daher mufs V nach allen Richtungen symmetrisch, und folglich der Kreis sein.

Der umgekehrte Satz folgt, nach bekannter Art, indirect aus dem ersten.

§. 6. Aus dem vorstehenden Hauptsatze lassen sich, wie schon Eingangs erwähnt worden, eine sehr grofse Reihe von Aufgaben und Sätzen über Maximum und Minimum, welche bei ebenen Figuren unter mannichfaltigen Bedingungen statt finden, meist fast unmittelbar beantworten und als blofse Zusätze herleiten, was ich bei einer anderen Gelegenheit ausführlich nachweisen werde. Uebrigens kann der Hauptsatz, unter andern, noch auf zwei Arten einfach bewiesen werden, wovon die eine Art, aufser ihrer Strenge, sich dadurch auszeichnet, dafs sie auf analoge Weise auch für die sphärischen Figuren statt findet.

§. 7. In Bezug auf die obige Betrachtung (§. 4.) läfst sich hier noch fragen:

„Welche Form kann eine Figur V möglicherweise haben, wenn „sie zwei Symmetral-Axen X, Y hat, die sich unter einem beliebigen ge„gebenen Winkel α schneiden, und von denen jede dem Umfange der Fi„gur nur in zwei Puncten begegnet?"

Die Erörterung dieser Frage liefert folgendes Ergebnifs. Die Figur hat, aufser den beiden gegebenen X und Y, im Allgemeinen noch mehr Symmetral-Axen X_1, Y_1, X_2, Y_2, ... und zwar entweder 1) eine bestimmte endliche Anzahl, oder 2) unendlich viele, je nachdem nämlich beziehlich $\alpha:\pi$ *commensurabel* oder *incommensurabel* ist.

I. Wenn $\alpha:\pi$ commensurabel, etwa $=1:m$, wo m irgend eine ganze Zahl ist (wäre $\alpha:\pi=n:m$, und n ebenfalls eine ganze Zahl >1, so würden in Bezug auf alle Axen, X und Y nicht unmittelbar aufeinander folgen, sondern es lägen $n-1$ andere Axen zwischen ihnen), so hat die Figur V im Ganzen m Symmetral-Axen, die sich in demselben Puncte M schneiden, und deren Abschnitte nach der Reihe um den Punct M herum genommen, abwechselnd einander gleich sind. Der Umfang der Figur besteht aus $2m$ gleichen Theilen, nämlich zwischen den nach gleicher Seite hin liegenden Endpuncten je zweier unmittelbar auf einanderfolgender Axen liegt ein solcher Umfangstheil; diese Theile bleiben unbestimmt, d. h. einer derselben kann willkührlich angenommen werden, kann eine beliebige Linie oder Curve sein, und dann sind alle andern durch ihn bestimmt. Im übrigen sind dabei noch zwei Fälle zu unterscheiden, ob m *gerade* oder *ungerade* ist.

1. Wenn m gerade, so ist M Mittelpunct der Figur V, und die m Axen sind abwechselnd einander gleich.

2) Ist m ungerade, so sind alle Axen einander gleich, die Abschnitte aber, in welche sie durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunct M getheilt werden, sind nach ihrer Aufeinanderfolge abwechselnd einander gleich.

II. Wenn $\alpha:\pi$ incommensurabel, so hat die Figur V unendlich viele Symmentral-Axen, so dafs nothwendig nach jeder beliebigen Richtung eine solche statt findet, woraus man schliefst, dafs in diesem Falle die Figur nur *der Kreis* sein kann.

Von den Körpern.

§. 8. Fundamentalsatz. *Wenn von einer dreiseitigen Pyramide die eine Kante, die daran liegenden zwei Seitenflächen, so wie deren Flächenwinkel der Gröfse nach gegeben sind, so ist die Summe der beiden übrigen Seitenflächen dann ein Minimum, wenn dieselben zu jeder der ersteren, für sich betrachtet, unter gleichen Winkeln geneigt, und mithin einander gleich (congruent) sind.* Oder mit andern Worten:

„Eine beliebige dreiseitige Pyramide $ABCD$ (Fig. 32.) *läfst sich in eine andere $abcd$ mit einer gleichen Kante ($ab = AB$), gleich grofsen daran liegenden Seitenflächen und gleichem anliegenden Flächenwinkel verwandeln, in welcher die Summe der beiden übrigen Seitenflächen kleiner ist, als in jener, und welche eine Symmetral-Ebene hat, die nämlich die genannte Kante ab hälftet, auf ihr senkrecht steht und durch die zwei übrigen Ecken der Pyramide geht."*

Beweis. Man bezeichne die unbegrenzte Gerade, in welcher die gegebene Kante AB liegt, durch P, und denke sich durch die Ecken C, D die unbegrenzten Geraden Q, R parallel mit P: so können die Kante AB und die Ecken C, D beziehlich in diesen Geraden P, Q, R angenommen werden, wo man will, die Pyramide wird immer alle gegebenen Elemente enthalten und stets denselben Inhalt haben.

In P sei $ab = AB$ und m sei die Mitte von ab, also $ma = mb$. Die Ebene X, welche in m auf P senkrecht, treffe die zwei andern Geraden Q und R, zu welchen sie gleichfalls senkrecht ist, in c und d; so wird die Pyramide $abcd$ alle gegebenen Elemente enthalten und nach der Behauptung des Satzes die Eigenschaft haben, dafs die Summe der zwei Seitenflächen $acd + bcd$ ein Minimum ist. Aus der Construction

folgt, — da nämlich die Dreiecke acd, bcd einander gleich und ihre Ebenen mit der Ebene X gleiche Winkel bilden, — dafs die in den Puncten a, b auf die Flächen acd, bcd errichteten Perpendikel ax, bx einander in einem Puncte x treffen müssen, der in der Ebene X liegt, und dafs $ax = bx = r$ ist. Betrachtet man die vier Pyramiden, welche den Punct x zur gemeinschaftlichen Spitze und die vier Seitenflächen der Pyramide $abcd$ beziehlich zu Grundflächen haben, so kann die letztere, wie man sieht, durch jene wie folgt ausgedrückt werden:

$$abcd = xacd + xbcd - xabc - xabd.$$

Hält man die Kante ab fest, läfst dagegen die Ecken c, d in den zugehörigen festen Geraden Q, R beliebig rücken, bezeichnet sie in der neuen Lage durch c_1, d_1, so hat die neue Pyramide abc_1d_1 alle gegebenen Elemente, und es mufs gezeigt werden, dafs die Flächensumme $ac_1d_1 + bc_1d_1 > acd + bcd$. Da gleicherweise, wie vorhin,

$$abc_1d_1 = xac_1d_1 + xbc_1d_1 - xabc_1 - xabd_1,$$

und da von diesen fünf Pyramiden die erste, vierte und fünfte beziehlich den vorigen an Inhalt gleich sind, so mufs auch

$$xac_1d_1 + xbc_1d_1 = xacd + xbcd$$

sein. Diese zwei Paar Pyramiden haben die obigen zwei Paar Flächen, deren Summen verglichen werden sollen, zu Grundflächen. Die Pyramiden $xacd$, $xbcd$ haben gleiche Höhe, nämlich $xa = xb = r$, und offenbar ist dieselbe gröfser als die Höhe jeder der beiden Pyramiden xac_1d_1, xbc_1d_1, weil deren Grundflächen ac_1d, bc_1d_1 nicht auch zu den festen Strahlen xa, xb senkrecht sein können; daher mufs nothwendig die Summe der Grundflächen bei den letztern zwei Pyramiden gröfser sein, als bei den zwei erstern. Oder, um diesen Schlufs anschaulicher zu machen, bezeichne man die Höhen der Pyramiden xac_1d_1, xbc_1d_1, da dieselben kleiner als r sind, durch $r-u$, $r-v$, so hat man, nach der letzten Gleichung:

$$(r-u)ac_1d_1 + (r-v)bc_1d_1 = r.acd + r.bcd,$$

daraus

$$r(ac_1d_1 + bc_1d_1 - acd - bcd) = u.ac_1d_1 + v.bc_1d_1$$

und folglich

$$ac_1d_1 + bc_1d_1 > acd + bcd,$$

was die Wahrheit des obigen Satzes bestätigt.

§. 9. ***Ist die Grundfläche einer vierseitigen Pyramide DAEFB (Fig. 32.) ein Paralleltrapez AEFB, dessen parallele Seiten AB, EF der Gröfse nach gegeben, und sollen diese Seiten und die Spitze D der Pyramide beziehlich in drei festen parallen Geraden P, S und R liegen, so bleibt der Inhalt der Pyramide constant, man mag die Elemente AB, EF, D in den festen Geraden P, S, R annehmen, wo man will; hingegen ist die Summe der beiden Seitenflächen, ADE + BDF, welche die nicht gegebenen Seiten (AE, BF) der Grundfläche zu Grundlinien haben, dann ein Minimum, wenn die Pyramide daefb eine Symmetral-Ebene X hat, d. h., wenn die Ebene, welche durch die Spitze d der Pyramide und durch die Mitten m, m_1 der gegebenen parallelen Kanten ab, ef geht, auf diesen Kanten senkrecht steht.***

Dieser Satz folgt, wie der bloſse Anblick der Figur zeigt, leicht aus dem vorhergehenden Satze. Denn die gegenwärtige vierseitige Pyramide *DAEFB* kann im Allgemeinen als ein bestimmter constanter Theil von der vorigen dreiseitigen Pyramide *DABC* angesehen werden, wobei dann die Summe der beiden Seitenflächen *ADE + BDF*, deren Minimum hier bestimmt werden soll, ebenfalls zu der Summe der Seitenflächen, *ADC + BDC*, welche dort betrachtet worden, ein bestimmtes constantes Verhältniſs hat, so daſs also beide Summen zugleich, und zwar unter der nämlichen Bedingung, ihr Minimum erreichen.

§. 10. ***Sind die parallelen Kanten AB, EF, GH eines schief-abgeschnittenen dreiseitigen Prismas AEGHFB (Fig. 32.) der Gröfse nach gegeben, und sollen dieselben beziehlich in drei festen Geraden P, S, T liegen, so bleibt der Inhalt des Prismas constant, man mag die Kanten in den festen Geraden annehmen, wo man will, hingegen ist die Summe der beiden Grundflächen, AGE + BHF, dann ein Minimum, wenn das Prisma, wie etwa aeghfb, eine Symmetral-Ebene X hat, d. h., wenn die Ebene, welche durch die Mitten m, m_1, m_2 der gegebenen parallelen Kanten ab, ef, gh geht, auf diesen senkrecht steht.***

Auch dieser Satz folgt, wie leicht zu sehen, ähnlicherweise wie der vorige fast unmittelbar aus dem obigen Fundamentalsatze (§. 8.). — Wenn insbesondere von den drei gegebenen Kanten irgend zwei, oder alle drei einander gleich sind, so folgt aus anderen Gründen leicht, daſs auch für diesen Fall der Satz unter den nämlichen Bedingungen statt findet. Glei-

ches gilt von dem vorhergehenden Satze (§. 9.), wenn die beiden gegebenen Kanten einander gleich sind.

Anmerkung. Es kann noch bemerkt werden, dafs auch für das $n$seitige schiefabgeschnittene Prisma, wenn dessen parallele Kanten gegeben und in festen Geraden liegen sollen, der Satz auf analoge Weise statt findet, nämlich: dafs die Summe der beiden Grundflächen dann ein Minimum ist, wenn die Ebene, welche durch die Mitten jener Kanten geht, auf denselben senkrecht steht und mithin eine Symmetral-Ebene des Prismas ist. Denn auch hier bleibt der Inhalt des Prismas constant, wenn die gegebenen Kanten in den festen Geraden verrückt werden; jedoch ist durch die Lage je dreier Kanten, die Lage aller übrigen bestimmt. Man schliefst daraus weiter, dafs der Satz auch für einen beliebigen Cylinder gültig sei, wenn nämlich in irgend drei Geraden, welche in der Cylinderfläche liegen, (etwa P, S, T), drei Kanten (AB, EF, GH) des Cylinders gegeben sind.

§. 11. Mittelst der vorstehenden drei Hülfssätze (§. 8—10.) läfst sich jeder beliebige gegebene convexe Körper K unter Beibehaltung seines Inhaltes in einen andern Körper K_1 verwandeln, welcher kleinere Oberfläche hat, und welcher in Bezug auf irgend eine Ebene X symmetrisch ist. Die Verwandlung geschieht auf ganz analoge Weise, wie oben bei den ebenen Figuren (§. 3.), nur kann sie nicht ebenso bequem durch Zeichnung veranschaulicht werden. Daher begnüge ich mich, das Verfahren durch folgende Beschreibung anzudeuten.

Es sei z. B. irgend ein convexes Polyeder K gegeben. Aus den Ecken desselben fälle man auf eine beliebig gewählte Ebene X Perpendikel, durch diese Perpendikel, in bestimmter Ordnung paarweise genommen, lege man Ebenen: so wird durch die letzteren das Polyeder K in solche Stücke zerschnitten, welche, im Allgemeinen, nur von dreierlei Art sind, nämlich nur Körper solcher Art, die den Gegenstand der obigen drei Sätze ausmachen; und zwar vertreten die Perpendikel hier die Stelle der dortigen festen Geraden $P, Q, R, S, T, \ldots$; die veränderlichen Seitenflächen der gegenwärtigen Körper sind Theile der Oberfläche des gegebenen Polyeders K, so dafs die Summe aller jener Seitenflächen gerade aus dieser Oberfläche besteht, oder ihr gleich ist. Werden nun alle diese Körpertheile — jeder zwischen den zugehörigen drei Perpendikeln, als feste Gerade angesehen — in solche umgewandelt, welche die angenommene feste

Ebene X zur Symmetral-Ebene haben, so bilden sie zusammen ein neues Polyeder K_1, welches mit dem gegebenen K gleichen Inhalt, aber offenbar kleinere Oberfläche hat, als dieses, indem nämlich seine Oberfläche die Summe jener veränderlichen Seitenflächen gerade für den besonderen Fall repräsentirt, wo von den letzteren, zufolge der obigen Sätze, die Summe je zweier zusammengehöriger ihr Minimum erreicht. Das neue Polyeder K_1 hat demnach eine Symmetral-Ebene X und nothwendigerweise im Allgemeinen mehr Ecken und mehr Seitenflächen, als das gegebene Polyeder K. Die Vermehrung der Ecken und Seitenflächen hängt nämlich, wie man bemerken wird, von denjenigen Perpendikeln ab, welche durch das Innere des Polyeders K gehen, die also aufser einer Ecke, auch noch irgend eine Seitenfläche desselben treffen; durch jedes solche Perpendikel nimmt die Zahl der Ecken um eine Einheit zu, und zwar auch in dem Falle, wo das Perpendikel eine Kante trifft, oder in einer Seitenfläche liegt; geht aber das Perpendikel insbesondere durch zwei Ecken, oder geht es nicht durch das Innere des Polyeders K, sondern nur durch eine Ecke desselben, so bewirkt es keine Vermehrung der Ecken. Die Zahl der Seitenflächen vermehrt sich rascher, nämlich durch jedes Perpenpendikel, welches eine Seitenfläche des Polyeders K trifft, kann sie um zwei oder mehr Einheiten zunehmen.

Auf gleiche Weise kann nun ferner das Polyeder K_1 mittelst einer neuen beliebigen Ebene Y in ein anderes Polyeder K_2 verwandelt werden, welches bei gleichem Inhalte abermals kleinere Oberfläche, dagegen mehr Ecken und mehr Seitenflächen hat, und welches in Bezug auf die Ebene Y symmetrisch ist. Eben so läfst sich dieses neue Polyeder K_2 wiederum verwandeln, wobei der Inhalt constant bleibt, dagegen die Oberfläche sich verkleinert, die Zahl der Ecken und Seitenflächen aber sich vermehrt, und wo das neu entstandene Polyeder K_3 gleichfalls eine Symmetral-Ebene hat; u. s. w.

Wird insbesondere die zweite Hülfs-Ebene Y zu der ersten X senkrecht angenommen, und wird die Durchschnittslinie beider Ebenen durch z bezeichnet, so ist das (dritte) Polyeder K_2 in Bezug auf beide Ebenen X, Y zugleich symmetrisch, so dafs z eine Symmetral-Axe desselben ist, d. h. dafs jede zu z senkrechte Gerade ab, welche der Oberfläche des Polyeders in irgend einem Puncte a begegnet, dieselbe noch in einem andern Puncte b trifft und die Strecke ab durch die Axe z gehälftet wird.

Durch eine dritte Ebene Z, welche zu den beiden vorigen, oder zu der Axe z, senkrecht ist, erhält man ein neues Polyeder K_3, welches in Bezug auf jede der drei Ebenen X, Y, Z symmetrisch ist, deren Durchschnittslinien z, y, x zu Symmetral-Axen, so wie deren gemeinschaftlichen Durchschnittspunct M zum Mittelpunct hat. Wird nun das Polyeder K_3, mittelst beliebiger Ebenen, weiter verwandelt, so hat es sofort stets einen Mittelpunct M, so wie irgend drei zu einander senkrechte Symmetral-Ebenen, die sich in demselben schneiden, und drei Symmetral-Axen, welche die Durchschnittslinien dieser Ebenen sind.

Da durch wiederholtes Verwandeln das Polyeder so viele Seitenflächen und Ecken erhalten kann, als man will, die Oberfläche aber stets schwindet, so müssen nothwendig die einzelnen Seitenflächen zuletzt sehr klein werden, so dafs die Oberfläche sich irgend einer krummen Fläche nähert, und endlich einer solchen sehr nahe, oder wie man sagt, unendlich nahe kommt. Wird in gleichem Sinne eine beliebige convexe krumme Oberfläche als aus unendlich kleinen ebenen Theilchen bestehend angesehen, so läfst sich der Körper, der von derselben umschlossen wird, offenbar auf die nämliche Weise in einen andern, symmetrischen Körper von kleinerer Oberfläche verwandeln.

Mag demnach die Oberfläche eines gegebenen convexen Körpers K beschaffen sein, wie man will, aus ebenen Flächen, oder aus einer einzigen krummen, oder aus ebenen und krummen Flächen bestehen: so läfst sich derselbe nach obiger Art so lange verwandeln und dadurch, unter Beibehaltung des Inhaltes, seine Oberfläche verkleinern, als er nicht nach allen Richtungen Symmetral-Ebenen hat. Wenn aber der Körper nach einigen Verwandlungen diesen Zustand erreicht, wo er nach jeder beliebigen Richtung eine Symmetral-Ebene hat*), oder wenn er sich schon

*) Z. B. ein beliebiges Ellipsoid K kann durch zwei nach einander folgende Verwandlungen in den bezeichneten Zustand gebracht, nämlich in eine Kugel K_2 verwandelt werden. Es seien a, b, c die halben Axen des Ellipsoids nach der Ordnung ihrer Gröfse, wo a die gröfste. Man denke oder verschaffe sich die Gerade $r = \sqrt[3]{(abc)}$, trage dieselbe als Halbmesser in das Ellipsoid K ein, was nach unendlich vielen verschiedenen Richtungen geschehen kann, nehme sofort die Hülfs-Ebene X zu diesem Halbmesser r senkrecht an und verwandle K: so ist der neue Körper K_1 gleichfalls ein Ellipsoid, wovon man sich leicht überzeugen wird, und zwar fällt offenbar eine Axe desselben auf den Halbmesser r, und ihre Hälfte ist diesem gleich. Sind a_1, b_1, c_1 die halben Axen des Ellipsoids K_1, so ist, vermöge des constanten Inhaltes, $abc = a_1 b_1 c_1 = r^3$; daher kann r nur der halben mittleren Axe b_1 gleich sein, also $r = b_1 = \sqrt{(a_1 c_1)}$. Nun denke man sich denjenigen Hauptschnitt des Ellipsoids

Anfangs in diesem Zustande befindet, so hört die Verwandlung auf, nämlich so bleibt die Oberfläche sowohl als der Inhalt, mithin der Körper selbst constant. Ein solcher Körper aber, welcher nach allen Richtungen Symmetral-Ebenen (und somit auch Symmetral-Axen) hat, besitzt nothwendigerweise einen Mittelpunct und es müssen alle seine Durchmesser einander gleich sein, woraus folgt, dafs es nur einen einzigen solchen Körper geben kann, und dafs dieser die Kugel ist.

§. 12. Aus der vorstehenden Betrachtung schliefst man zunächst folgenden

Hauptsatz.

„Unter allen Körpern von gleichem Inhalte hat die Kugel die kleinste Oberfläche;" und umgekehrt: *„unter allen Körpern von gleicher Oberfläche hat die Kugel den kleinsten Inhalt."*

Der Beweis dieses Satzes ist deutlich in dem Vorhergehenden enthalten, bedarf also keiner Wiederholung, die indessen auf analoge Weiso geschehen könnte, wie bei dem obigen Hauptsatze (§. 5.).

§. 13. Aehnlicherweise, wie so eben auf Körper im Allgemeinen (§. 12.), kann auch auf solche Körper insbesondere geschlossen werden, welche zwischen bestimmten gegebenen Grenzen sich befinden, oder sonstigen Bedingungen unterworfen sind, wie z. B. auf prismatische oder pyramidalische Körper von gleicher Höhe und gleichem Inhalte oder gleicher Summe der Seitenflächen. Für diese genannten Körper tritt in Hinsicht der obigen Verwandlung (§. 11.) die Beschränkung ein, dafs die Hülfs-Ebenen X, Y, ... sämmtlich zu der Grundfläche des Körpers senkrecht

---

K_1, welcher durch die gröfste und kleinste Axe desselben geht, der also eine Ellipse ist, welche mit K_1 die halben Axen a_1, c_1 gemein hat, trage in diese Ellipse wiederum die Gerade r als Halbmesser ein, nehme die Hülfs-Ebene darauf senkrecht an, und verwandle mittelst derselben K_1: so wird der neue Körper K_2 eine Kugel sein, die der obigen Forderung genügt. — Die Richtigkeit dieser Angaben ist leicht zu bestätigen.

Wenn demnach ein gegebenes Ellipsoid K_1 insbesondere so beschaffen ist, dafs das Quadrat der mittleren Axe gleich dem Rechteck der beiden übrigen Axen, oder $b_1^2 = a_1 c_1$: so kann dasselbe mittelst einer einzigen, gehörig gewählten Ebene Y in eine Kugel verwandelt werden.

Um den Spielraum der verschiedenen Richtungen, nach welchen die Gerade r sich als Halbmesser in das beliebige Ellipsoid K eintragen läfst, anzuschauen, denke man sich die mit dem letzteren concentrische Kugelfläche, welche r zum Radius hat; die beiden Oberflächen werden einander in einer Curve von doppelter Krümmung schneiden, durch welche zugleich eine mit jenen concentrische Kegelfläche zweiten Grades geht — und diese ist, wie man sieht, der Ort des Halbmessers r.

sein müssen; aufserdem aber können sie beliebige Richtung haben. Bei den prismatischen Körpern kann jedoch eine einzige besondere Hülfs-Ebene mit den beiden Grundflächen parallel sein, und zwar ist es diejenige, die von den beiden letzteren gleich weit entfernt. Für die beiden Arten von Körpern ergeben sich aus der obigen Betrachtung, wie man leicht bemerken wird, folgende zwei Sätze:

I. *Unter allen prismatischen Körpern von gleicher Höhe und gleichem Inhalte hat der gerade Cylinder die kleinste Seitenfläche.*" Und umgekehrt: *„Unter allen prismatischen Körpern von gleicher Höhe und gleicher Seitenfläche hat der gerade Cylinder den gröfsten Inhalt.*"

II. *„Der gerade Kegel besitzt die doppelte Eigenschaft, dafs er unter allen pyramidalischen Körpern von gleicher Höhe, bei gleichem Inhalte die kleinste Seitenfläche, und bei gleicher Seitenfläche den gröfsten Inhalt hat.*"

§. 14. In Rücksicht auf die obige Betrachtung (§. 11.) ist hier ähnlicherweise, wie (§. 7.), die folgende Frage zu stellen:

„Welche Gestalt kann ein Körper K möglicherweise haben, wenn er zwei oder drei beliebige gegebene Symmetral-Ebenen hat, und wenn die Durchschnittslinie jeder dieser Ebenen mit der Oberfläche des Körpers von jeder beliebigen Geraden in nicht mehr als zwei Puncten getroffen wird?"

I. Hat der Körper K zwei Symmetral-Ebenen X, Y, die einen gegebenen Winkel α einschliefsen, und ist *Erstens* $\alpha:\pi$ *commensurabel*, etwa $=1:m$, so finden im Ganzen m Symmetral-Ebenen statt, die sich in einer und derselben Geraden z schneiden; die Durchschnitts-Figuren in diesen m Ebenen, so wie die Theile, in welche dieselben durch die Gerade z getheilt werden, sind auf entsprechende Weise einander gleich, wie bei der obigen Figur V (§. 7., I.) die m Axen und deren Abschnitte. Die Oberfläche des Körpers besteht aus $2m$ Theilen, wovon jeder durch zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Symmetral-Ebenen begrenzt wird; sie sind abwechselnd einander gleich, so dafs sie in zwei Abtheilungen zerfallen, deren jede m Theile umfafst, welche unter sich gleich sind; aufserdem sind die zur einen Abtheilung gehörigen Theile denen der anderen symmetrisch gleich. Im übrigen bleiben diese Theile unbestimmt, sie können beliebige Flächen zwischen jenen angegebenen Grenzen sein. Ist *Zweitens* $\alpha:\pi$ *incommensurabel*, so hat der Körper K unendlich viele Symmetral-Ebenen

die sich in einer einzigen Geraden z schneiden; alle Durchnitts-Figuren dieser Ebenen mit der Oberfläche des Körpers sind einander gleich und jede wird durch die Gerade z in zwei gleiche Theile getheilt, so dafs also die Oberfläche offenbar durch Umdrehung irgend einer Curve um die Axe z erzeugt wird; diese Curve aber bleibt, bis auf die vorausgesetzte Eigenschaft, dafs sie von irgend einer Geraden in nur zwei Puncten geschnitten werden kann, unbestimmt.

II. Hat ferner der Körper K irgend drei Symmetral-Ebenen X, Y und Z, welche einander paarweise X und Y, X und Z, Y und Z in drei Geraden z, y, x und unter gegebenen Winkeln α, β, γ schneiden, und welche zusammen nur einen Punct M gemein haben: so mufs, sobald von den drei Winkeln irgend zwei, etwa α und β, mit π incommensurabel sind, der Körper in Rücksicht zweier Axen z und y durch Umdrehung erzeugt (I. 2.) und daher nothwendig eine Kugel sein. Wenn aber nur einer der drei Winkel mit π incommensurabel ist, oder gar keiner, also alle drei mit π commensurabel, so werden doch, selbst in dem letzteren Falle, unter den drei Systemen von Symmetral-Ebenen, die beziehlich durch die Geraden z, y, x gehen, und welche durch die gegebenen Ebenen, die paarweise genommen mit dazu gehören, nach dem Vorigen (I., 1.) bestimmt werden, im Allgemeinen irgend zwei Paare sich befinden, (wo nemlich die zwei Ebenen jedes Paars verschiedenen Systemen angehören), die sich unter Winkeln schneiden, welche mit π incommensurabel sind, so dafs also wiederum der Körper eine Kugel sein mufs. Nur wenige einzelne Fälle scheinen hierbei eine Ausnahme zu machen, wie namentlich die zwei, wo von den gegebenen drei Winkeln α, β, γ, 1) irgend zwei Rechte sind, und 2) wo jeder derselben $= \frac{1}{3}\pi$, oder, was bei näherer Ansicht auf dasselbe hinauskommt, wo der eine $= \frac{1}{2}\pi$ und jeder der beiden übrigen $= \frac{1}{3}\pi$. Also:

Wenn der Körper K drei beliebige Symmetral-Ebenen hat, die einander in drei Geraden schneiden, so ist er im Allgemeinen eine Kugel.

Berichtigung. Seite 284 Zeile 5 v. o. lese: der Inhalt desselben durch das Perpendikel Be gehälftet wird, so ist $abcd$ eine Raute; statt: „der Umfang etc." — Seite 285 Z. 11 v. u. ist „(welche allemal die genannten Axen sind)" wegzulassen, und Z. 9 v. u. lese: (nur nicht dem gröfsten oder kleinsten Durchmesser parallel); statt: „(nur nicht einer etc.)."

20.

Ueber die Biegung gewisser Flächen.

(Von Hrn. Dr. *Ferd. Minding* zu Berlin.)

Werden die rechtwinkligen Coordinaten einer krummen Fläche durch zwei veränderliche Gröfsen p und q ausgedrückt, so gilt bekanntlich für das Element (ds) einer auf jener befindlichen Curve die Formel: $ds^2 = E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2$, in welcher E, F, G Functionen von p und q sind, nämlich $E = \left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2$, $F = \frac{dx}{dp}\cdot\frac{dx}{dq} + \frac{dy}{dp}\cdot\frac{dy}{dq} + \frac{dz}{dp}\cdot\frac{dz}{dq}$, $G = \left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2$. Jede andere Fläche, deren Coordinaten sich durch solche Ausdrücke in p und q darstellen lassen, die wieder den obigen Werth des Linear-Elementes liefern, ist offenbar, wofern nämlich einerlei Werthe von p und q reelle Puncte beider Flächen geben, eine blofse Biegung der ersten. Denn alsdann ist, wegen der Gleichheit entsprechender Linear-Elemente, jedes Dreieck zwischen drei einander unendlich nahen Puncten der ersten Fläche congruent dem Dreiecke zwischen den drei entprechenden Puncten der zweiten; beide Flächen sind also aus denselben Elementar-Dreiecken in derselben Ordnung zusammengesetzt, wie der Begriff der Biegung fordert.

Bisher ist die Biegsamkeit nur bei den abwickelbaren Flächen nachgewiesen worden; hier soll gezeigt werden, dafs sie Statt findet bei allen Flächen, welche durch *Bewegung einer geraden Linie entstehen;* wovon man sich leicht auf folgende Weise überzeugt. Es seien a, a', a'', . . . , die unendlich nahe auf einander folgenden Geraden, welche ein Stück (s) einer solchen Fläche bilden, so kann man, den ersten Streifen zwischen a und a' unbewegt lassend, den übrigen Theil von s um a', als feste Axe, unendlich wenig drehen; hierauf die Streifen aa' und $a'a''$ unbewegt lassend, den noch übrigen Theil von s um a'' drehen u. s. f., wodurch die Fläche gebogen wird, ohne die Länge irgend einer auf ihr befindlichen Linie zu ändern. Diese Biegung geschieht, wie man sieht, ganz auf dieselbe Weise, wie bei abwickelbaren Flächen; die bisherige Beschränkung auf diese ist mithin durchaus unwesentlich.

Auf der zu biegenden Fläche wähle man eine beliebige Curve, welche sämmtliche die Fläche erzeugenden Geraden schneide; sie mag Leitcurve heifsen. Es sei A ihr Durchschnitt mit einer jener Geraden, B ein beliebiger Punct in dieser; der Abstand des Punctes B von A heifse q; u', v', w' seien die Cosinus der Neigungen der Geraden AB gegen die Axen; u, v, w seien die Coordinaten von A, x, y, z die von B; so hat man:

$$1. \quad x = u + qu', \quad y = v + qv'; \quad z = w + qw'.$$

Die Gröfsen u, v, w, u', v', w' sind unabhängig von q und Functionen einer anderen Veränderlichen p. Man hat zunächst:

$$2. \quad u'^2 + v'^2 + w'^2 = 1.$$

Setzt man noch:

$$3. \quad du^2 + dv^2 + dw^2 = \alpha\, dp^2$$
$$4. \quad du\, du' + dv\, dv' + dw\, dw' = \beta\, dp^2$$
$$5. \quad du'^2 + dv'^2 + dw'^2 = \gamma\, dp^2$$
$$6. \quad u'\, du + v'\, dv + w'\, dw = \varepsilon\, dp$$

so sind α, β, γ, ε Functionen von p, und man erhält für das Linear-Element:

$$7. \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2 = (\alpha + 2\beta q + \gamma q^2)\, dp^2 + 2\varepsilon\, dp\, dq + dq^2.$$

Um sofort andere Flächen zu finden, welche das nämliche Linear-Element geben, wie die vorgelegte, setze man, zufolge (2.):

$$8. \quad u' = \cos\Phi \cos\psi, \quad v' = \cos\Phi \sin\psi, \quad w' = \sin\Phi.$$

Φ und ψ sind zwei neue veränderliche Gröfsen. Entwickelt man hieraus die Differentiale von u', v', w' und nimmt die Summe ihrer Quadrate, so kommt (nach 5.)

$$9. \quad d\Phi^2 + \cos\Phi^2 . d\psi^2 = \gamma\, dp^2.$$

Setzt man nun für Φ eine willkührliche Function von p, so ergiebt sich aus vorstehender Gleichung ψ in p ausgedrückt; mithin folgt aus (8.) ein System von Werthen von u', v', w', welches eine unbestimmte Function enthält. Um noch die zugehörigen Werthe von u, v, w zu finden, dienen die Gleichungen (3.), (4.), (6.). Es sei

$$10. \quad \begin{cases} A\, dp = v'\, dw' - w'\, dv', \\ B\, dp = w'\, du' - u'\, dw', \\ C\, dp = u'\, dv' - v'\, du', \end{cases}$$

mithin (wegen 8.)

$$11.\quad \begin{cases} A\,dp = \sin\psi\, d\Phi - \sin\Phi\cos\Phi\cos\psi\, d\psi, \\ B\,dp = -\cos\psi\, d\Phi - \sin\Phi\cos\Phi\sin\psi\, d\psi, \\ C\,dp = \cos\Phi^2 . d\psi, \end{cases}$$

und

$$12.\quad A^2 + B^2 + C^2 = \gamma.$$

Aus (4.) und (6.) nach einander dw, dv, du eliminirend erhält man:

$$13.\quad \begin{cases} A\,dv - B\,du = \varepsilon\, dw' - \beta w'\, dp, \\ C\,du - A\,dw = \varepsilon\, dv' - \beta v'\, dp, \\ B\,dw - C\,dv = \varepsilon\, du' - \beta u'\, dp, \end{cases}$$

und hieraus durch Addition der Quadrate, mit Rücksicht auf (3.) und (12.)

$$\alpha\gamma\, dp^2 - (A\,du + B\,dv + C\,dw)^2 = (\varepsilon^2\gamma + \beta^2)\, dp^2,$$

oder $(\alpha - \varepsilon^2)\gamma - \beta^2 = g^2$ setzend:

$$14.\quad A\,du + B\,dv + C\,dw = g\,dp.$$

Die mit g^2 bezeichnete Gröfse ist entweder positiv oder, wenn die Fläche abwickelbar, Null. Ueberhaupt ist $\frac{-g^2}{(\alpha - \varepsilon^2 + 2\beta q + \gamma q^2)^2}$ das Krümmungsmaafs der hier betrachteten Flächen, welches sich aus dem von *Gaufs* in der Abhandlung über krumme Flächen entwickelten allgemeinsten Ausdrucke ergiebt. Aus (13.) und (14.) findet man zur Bestimmung von u, v, w;

$$15.\quad \begin{cases} du = \frac{1}{\gamma}(A g\, dp + \beta\, du' + \varepsilon\gamma u'\, dp), \\ dv = \frac{1}{\gamma}(B g\, dp + \beta\, dv' + \varepsilon\gamma v'\, dp), \\ dw = \frac{1}{\gamma}(C g\, dp + \beta\, dw' + \varepsilon\gamma w'\, dp). \end{cases}$$

Werden in (1.) für u, v, w die Werthe gesetzt, welche sich durch Integration der vorstehenden ergeben und für u', v', w' die Werthe aus (8.); so erhält man einen Ausdruck der Flächen, welche durch die hier vorausgesetzte Biegung der vorgelegten entstehen können.

Durch zweckmäfsige Wahl der Leitcurve läfst sich die obige Formel für das Linear-Element (7.) etwas vereinfachen. Wird anstatt der vorigen eine andere Leitcurve gewählt, so mufs für q ein Ausdruck von der Form $P + q$ gesetzt werden, in welchem P eine blofse Function von p ist, und q nunmehr in Bezug auf die neue Leitcurve dasselbe, wie vorhin für die erste, bedeutet. Es sei $(\alpha' + 2\beta' q + \gamma' q^2)\, dp^2 + 2\varepsilon'\, dp\, dq + dq^2$

der hieraus hervorgehende Werth von ds^2; so ist $\alpha' = \alpha + 2\beta P + \gamma P^2 + 2\varepsilon \frac{dP}{dp} + \left(\frac{dP}{dp}\right)^2$, $\beta' = \beta + \gamma P$, $\gamma' = \gamma$, $\varepsilon' = \varepsilon + \frac{dP}{dp}$. Man kann also insbesondere $P = -\frac{\beta}{\gamma}$ setzen, wodurch $\beta' = 0$ wird.

Es bietet sich die Frage dar, ob nicht unter den oben dargestellten unzähligen Biegungen einer Fläche, welche eine zusammengehörige Art der hier betrachteten Flächen bilden, eine als einfachste Fläche dieser Art eben so hervorzuheben sei, wie unter den abwickelbaren Flächen die Ebene. Nach der Analogie scheint für solche diejenige (stets mögliche) Biegung der gegebenen Fläche passend gewählt zu werden, durch welche die erzeugenden Geraden alle *einer Ebene parallel* werden. Ihren Ausdruck erhält man sofort aus obigen Formeln, indem man $\varphi = 0$ setzt; jene Geraden werden dann alle der Ebene xy parallel angenommen. Denkt man sich noch, der vorhergehenden Bemerkung gemäfs, die Leitcurve so gewählt, dafs $\beta = 0$, so wird für $\varphi = 0$: $d\psi = \sqrt{\gamma}.dp$, $u' = \cos\psi$, $v' = \sin\psi$, $w' = 0$, $A = 0$, $B = 0$, $C = \sqrt{\gamma}$, $du = \varepsilon u' dp$, $dv = \varepsilon v' dp$, $dw = \frac{\varepsilon\, dp}{\sqrt{\gamma}} = \sqrt{(\alpha - \varepsilon^2)}\, dp$, mithin sind die Gleichungen für die gesuchte Fläche folgende:

$$x = \int \varepsilon \cos\psi\, dp + q\cos\psi,$$
$$y = \int \varepsilon \sin\psi\, dp + q\sin\psi,$$
$$z = \int \sqrt{(\alpha - \varepsilon^2)}.dp.$$

Hier stellen die Werthe von x und y ein System von geraden Linien in einer Ebene dar, die alle eine Curve berühren, deren Coordinaten man findet, indem man $q = 0$ setzt. Bei abwickelbaren Flächen, also wenn $\alpha - \varepsilon^2 = 0$, entspricht diese Curve der Knotenlinie. Wenn aber $\alpha - \varepsilon^2$ nicht Null ist, errichte man über derselben als Grundlinie einen geraden Cylinder; alsdann kann man sich die gesuchte Fläche vorstellen als erzeugt durch eine Folge gerader Linien, welche diesen Cylinder, auf dessen Seite sie senkrecht stehen, in einer gewissen Curve berühren.

Es sei, um ein Beispiel der Biegung zu entwickeln, die Schraubenfläche (cochlea) vorgelegt. Wenn man ihre Axe als Leitcurve und zugleich als Axe der z annimmt, so ergiebt sich:

$$x = q\cos p, \quad y = q\sin p, \quad z = np.$$

Hieraus folgt $\alpha = n^2$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\varepsilon = 0$; mithin $ds^2 = (n^2+q^2)dp^2 + dq^2$. Ferner wird $g = n$, woraus man überhaupt für die Biegungen dieser Fläche folgenden Ausdruck erhält:

$$x = n\int A\,dp + q\cos\Phi\cos\psi,$$
$$y = n\int B\,dp + q\cos\Phi\sin\psi,$$
$$z = n\int C\,dp + q\sin\Phi.$$

A, B, C sind als Functionen von Φ und ψ durch die Gleichungen (11.) bestimmt; Φ ist eine willkührliche Function von p, und ψ folgt aus der Gleichung $d\Phi^2 + \cos\Phi^2 . d\psi^2 = dp^2$.

Setzt man z. B. $\Phi = \text{const.} = \mu$, so wird $dp = \cos\mu . d\psi$, und man erhält:

$$x = -n\sin\mu\cos\mu\sin\psi + q\cos\mu\cos\psi,$$
$$y = n\sin\mu\cos\mu\cos\psi + q\cos\mu\sin\psi,$$
$$z = n\cos\mu^2 . \psi + q\sin\mu.$$

ψ ist $= \frac{p}{\cos\mu} + h$, h eine neue Constante. Setzt man hier $q = 0$, so ergiebt sich, dafs die Axe der Schraubenfläche durch diese Biegung die Gestalt einer gewissen Schraubenlinie, befindlich auf einem Cylinder vom Halbmesser $n\sin\mu\cos\mu$, erhalten hat. Die hier dargestellte Biegung der Schraubenfläche entsteht dadurch, dafs man in jedem Puncte dieser Schraubenlinie ein Loth auf der Ebene ihres Krümmungskreises errichtet.

Um die Biegungen eines einfachen Hyperboloids zu finden, multiplicire man die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2}$$

mit

$$1 = \cos p^2 + \sin p^2,$$

so kommt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\cos p \pm \frac{z}{c}\sin p\right)^2 + \left(\sin p \mp \frac{z}{c}\cos p\right)^2;$$

mithin kann man setzen:

$$\frac{x}{a} = \cos p \pm \frac{z}{c}\sin p, \qquad \frac{y}{b} = \sin p \mp \frac{z}{c}\cos p.$$

Diese Gleichungen stellen, je nachdem man in ihnen die oberen oder die unteren Zeichen gelten läfst, das eine oder das andere der beiden Systeme von Geraden dar, welche bekanntlich das einfache Hyperboloid erzeugen. Da es hier nur auf eines derselben ankommt, nehme

man die oberen Zeichen, und setze, um noch q in seiner vorigen Bedeutung einzuführen,

$$\frac{z}{c} = \frac{q}{m} \quad \text{und} \quad m^2 = a^2 \sin p^2 + b^2 \cos p^2 + c^2;$$

so ergeben sich die Coordinaten des Hyperboloids durch p und q ausgedrückt, wie folgt:

$$x = a \cos p + \frac{a \sin p}{m} \cdot q,$$

$$y = b \sin p - \frac{b \cos p}{m} \cdot q,$$

$$z = \frac{c}{m} \cdot q,$$

und hieraus das Linear-Element auf dieser Fläche:

$$ds^2 = \left(m^2 - c^2 - \frac{2c^2(a^2-b^2)\sin p \cos p}{m} q + \frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 \cos p^2 + b^2 c^2 \sin p^2}{m^4} q^2\right) dp^2$$
$$- 2\frac{(m^2-c^2)}{m} dp\, dq + dq^2.$$

Mit Hülfe dieser Formel lassen sich unzählige Flächen herleiten, welche Biegungen des einfachen Hyperboloids sind; ich halte jedoch die Ausführung solcher Beispiele hier für unnöthig, da der fernere Gang der Rechnung oben hinreichend vorgezeichnet ist.

Eine später eingereichte Erweiterung dieses Aufsatzes bittet man am Schlusse dieses Heftes nachzusehen, da dessen Einrichtung nicht gestattete, sie nach dem Wunsche des Verf. hier noch anzufügen

21.

Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale.

(Von Herrn Dr. *Gudermann* zu Münster.)

(Fortsetzung der Abhandlung No. 1. im 1sten, No. 10. im 2ten und No. 15. im 3ten Hefte dieses Bandes.)

Sechster Abschnitt.

Von den Modular-Integralen der ersten Art.

§. 63.

Von den Modular-Integralen der ersten Art und den elliptischen Quadranten überhaupt.

Wenn man eine Modular-Function des Argumentes u oder $a \pm u$ mit ∂u multiplicirt und dann integrirt, so läfst sich das Integral jedesmal als eine Amplitude, nämlich entweder als ein hyperbolischer oder cyklischer Arcus darstellen, und es bieten diese Integrationen, welche im vorigen Abschnitte sehr ausführlich behandelt, und aus der Formel $\operatorname{am} u = \int_0 \operatorname{dn} u \, \partial u$ hergeleitet wurden, wenig oder gar keine Schwierigkeiten dar. Wenn wir aber das Quadrat einer Modular-Function des Argumentes u mit ∂u multipliciren, und die Integration versuchen, so kann dieselbe durch die bisherigen Hülfsmittel nicht gefunden werden, und es ist also die Wahl einer transcendenten Function erforderlich, welche, weil die Amplituden die Aushülfe versagen, an ihre Stelle treten mufs, und worauf nun die gesuchten Integrale zurückgeführt werden müssen.

Die drei Integrale $\int_0 \operatorname{sn}^2 u . \partial u$, $\int_0 \operatorname{cn}^2 u . \partial u$ und $\int_0 \operatorname{dn}^2 u . \partial u$ können sehr leicht auf einander zurückgeführt werden; wir nennen sie *Modular-Integrale der ersten Art*, und werden demnächst noch einige zu ihnen hinzufügen.

Da das Integral $\operatorname{am} u = \int_0 \operatorname{dn} u . \partial u$ unter den ihm ähnlichen das einfachste ist, so wählen wir jetzt ebenfalls das Integral $\int_0 \operatorname{dn}^2 u . \partial u$ zur Grundform, worauf die ihm ähnlichen zurückzuführen sind. Da die Rectification der ebenen Ellipsen von diesem Integrale abhängt, und durch dasselbe im Grunde ein Bogen einer Ellipse, wie wir nachher zeigen werden *), ausgedrückt wird, so setzen wir:

$$1. \quad \operatorname{el} u = \int_0 \operatorname{dn}^2 u . \partial u.$$

*) Diese, so wie einige andere geometrische Betrachtungen werden erst später geliefert werden, nachdem die Theorie beendet ist.

Die durch dieses Integral vorgestellte transcendente Function nennen wir *vorzugsweise das cyklische Modular-Integral der ersten Art.*

Wird $u = K$ gesetzt, so haben wir ein bestimmtes Integral, welches wir durch E bezeichnen. Hiernach ist:

$$2. \quad E = \int_0^K \mathrm{dn}^2 u . \partial u.$$

Die Gröfse $\mathrm{el} u$ hängt von dem Modul k und dem Argumente u zugleich ab, die Gröfse E hängt lediglich von dem Modul k ab.

Wird statt des Moduls k der conjugirte k' genommen, so dient die Bezeichnung

$$3. \quad \mathrm{el}' u = \int_0 \mathrm{dn}'^2 u . \partial u \text{ und } E' = \int_0^{K'} \mathrm{dn}'^2 u . \partial u.$$

Die Gröfsen E und E' nennen wir aus dem schon angeführten Grunde die den Moduln k und k' zugehörigen und insofern conjugirten *elliptischen Quadranten*, wodurch sie von den conjugirten Modular-Quadranten K und K' hinlänglich unterschieden werden.

Wird die Function $\mathrm{el} u$ auf das Argument $K - u$ bezogen, und also $K - u$ für u gesetzt, so setzen wir $\mathrm{elc} u = \mathrm{el}(K - u)$, und eben so ist $\mathrm{elc}' u = \mathrm{el}'(K' - u)$.

Setzt man in der Gleichung (1.) $-u$ für u, also $-\partial u$ für u, so hat man $\mathrm{el}(-u) = -\int_0 \mathrm{dn}^2 u . \partial u$ oder $\mathrm{el}(-u) = -\mathrm{el} u$.

Da $\mathrm{dn} u . \partial u = \partial \mathrm{am} u$ ist, so kann die Formel (1.) auch also dargestellt werden:

$$4. \quad \mathrm{el} u = \int_0 \mathrm{dn} u . \partial \mathrm{am} u.$$

Setzen wir $\mathrm{am} u = \Phi$, so ist also

$$\mathrm{el} u = \int_0 \partial \Phi . \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \Phi)}.$$

Nehmen wir hierin zuerst den Modul $k = 0$, so ist das Integral $\int_0 \partial \Phi = \Phi$, setzen wir aber $k = 1$, so ist das Integral $\int_0 \partial \Phi . \cos \Phi = \sin \Phi$, daher ist *das Modular-Integral* $\mathrm{el} u$ *immer zwischen den Grenzen* Φ *und* $\sin \Phi$, *oder also zwischen den Grenzen* $\mathrm{am} u$ *und* $\mathrm{sn} u$ *enthalten.*

Da immer $\Phi > \sin \Phi$, also auch $\mathrm{am} u > \mathrm{sn} u$ ist, so verkleinert sich also bei der Vergröfserung des Moduls k die Function $\mathrm{el} u$, wenn u ungeändert bleibt. Für den elliptischen Quadranten haben wir die Formel

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial \Phi . \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \Phi)}.$$

Der Quadrant E ist also immer zwischen den Grenzen $\frac{\pi}{2}$ und 1 enthalten, und er verkleinert sich also bei der Vergröfserung des Moduls.

§. 64.

Zurückführung aller cyklischen Modular-Integrale der ersten Art auf das einzige el u.

Da $\mathrm{dn}^2 u = 1 - k^2 . \mathrm{sn}^2 u$ ist, so ist $\int_0 \mathrm{dn}^2 u . \partial u = u - k^2 . \int_0 \mathrm{sn}^2 u . \partial u$, und also rückwärts

$$1. \quad \int_0 \mathrm{sn}^2 u . \partial u = \frac{u - \mathrm{el}\, u}{k^2}.$$

Da $\mathrm{dn}^2 u = k'^2 + k^2 \mathrm{cn}^2 u$ ist, so ist $\int_0 \mathrm{dn}^2 u . \partial u = k'^2 . u + k^2 \int_0 \mathrm{cn}^2 u . \partial u$, und also

$$2. \quad \int_0 \mathrm{cn}^2 u . \partial u = \frac{\mathrm{el}\, u - k'^2 . u}{k^2} = u - \frac{u - \mathrm{el}\, u}{k^2}.$$

Multiplicirt man die Gleichung $\frac{\partial^2 \log \mathrm{dn}\, u}{d u^2} = -\mathrm{dn}^2 u + \frac{k'^2}{\mathrm{dn}^2 u}$ mit ∂u und integrirt man, so erhält man:

$$-k^2 \mathrm{sn}\, u \,\mathrm{snc}\, u = -\mathrm{el}\, u + k'^2 . \int_0 \frac{\partial u}{\mathrm{dn}^2 u},$$

oder

$$3. \quad \int_0 \frac{\partial u}{\mathrm{dn}^2 u} = \frac{\mathrm{el}\, u - k^2 \,\mathrm{sn}\, u \,\mathrm{snc}\, u}{k'^2}.$$

Es kann diese Formel auch also dargestellt werden: $\int_0^u \mathrm{dnc}^2 u . \partial u = \mathrm{el}\, u - k^2 \mathrm{sn}\, u \,\mathrm{snc}\, u$. Nimmt man nun zwei Argumente u und u' so, dafs $u + u' = K$ ist, so haben wir

$$E = \int_0^K \mathrm{dn}^2 u . \partial u = \int_0^u \mathrm{dn}^2 u . \partial u + \int_u^K \mathrm{dn}^2 u . \partial u$$

oder

$$E = \mathrm{el}\, u + \int_u^K \mathrm{dn}^2 u . \partial u = \mathrm{el}\, u - \int_K^u \mathrm{dn}^2 u . \partial u.$$

Führt man nun die Gröfse $u' = K - u$ ein, so hat man $\partial u = -\partial u'$, und da für $u = K$ ist $u' = 0$, so hat man $E = \mathrm{el}\, u + \int_0^{u'} \mathrm{dnc}^2 u' . \partial u'$. Eben so ist $E = \mathrm{el}\, u' + \int_0^u \mathrm{dnc}^2 u . \partial u$, also $E - \mathrm{elc}\, u = \int_0^u \mathrm{dnc}^2 u . \partial u$, und wird dieser Werth in der obigen Gleichung substituirt, so erhält man die Formel

$$4. \quad E = \mathrm{el}\, u + \mathrm{elc}\, u - k^2 \mathrm{sn}\, u \,\mathrm{snc}\, u,$$

wodurch die Functionen elc u und el u auf einander zurückgeführt sind. Bald nachher werden wir diese Formel aus einer noch allgemeineren herleiten.

Multiplicirt man die Gleichung $\frac{\partial^2 \log \mathrm{cn}\, u}{\partial u^2} = -k^2 \mathrm{cn}^2 u - \frac{k'^2}{\mathrm{cn}^2 u}$ mit ∂u, und integrirt man hierauf, so erhält man zunächst

$$\operatorname{tn} u \operatorname{dn} u = k^2 \int_0 \operatorname{cn}^2 u . \partial u + k'^2 . \int_0 \frac{\partial u}{\operatorname{cn}^2 u},$$

und substituirt man hierin den Werth aus Formel (2.), so hat man

$$5. \quad \int_0 \frac{\partial u}{\operatorname{cn}^2 u} = \frac{\operatorname{tn} u \operatorname{dn} u - \operatorname{el} u + k'^2 . u}{k'^2},$$

woraus, wenn $K-u$ für u gesetzt wird, noch folgt

$$\int_0 \frac{\partial u}{\operatorname{cnc}^2 u} = \frac{k'^2 . u - \operatorname{el} u - \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{tn} u}}{k'^2} + \text{const.}$$

Da $\operatorname{tn}^2 u = \frac{1-\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 u} = \frac{1}{\operatorname{cn}^2 u} - 1$ ist, so ist

$$6. \quad \begin{cases} \int_0 \operatorname{tn}^2 u . \partial u = \frac{\operatorname{tn} u \operatorname{dn} u - \operatorname{el} u}{k'^2}, & \text{und also} \\ \int_0 \frac{\partial u}{\operatorname{tnc}^2 u} = \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u - \operatorname{el} u. \end{cases}$$

Da der Formel (1.) gemäfs $\operatorname{snc}^2 u . \partial u = -\partial\left(\frac{K-u-\operatorname{elc} u}{k^2}\right) = \frac{\partial u + \partial \operatorname{elc} u}{k^2}$ ist, so erhält man durch die Integration

$$\int_0 \operatorname{snc}^2 u . \partial u = \frac{u + \operatorname{elc} u}{k^2} + \text{const.}$$

Setzt man wirklich $u = 0$, so hat man $0 = \frac{E}{k^2} + \text{const.}$ und also

$$7. \quad \int_0 \operatorname{snc}^2 u . \partial u = \frac{u - (E - \operatorname{elc} u)}{k^2};$$

diese Formel kann mit Benutzung der Formel (4.) auch also geschrieben werden:

$$\int_0 \operatorname{snc}^2 u . \partial u = \frac{u + k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u - \operatorname{el} u}{k^2}.$$

Der Formel (2.) gemäfs ist

$$\operatorname{cnc}^2 u . \partial u = -\partial\left(\frac{\operatorname{elc} u - k'^2 K + k'^2 . u}{k^2}\right) = \frac{-\partial(\operatorname{elc} u) - k'^2 \partial u}{k^2};$$

daher ist

$$\int_0 \operatorname{cnc}^2 u . \partial u = \text{const.} - \frac{\operatorname{elc} u + k'^2 . u}{k^2}.$$

Wird wirklich $u = 0$ gesetzt, so hat man $0 = \text{const.} - \frac{E}{k^2}$, und also

$$8. \quad \int_0 \operatorname{cnc}^2 u . \partial u = \frac{E - \operatorname{elc} u - k'^2 . u}{k^2} = \frac{\operatorname{el} u - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u - k'^2 . u}{k^2}.$$

Setzt man in der Gleichung $\frac{\partial^2 \log \operatorname{sn} u}{\partial u^2} = k^2 \operatorname{sn}^2 u - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u}$ für u an die Stelle $K-u$, so wird sie $\frac{\partial^2 \log \operatorname{snc} u}{\partial u^2} = k^2 \operatorname{snc}^2 u - \frac{1}{\operatorname{snc}^2 u}$. Wird diese Gleichung

mit ∂u multiplicirt und dann integrirt, so erhält man: $\frac{\partial \log \operatorname{snc} u}{\partial u} = \frac{-\operatorname{cnc} u \operatorname{dnc} u}{\operatorname{snc} u} = -\frac{k'^2 \operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u} = k^2 \int_0 \operatorname{snc}^2 u \, \partial u - \int_0 \frac{\partial u}{\operatorname{snc}^2 u}$; daher ist

$$\int_0 \frac{\partial u}{\operatorname{snc}^2 u} = -\operatorname{el} u + k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u + \frac{k'^2 \operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u} + u;$$

da aber

$$\frac{k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} + \frac{k'^2 \operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u} = \frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u}(k^2 \operatorname{cn}^2 u + k'^2) = \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u$$

ist, so reducirt sich die Formel auf

$$9. \quad \int_0 \frac{\partial u}{\operatorname{snc}^2 u} = \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u + u - \operatorname{el} u.$$

Man gelangt zu eben dieser Formel kürzer auf folgende Art. Nach §. 62. Formel 9. ist $\frac{\partial^2 \log \operatorname{cn} u}{\partial u^2} = 1 - \operatorname{dn}^2 u - \frac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 u}$; multiplicirt man diese Formel mit ∂u, und integrirt man, so erhält man auf der Stelle

$$\int_0 \frac{\partial u}{\operatorname{snc}^2 u} = \int_0 \frac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 u} \partial u = \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u + u - \operatorname{el} u.$$

Die Function $\operatorname{el} u$ wird nicht unschicklich die elliptische Function des Argumentes u genannt.

§. 65.

Allgemeine Relation unter den Functionen $\operatorname{el}(a \pm u)$, $\operatorname{el} a$ und $\operatorname{el} u$. Entwicklung der elliptischen Function eines Trinoms.

Das Modular-Integral $\operatorname{el}(a \pm u)$ des Binoms $a \pm u$ läfst sich aus den Modular-Integralen $\operatorname{el} a$ und $\operatorname{el} u$ der Theile des Binoms zusammensetzen, und zu der Entwickelung der dazu dienenden allgemeinen Formel gehen wir jetzt über. Es ist nach §. 34.

$$\operatorname{dn}(a+u) + \operatorname{dn}(a-u) = \frac{2 \operatorname{dn} a \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{dn}(a-u) - \operatorname{dn}(a+u) = \frac{2k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u},$$

werden diese beiden Formeln mit einander multiplicirt, so erhält man

$$\operatorname{dn}^2(a-u) - \operatorname{dn}^2(a+u) = \frac{4k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \cdot \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)^2}.$$

Differenziirt man den Bruch $\frac{1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}$, so erhält man

$$\partial\left(\frac{1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}\right) = \frac{2k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \cdot \partial u}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)^2}$$

und es kann also die vorige Formel auch also dargestellt werden:

$$\mathrm{dn}^2(a-u).\partial u - \mathrm{dn}^2(a+u).\partial u = \frac{2\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a}\,\partial\left(\frac{1}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u}\right);$$

da ferner $\partial\,\mathrm{el}(a-u) = -\mathrm{dn}^2(a-u).\partial u$ und $\partial\,\mathrm{el}(a+u) = \mathrm{dn}^2(a+u)\cdot\partial u$ ist, so erhält man durch Integration

$$\text{const.} - \mathrm{el}(a-u) - \mathrm{el}(a+u) = \frac{2\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a}\cdot\frac{1}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u}.$$

Setzt man, um die Constante zu bestimmen, $u = 0$, so ist

$$\text{const.} - 2.\mathrm{el}\,a = \frac{2\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a}$$

und wird diese Gleichung von der vorigen subtrahirt, so erhält man

$$2\,\mathrm{el}\,a - \mathrm{el}(a-u) - \mathrm{el}(a+u) = \frac{2\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a}.\left(\frac{1}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u} - 1\right),$$

oder, da $\frac{1}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u} - 1 = \frac{k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u}$ ist, so findet man die Gleichung:

$$1.\quad \frac{\mathrm{el}(a+u)+\mathrm{el}(a-u)}{2} = \mathrm{el}\,a - \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u},$$

wodurch schon ein Zusammenhang zwischen den drei sich auf denselben Modul k beziehenden Functionen $\mathrm{el}(a+u)$, $\mathrm{el}(a-u)$ und $\mathrm{el}\,a$ ausgedrückt wird.

Beachtet man, dafs $\mathrm{el}(u-a) = \mathrm{el}(-(a-u)) = -\mathrm{el}(a-u)$ ist, und vertauscht man in der vorigen Gleichung a mit u, so erhält man sogleich noch die Formel:

$$2.\quad \frac{\mathrm{el}(a+u)-\mathrm{el}(a-u)}{2} = \mathrm{el}\,u - \frac{k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u},$$

welche man übrigens auch gerade eben so hätte herleiten können, wie die Gleichung (1.) hergeleitet worden ist. Werden die beiden Gleichungen (1.) und (2.) addirt, so erhält man:

$$\mathrm{el}(a+u) = \mathrm{el}\,a + \mathrm{el}\,u - k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u.\,\frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u + \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u},$$

welche Formel noch einfacher also dargestellt werden kann:

$$3.\quad \mathrm{el}(a+u) = \mathrm{el}\,a + \mathrm{el}\,u - k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(a+u).$$

Setzt man hierin $-u$ für u, so erhält man:

$$4.\quad \mathrm{el}(a-u) = \mathrm{el}\,a - \mathrm{el}\,u + k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(a-u),$$

und dieselbe Formel findet man auch, wenn man (2.) von (1.) subtrahirt.

Aus den vorigen Formeln leiten wir noch durch Zusammensetzung einige allgemeinere Formeln her. Es ist.

$$\mathrm{el}(u+v+a) = \mathrm{el}\,a + \mathrm{el}(u+v) - k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v)\,\mathrm{sn}(u+v+a) \quad \text{und}$$

$$\mathrm{el}(u+v) = \mathrm{el}\,u + \mathrm{el}\,v - k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v), \quad \text{also}$$

$$\mathrm{el}(u+v+a)$$
$$= \mathrm{el}\,u + \mathrm{el}\,v + \mathrm{el}\,a - k^2\,\mathrm{sn}(u+v).(\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v + \mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)),$$

und da nach §. 44.

$$\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v + \mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)}{\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+a)} = 1 + k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)$$

ist, so erhalten wir:

5. $$\mathrm{el}(u+v+a) =$$
$$\mathrm{el}\,u + \mathrm{el}\,v + \mathrm{el}\,a - k^2\,\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+a)\,\mathrm{sn}(u+v)\,(1 + k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)).$$

Diese Formel ist symmetrisch in Ansehung der drei Elemente u, v und a. Setzen wir $-a$ für a, so verwandelt sie sich in

$$\mathrm{el}(u+v-a) =$$
$$\mathrm{el}\,u + \mathrm{el}\,v - \mathrm{el}\,a - k^2\,\mathrm{sn}(u-a)\,\mathrm{sn}(v-a)\,\mathrm{sn}(u+v)\,(1 - k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v-a)).$$

Wird in dieser Formel $u+a$ für u und $v+a$ für v gesetzt, so verwandelt sie sich in:

$$\mathrm{el}(u+v+a) = \mathrm{el}(u+a) + \mathrm{el}(v+a) - \mathrm{el}\,a$$
$$- k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v+2a).(1 - k^2\,\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+a)\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)).$$

Da aber der Schlufsformel des §. 44. gemäfs ist:

$$1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2(u+v+a) =$$
$$(1 - k^2\,\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+a)\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a))(1 + k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)),$$

ferner

$$u+v+2a = (u+v+a)+a, \quad \text{also}$$
$$\mathrm{sn}(u+v+2a) = \frac{\mathrm{sn}(u+v+a)\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a + \mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}(u+v+a)\,\mathrm{dn}(u+v+a)}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2(u+v+a)}$$

ist, so reducirt sich die vorige Formel auf:

6. $$\mathrm{el}(u+v+a) = \mathrm{el}(u+a) + \mathrm{el}(v+a) - \mathrm{el}\,a$$
$$- \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v+a)\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a + k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}(u+v+a)\,\mathrm{dn}(u+v+a)}{1 + k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)}$$

und sie kann noch einfacher also dargestellt werden

$$\mathrm{el}(u+v+a) = \mathrm{el}(u+a) + \mathrm{el}(v+a) - \mathrm{el}\,a - \frac{\partial \log(1 + k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a))}{\partial a},$$

wenn man u und v als constant und a als veränderlich betrachtet.

§. 66.

Setzt man in der Formel (3.) $a = K - u$, so ist $\mathrm{el}(a+u) = \mathrm{el}\,K = E$, und man erhält also

5. $$E = \mathrm{elc}\,u + \mathrm{el}\,u - k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u,$$

welche dieselbe ist mit der im §. 64. gefundenen Formel (4.).

Setzen wir aber $\frac{K}{2}+u$ für a und $\frac{K}{2}-u$ für u, so erhalten wir

6. $$E = \mathrm{el}\left(\frac{K}{2}+u\right)+\mathrm{el}\left(\frac{K}{2}-u\right)-k^2\,\mathrm{sn}\left(\frac{K}{2}+u\right).\mathrm{sn}\left(\frac{K}{2}-u\right).$$

Wenn wir in der Formel (2.) des §. 37. setzen $a=\frac{K}{2}$ und $b=u$, so erhalten wir

$$k^2\,\mathrm{sn}\left(\frac{K}{2}+u\right).\mathrm{sn}\left(\frac{K}{2}-u\right) = \frac{\mathrm{dn}\,2u-\frac{\mathrm{dn}\,K}{\mathrm{cn}\,K}}{\mathrm{cn}\,2u} = \frac{\mathrm{dn}\,2u-k'}{\mathrm{cn}\,2u},$$

und es ist also auch

7. $$E = \mathrm{el}\left(\frac{K}{2}+u\right)+\mathrm{el}\left(\frac{K}{2}-u\right)-\frac{1}{\mathrm{snc}\,2u}+\frac{k'}{\mathrm{cn}\,2u}.$$

Den Formeln (6.) und (7.) gemäfs kann man die Werthe von $\mathrm{el}\,u$, wenn $u>\frac{K}{2}$ aus solchen Werthen von $\mathrm{el}\,u$, für welche $u<\frac{K}{2}$ ist, herleiten.

Setzt man in der Formel (6.) $u=0$, so erhält man

8. $$\mathrm{el}\,\frac{K}{2} = \frac{E}{2}+\frac{1-k'}{2}.$$

Wenn man in der Formel (5.) setzt $-u$ für u, so erhält man:

$$E = \mathrm{el}(K+u)-\mathrm{el}\,u+k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u,$$

und wird diese Gleichung zu (5.) addirt, so bekommt man

9. $$\mathrm{el}(K+u)+\mathrm{el}(K-u) = 2E.$$

Will man also die Werthe von $\mathrm{el}\,u$ in eine Tabelle bringen, so kann man sich auf die Ausdehnung dieser Tafel zwischen den Grenzen $u=0$ und $u=K$ beschränken, weil die Werthe von $\mathrm{el}\,u$, wenn $u>K$ ist, leicht aus den in den Tafeln enthaltenen Werthen zusammengesetzt werden können.

Setzt man in der vorigen Formel $K-u$ für u, so wird sie

$$\mathrm{el}(2K-u)+\mathrm{el}\,u = 2E,$$

und wird u entgegengesetzt genommen, so hat man

$$\mathrm{el}(2K+u) = \mathrm{el}\,u+2E.$$

Wird also das Argument u um $2K$ vergröfsert, so vergröfsert sich die Function $\mathrm{el}\,u$ *jedesmal um* $2E$.

Eine unmittelbare Folge von der so eben bewiesenen ist die Formel

10. $\mathrm{el}(u+2mK) = \mathrm{el}\,u+2mE$, oder $\mathrm{el}(u-2mK) = \mathrm{el}\,u-2mE$,

worin unter m eine beliebige ganze Zahl verstanden wird.

§. 67.

Entwicklung von $\mathrm{el}(K \pm ui)$ und $\mathrm{el}(u \pm iK')$.

Der Ausdruck $E - \mathrm{elc}\, u$ ist $= 0$ für $u = 0$, daher wird die Function $\frac{E - \mathrm{elc}(ui)}{i}$ wieder reel sein; setzen wir $y = \frac{E - \mathrm{elc}(ui)}{i}$, so erhalten wir durchs Differenziiren $\partial y = \mathrm{dnc}^2(ui).\partial u = k'^2.\mathrm{snc}'^2 u.\partial u$, und es ist also, wenn wir nun wieder so integriren, dafs das Integral auf beiden Seiten für $u = 0$ verschwindet,

$$y = k'^2.\int_0 \mathrm{snc}'^2 u.\partial u.$$

Vertauschen wir aber in der Formel (7.) des §. 64. den Modul k mit k', so haben wir

$$\int_0 \mathrm{snc}'^2 u.\partial u = \frac{u - (E' - \mathrm{elc}' u)}{k'^2} = \frac{u + k'^2\,\mathrm{sn}' u\,\mathrm{snc}' u - \mathrm{el}' u}{k'^2},$$

und wird dieser Werth substituirt, so entsteht die Formel:

$$\frac{E - \mathrm{elc}(ui)}{i} = u - (E' - \mathrm{elc}' u) = u + k'^2\,\mathrm{sn}' u\,\mathrm{snc}' u - \mathrm{el}' u,$$

oder

11. $$\begin{cases} \mathrm{el}(K - ui) = E - i(u + \mathrm{elc}' u - E') = E - i(u + k'^2\,\mathrm{sn}' u\,\mathrm{snc}' u - \mathrm{el}' u) \\ \mathrm{el}(K + ui) = E + i(u + \mathrm{elc}' u - E') = E + i(u + k'^2\,\mathrm{sn}' u\,\mathrm{snc}' u - \mathrm{el}' u). \end{cases}$$

Aus dieser Function können wir bequem den Werth von $\mathrm{el}\, u$ herleiten, wenn $u = K + iK'$ gesetzt wird, denn zu diesem Ende brauchen wir in der Formel (11.) nur $u = K'$ zu setzen; da dann aber $\mathrm{elc}' u = 0$ wird, so erhalten wir:

12. $\mathrm{el}(K - iK') = E - i(K' - E')$ und $\mathrm{el}(K + iK') = E + i(K' - E')$.

Wird auch in der Formel (5.) des §. 66. gesetzt ui für u, so erhält man:

$$E - \mathrm{elc}(ui) = \mathrm{el}(ui) - k^2\,\mathrm{sn}(ui)\,\mathrm{snc}(ui),$$

und es ist also:

13. $$\begin{aligned} \mathrm{el}(u)i - k^2\,\mathrm{sn}(ui)\,\mathrm{snc}(ui) &= i(u - (E' - \mathrm{elc}' u)) \\ &= i(u + k'^2\,\mathrm{sn}' u\,\mathrm{snc}' u - \mathrm{el}' u). \end{aligned}$$

Setzen wir jetzt $y = \mathrm{el}(u + iK')$, so erhalten wir durchs Differenziiren $\partial y = \mathrm{dn}^2(u + iK').\partial u$, und da $\mathrm{dn}(u + iK') = \frac{-i}{\mathrm{tn}\, u}$ nach §. 28. ist, so ist also $\partial y = -\frac{\partial u}{\mathrm{tn}^2 u}$, folglich $y = \mathrm{const.} + \int \frac{-\partial u}{\mathrm{tn}^2 u}$. Setzen wir in der zweiten von den Formeln (6.) des §. 64. aber $K - u$ für u, so erhalten wir $\frac{-\partial u}{\mathrm{tn}^2 u} = \partial(\mathrm{tnc}\, u\,\mathrm{dnc}\, u - \mathrm{elc}\, u)$, und es ist also

$$\mathrm{el}(u + iK') = \mathrm{tnc}\, u\,\mathrm{dnc}\, u - \mathrm{elc}\, u + \mathrm{const.}$$

Die Constante können wir nun nicht dadurch bestimmen, dafs wir $u=0$ setzen, weil $\mathrm{tnc}\,0=\mathrm{tn}\,K=\frac{1}{0}$ ist, wohl aber dadurch, dafs wir $u=K$ setzen; der obigen Formel (12.) gemäfs erhalten wir nun

$$\mathrm{el}(K+iK')=E+i(K'-E')=\text{const.},$$

und es ist also

$$14.\quad \begin{cases}\mathrm{el}(u+iK')=E-\mathrm{elc}\,u+\mathrm{tnc}\,u\,\mathrm{dnc}\,u+i(K'-E'),\\ \mathrm{el}(u-iK')=E-\mathrm{elc}\,u+\mathrm{tnc}\,u\,\mathrm{dnc}\,u-i(K'-E').\end{cases}$$

Es lassen sich diese Formeln noch etwas einfacher darstellen: da nämlich

$$E-\mathrm{elc}\,u=\mathrm{el}\,u-\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u},\qquad \mathrm{tnc}\,u\,\mathrm{dnc}\,u=\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}$$

und

$$\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}-\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}=\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\left(\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u}{\mathrm{sn}\,u}\right)=\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}=\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{tn}\,u}$$

ist, so erhalten wir:

$$15.\quad \begin{cases}\mathrm{el}(u+iK')=\mathrm{el}\,u+\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{tn}\,u}+i(K'-E'),\\ \mathrm{el}(u-iK')=\mathrm{el}\,u+\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{tn}\,u}-i(K'-E').\end{cases}$$

Setzen wir in dieser Formel $u=0$, so erhalten wir für $\mathrm{el}(iK')$ einen Ausdruck, dessen reeller Theil unendlich ist; dasselbe findet Statt, wenn u irgend ein Vielfaches von $2K$ ist, daher ist überhaupt

$$16.\quad \mathrm{el}(2mK\pm iK')=\tfrac{1}{0}.$$

Setzen wir noch einmal $u+iK'$ für u, so erhalten wir zunächst

$$\mathrm{el}(u+2iK')=\mathrm{el}\,u+\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{tn}\,u}+\frac{\mathrm{dn}\,(u+iK')}{\mathrm{tn}\,(u+iK')}+2i(K'-E').$$

Da aber nach §. 28. ist $\frac{\mathrm{dn}\,(u+iK')}{\mathrm{tn}\,(u+iK')}=-\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{tn}\,u}$ ist, so reducirt sich die Formel auf

17. $\mathrm{el}\,(u+2iK')=\mathrm{el}u+2i(K'-E')$ und $\mathrm{el}\,(u-2iK')=\mathrm{el}\,u-2i(K'-E')$.

Wird also u um $2iK'$ vergröfsert oder vermindert, so vermehrt oder vermindert sich $\mathrm{el}\,u$ *um* $2i(K'-E')$. Aus diesen Formeln leiten wir sofort die allgemeinere

$$\mathrm{el}\,(u+2niK')=\mathrm{el}\,u+2ni(K'-E'),$$

oder, wenn man noch $u+2mK$ für u setzt, die folgende her

$$18.\quad \mathrm{el}\,(u+2mK+2niK')=\mathrm{el}\,u+2mE+2ni(K'-E'),$$

in welcher m und n beliebige positive oder negative ganze Zahlen sind.

§. 68.

Zurückführung des Modular-Integrals el u mit einem der Modul $\frac{1}{k}$ und $\frac{ik}{k'}$ auf eine solche Function mit dem Modul k.

Bezeichnet $\mathrm{el}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$ das Modular-Integral bezogen auf das Argument ku und den Modul $\frac{1}{k}$, so ist

$$\mathrm{el}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = k \cdot \int_0 \mathrm{dn}^2\left(ku, \frac{1}{k}\right) \cdot \partial u.$$

Da aber nach §. 30. ist $\mathrm{dn}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{cn}\, u$, so erhalten wir $\mathrm{el}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = k \cdot \int_0 \mathrm{cn}^2 u \partial u$, und wird hierin der Werth aus Formel (2.) des §. 64. substituirt, so erhält man:

$$1. \quad \mathrm{el}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \frac{\mathrm{el}\, u - k'^2 u}{k}.$$

Wollen wir den elliptischen Quadranten für den Modul $\frac{1}{k}$ erhalten, so haben wir in dieser Formel nur für ku den zum Modul $\frac{1}{k}$ gehörigen Modular-Quadranten $k(K - iK')$, zu substituiren. Ist aber $ku = k(K - iK')$, so ist $u = K - iK'$; daher ist der gesuchte elliptische Quadrant

$$\frac{\mathrm{el}(K - iK') - k'^2(K - iK')}{k}.$$

Da aber $\mathrm{el}(K - iK') = E - i(K' - E')$ ist, so erhalten wir

$$2. \quad \frac{E - k'^2 K + i(E' - k^2 K')}{k}$$

zum Ausdrucke des elliptischen Quadranten, welcher zum Modul $\frac{1}{k}$ gehört.

Der Ausdruck $\mathrm{el}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right)$ bezeichne das Modular-Integral bezogen auf das Argument $k'u$ und auf den Modul $\frac{ik}{k'}$; dann ist $\mathrm{el}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = k' \int_0 \mathrm{dn}^2\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) \cdot \partial u = k' \cdot \int_0 \frac{\partial u}{\mathrm{dn}^2 u}$, und also nach §. 64.

$$3. \quad \mathrm{el}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{\mathrm{el}\, u - k^2 \,\mathrm{sn}\, u \,\mathrm{snc}\, u}{k'} = \frac{E - \mathrm{elc}\, u}{k'}.$$

Den elliptischen Quadranten für den Modul $\frac{ik}{k'}$ erhalten wir, wenn wir in dieser Formel nur $k' \cdot u = k' \cdot K$, also $u = K$ setzen; daher ist dieser elliptische Quadrant für den Modul $\frac{ik}{k'}$ gleich

$$4. \quad \frac{E}{k'}.$$

Wir fassen die gefundenen Resultate in die beiden folgenden Lehrsätze zusammen:

I. Wird statt des Moduls k gesetzt $\frac{1}{k}$ $\left(\text{also } \frac{ik'}{k} \text{ für } k\right)$, so verwandelt sich

$$E \text{ in } \frac{E-k'^2\,K+i(E'-k^2.K')}{k}, \quad E' \text{ in } \frac{E'}{k}, \quad \text{also}$$

$$K'-E' \text{ in } \frac{k^2\,K'-E'}{k} \quad \text{und} \quad \frac{E}{K'-E'} \text{ in } \frac{E-k'^2\,K}{k^2\,K'-E'} - i,$$

und wird aufserdem noch gesetzt ku für u, so verwandelt sich:

$$\text{el}\,u \text{ in } \frac{\text{el}\,u-k'^2.u}{k}.$$

II. Wird $\frac{ik}{k'}$ statt des Moduls k $\left(\text{also } \frac{1}{k'} \text{ statt } k'\right)$ gesetzt, so verwandelt sich

$$E \text{ in } \frac{E}{k'}, \quad \text{ferner} \quad E' \text{ in } \frac{E'-k^2\,K'+i(E-k'^2\,K)}{k'}, \quad \text{also}$$

$$K'-E' \text{ in } \frac{K'-E'-iE}{k'} \text{ *)} \quad \text{und} \quad \frac{K'-E'}{E} \text{ in } \frac{K'-E'}{E} - i;$$

und setzt man aufserdem noch $k'u$ für u, so verwandelt sich

$$\text{el}\,u \text{ in } \frac{E-\text{elc}\,u}{k'} \quad \text{und} \quad E-\text{elc}\,u \text{ in } \frac{\text{el}\,u}{k'}.$$

Diese Lehrsätze sind also als ein Nachtrag zu denen des §. 30. und §. 31. anzusehen.

§. 69.

Entwicklung von $\text{el}\left(\frac{K}{2} \pm \frac{iK'}{2}\right)$ und $\text{el}\left(u \pm \frac{iK'}{2}\right)$.

Der Formel $\text{el}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \frac{\text{el}\,u-k'^2\,u}{k}$ gemäfs ist auch rückwärts

$$\text{el}\,u = k.\text{el}\left(ku, \frac{1}{k}\right)+k'^2u, \text{ und also zunächst}$$

$$\text{el}\left(\frac{K-iK'}{2}\right) = k.\text{el}\left[k\left(\frac{K-iK'}{2}\right), \frac{1}{k}\right] + k'^2\left(\frac{K-iK'}{2}\right).$$

Da nach Formel (8.) des §. 66. ist $\text{el}\left(\frac{K}{2}\right) = \frac{E}{2} + \frac{1-k'}{2}$, so verwandelt sich diese Formel, wenn in ihr $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k gesetzt wird, in:

$$\text{el}\left(\frac{k(K-iK')}{2}, \frac{1}{k}\right) = \frac{E-k'^2\,K+i(E'-k^2\,K')}{2k} + \frac{k-ik'}{2k},$$

---

*) Es verwandelt sich nämlich K' in $k'.(K'-iK)$, und hiervon mufs der Ausdruck, in welchen E' übergeht, subtrahirt werden.

und wird dieser Werth in der früheren Gleichung substituirt, so erhält man:

$$\mathrm{el}\left(\frac{K}{2}-\frac{iK'}{2}\right)=\frac{E-k'^2K+i(E'-k^2K')}{2}+\frac{k'^2(K-iK')}{2}+\frac{k-ik'}{2}.$$

Dieser Ausdruck reducirt sich auf den einfachern

$$1.\quad \begin{cases}\mathrm{el}\left(\frac{K}{2}-\frac{iK'}{2}\right)=\frac{E-i(K'-E')}{2}+\frac{k-ik'}{2}, & \text{eben so ist}\\ \mathrm{el}\left(\frac{K}{2}+\frac{iK'}{2}\right)=\frac{E+i(K'-E')}{2}+\frac{k+ik'}{2}.\end{cases}$$

Man kann zu diesen Formeln auch auf folgende Art gelangen. Setzt man in der Formel (3.) des §. 65. das Argument $a=u$, so erhält man:

$$\mathrm{el}\,u=\frac{\mathrm{el}(2u)}{2}+\frac{k^2\,\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{sn}2u}{2}.$$

Da ferner nach §. 32. *a.* ist $k^2\,\mathrm{sn}^2u=\frac{1-\mathrm{dn}2u}{1+\mathrm{cn}2u}$, so verwandelt sich diese Formel in

$$\mathrm{el}\,u=\frac{\mathrm{el}(2u)}{2}+\frac{1-\mathrm{dn}2u}{2}\cdot\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}2u}{1+\mathrm{cn}2u}}$$

oder

$$2.\quad \mathrm{el}\left(\frac{u}{2}\right)=\frac{\mathrm{el}\,u}{2}+\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{2}\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}}.$$

Setzt man in dieser Formel $u=K+iK'$, so ist $\mathrm{dn}\,u=0$, $\mathrm{cn}\,u=\frac{-ik'}{k}$ und $\mathrm{sn}\,u=\frac{1}{k}$, und da $\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}}=\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}=k+ik'$ ist, so erhalten wir

$$\mathrm{el}\left(\frac{K+iK'}{2}\right)=\frac{E+i(K'-E')}{2}+\frac{k+ik'}{2},$$

wenn der Werth von $\mathrm{el}\,u$ nach Formel (12.) im §. 67. substituirt wird, und also dasselbe Resultat, wie vorhin.

Setzen wir in der Formel (2.) $u+iK'$ für u, so erhalten wir, da dann $\mathrm{dn}\,u$ sich in $\frac{-i}{\mathrm{tn}\,u}$, $\mathrm{sn}\,u$ in $\frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,u}$ und $\mathrm{cn}\,u$ in $\frac{-i\,\mathrm{dn}\,u}{k\,\mathrm{sn}\,u}$ verwandelt, für $\frac{(1-\mathrm{dn}\,u)(1-\mathrm{cn}\,u)}{\mathrm{sn}\,u}$ den Ausdruck

$$\left(\frac{\mathrm{sn}\,u+i\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}\right).(k\,\mathrm{sn}\,u+i\,\mathrm{dn}\,u)=\frac{k\,\mathrm{sn}^2u-\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u+i\,\mathrm{sn}\,u(\mathrm{dn}\,u+k\,\mathrm{cn}\,u)}{\mathrm{sn}\,u}$$

$$=k\,\mathrm{sn}\,u-\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{tn}\,u}+i(\mathrm{dn}\,u+k\,\mathrm{cn}\,u),$$

und da der Formel (15.) im §. 67. gemäfs

$$\mathrm{el}\,(u+iK')=\mathrm{el}\,u+\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{tn}\,u}+i(K'-E')$$

ist, so erhalten wir also

$$\mathrm{el}\left(\frac{u}{2}+\frac{iK'}{2}\right)=\frac{\mathrm{el}\,u}{2}+\frac{k\,\mathrm{sn}\,u}{2}+i\,\frac{(K'-E'+\mathrm{dn}\,u+k\,\mathrm{cn}\,u)}{2},$$

oder auch

$$3.\quad \begin{cases} \mathrm{el}\left(u+\frac{iK'}{2}\right) = \frac{\mathrm{el}(2u)}{2} + \frac{k\,\mathrm{sn}(2u)}{2} + \frac{i(K'-E'+\mathrm{dn}\,2u+k\,\mathrm{cn}\,2u)}{2}, \\ \mathrm{el}\left(u-\frac{iK'}{2}\right) = \frac{\mathrm{el}(2u)}{2} + \frac{k\,\mathrm{sn}(2u)}{2} - \frac{i(K'-E'+\mathrm{dn}\,2u+k\,\mathrm{cn}\,2u)}{2}. \end{cases}$$

Setzt man in dieser Formel $u=0$, so erhält man:

$$4.\quad \mathrm{el}\left(\frac{iK'}{2}\right) = \frac{i(K'-E'+1+k)}{2},$$

und dieses particuläre Resultat konnte aus der Formel (2.), indem man $u=iK'$ setzte, nicht unmittelbar hergeleitet werden, weil dann $\mathrm{el}u$ unendlich wird.

Setzen wir in den Formeln (3.) $u=K$, so wird $\mathrm{el}2u=2E$, $\mathrm{sn}2u=0$, $\mathrm{cn}2u=-1$ und $\mathrm{dn}2u=1$, daher haben wir

$$5.\quad \mathrm{el}\left(K\pm\frac{iK'}{2}\right) = E \pm \frac{i(K'-E')}{2} \pm \frac{(1-k)i}{2}.$$

§. 70.

Von den Werthen der Function $\mathfrak{El}u = \frac{\mathrm{el}(ui)}{i}$.

Setzt man in der Gleichung $\mathrm{el}u = \int_0 \mathrm{dn}^2u.\partial u$ jetzt ui für u, so erhält man: $\mathrm{el}(ui) = i.\int_0 \mathfrak{Dn}^2u.\partial u$. Das Integral

$$1.\quad \mathfrak{El}u = \int_0 \mathfrak{Dn}^2u.\,\partial u$$

ist das hyperbolische Modular-Integral der ersten Art, und auf dasselbe können die Integrale $\int \mathfrak{Sn}^2u\,\partial u$, $\int \mathfrak{Cn}^2u\,\partial u$, $\int \mathfrak{Tn}^2u\,\partial u$, $\int \frac{\partial u}{\mathfrak{Sn}^2u}$, $\int \frac{\partial u}{\mathfrak{Cn}^2u}$, $\int \frac{\partial u}{\mathfrak{Dn}^2u}$ und $\int \frac{\partial u}{\mathfrak{Tn}^2u}$ in ähnlicher Weise zurückgeführt werden, wie dieses an den cyklischen Modular-Integralen in Beziehung auf die Function $\mathrm{el}u$ gezeigt worden ist. So wie

$$2.\quad \frac{\mathrm{el}(ui)}{i} = \mathfrak{El}u \text{ ist, so ist auch umgekehrt } \frac{\mathfrak{El}(ui)}{i} = \mathrm{el}u.$$

Die Integrale $\mathfrak{El}u$ und $\mathrm{el}u$ können auch also dargestellt werden:

$$3.\quad \mathfrak{El}u = \int_0 \frac{\mathrm{dn}'^2u}{\mathrm{cn}'^2u}\partial u = \int_0 \frac{\partial u}{\mathrm{snc}'^2u},\quad \mathrm{el}u = \int_0 \frac{\mathfrak{Dn}'^2u}{\mathfrak{Cn}'^2u}\partial u.$$

Wird statt des Moduls k der Modul k' gesetzt, so schreiben wir $\mathfrak{El}'u$ für $\mathfrak{El}u$. Setzt man in der Gleichung (3.) des §. 65. ai für a und ui für u, so verwandelt sie sich sofort in:

$$4.\quad \begin{cases} \mathfrak{El}(a+u) = \mathfrak{El}a+\mathfrak{El}u+k^2.\mathfrak{Sn}a\,\mathfrak{Sn}u\,\mathfrak{Sn}(a+u) & \text{und} \\ \mathfrak{El}(a-u) = \mathfrak{El}a-\mathfrak{El}u-k^2\,\mathfrak{Sn}a\,\mathfrak{Sn}u\,\mathfrak{Sn}(a-u). \end{cases}$$

Der Gleichung am Schlusse des §. 64. gemäfs ist:

$$5.\quad \begin{cases} \mathfrak{El}'u+\mathrm{el}\,u = u+\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u = u+\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{am}\,2u & \text{und} \\ \mathfrak{El}\,u+\mathrm{el}'u = u+\mathrm{tn}'u\,\mathrm{dn}'u = u+\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{am}'2u \\ \qquad = u+\mathfrak{Tn}\,u\,\mathfrak{Dn}u = u+\mathfrak{Tang}\tfrac{1}{2}\mathfrak{Am}\,2u. \end{cases}$$

Also

$$\frac{\mathrm{el}'(ui)}{i}+\mathrm{el}\,u = u+\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{snc}\,u} \quad \text{oder} \quad \frac{\mathrm{el}(ui)}{i}+\mathrm{el}'u = u+\frac{\mathrm{sn}'u}{\mathrm{snc}'u}.$$

Setzt man in der letzten Formel $u=K'$, also $\mathrm{am}'2u=\pi$, so erhält man:

$$6.\quad \mathfrak{El}K' = K'-E'+\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{0}.$$

Die Function $\mathfrak{El}u$ wächst also zwischen den Grenzen $u=0$ und $u=K'$ sehr rasch und zwar immer mehr beschleunigt, wenn sich u der Grenze K' nähert. Setzt man $K'-u$ für u, so erhält man, da $\mathrm{am}'(2K'-2u)=\pi-\mathrm{am}'2u$ ist, die Formel:

$$7.\quad \mathfrak{El}(K'-u)+\mathrm{el}'(K'-u) = K'-u+\frac{1}{\mathrm{tang}\frac{1}{2}\mathrm{am}'2u},$$

welche sich, wenn $-u$ für u genommen wird, verwandelt in

$$8.\quad \mathfrak{El}(K'+u) = K'+u-\mathrm{el}'(K'+u)-\frac{1}{\mathrm{tang}\frac{1}{2}\mathrm{am}'2u},$$

und eine bemerkenswerthe Eigenschaft der Function $\mathfrak{El}u$ erkennen läfst. Nimmt man nämlich u sehr klein, so hat das letzte Glied dieser Formel einen sehr grofsen Werth, und da dasselbe negativ ist, so erhellet, dafs auch $\mathfrak{El}(K'+u)$ selbst negativ ist. Setzt man $u=K'$, so wird das Glied $\frac{1}{\mathrm{tang}\frac{1}{2}\mathrm{am}'2u}=0$ und man erhält also:

$$9.\quad \mathfrak{El}(2K') = 2K'-2E' = 2(K'-E').$$

Da nun $E'<\frac{1}{2}\pi$ und $K'>\frac{1}{2}\pi$, folglich $K'>E'$ ist, so ist also $\mathfrak{El}(2K')$ positiv. Hiernach ist also die Function $\mathfrak{El}u$ zwischen den Grenzen $u=K'$ und $u=2K'$ zuerst negativ und nachher wieder positiv, und eine Folge hiervon ist, dafs es zwischen eben diesen Grenzen einen Werth u giebt, für welchen $\mathfrak{El}u=0$ ist. Da nun $\mathrm{el}(ui)=i.\mathfrak{El}u$ ist, *so ist die Function* $\mathrm{el}(ui)=0$ *nicht blofs für* $u=0$, *sondern auch für einen zwischen den Grenzen* $u=K'$ *und* $u=2K'$ *enthaltenen Werth von* u, *welcher unfehlbar von dem Modul* k *abhangen wird.*

Dasselbe läfst sich auch aus der ersten von den Gleichungen (15.) im §. 67. herleiten, wenn man darin ui für u setzt. Aus den Gleichun-

gen (7.) und (8.) erhält man durch Addition die Formel:

$$\mathfrak{El}(K'-u)+\mathfrak{El}(K'+u)+\mathrm{el}'(K'-u)+\mathrm{el}'(K'+u)=2K',$$

welche sich, da $\mathrm{el}'(K'-u)+\mathrm{el}'(K'+u)=2E'$ ist, zusammenzieht auf

$$10.\quad \mathfrak{El}(K'+u)+\mathfrak{El}(K'-u)=2(K'-E').$$

Multiplicirt man die Gleichung

$$\mathrm{el}(u+2nK-2miK')=\mathrm{el}u+2nE-2mi(K'-E')$$

mit i, so erhält man

$$\mathfrak{El}(ui+2mK'+2niK)=\mathfrak{El}(ui)+2m(K'-E')+2niE,$$

und setzt man hierin $\frac{u}{i}$ für u, so wird sie

$$11.\quad \mathfrak{El}(u+2mK'+2niK)=\mathfrak{El}u+2m(K'-E')+2niE,$$

und also für $n=0$ insbesondere

$$\mathfrak{El}(u+2mK')=\mathfrak{El}u+2m(K'-E').$$

Zusatz. So wie es zwischen den Grenzen K' und $2K'$ einen Werth von u giebt, für welchen $\mathrm{el}(ui)=0$ ist, so giebt es zwischen den Grenzen $3K'$ und $4K'$ einen zweiten, zwischen $5K'$ und $6K'$ einen dritten, zwischen $7K'$ und $8K'$ einen vierten u. s. w. Werth von u, für welchen $\mathrm{el}(ui)=0$ ist. Diese auf einander folgenden Werthe von u, für welche $\mathrm{el}(ui)=0$ ist, und deren Anzahl unendlich ist, bilden aber keine arithmetische Progression, sondern befolgen ein anderes sehr verwickeltes Gesetz.

§. 71.

Reduction der Integrale von der Form $\int x^n.\partial u$, in welcher x eine Modular-Function des Argumentes u ist, auf Modular-Integrale und auf Amplituden.

Es sei der Kürze wegen $R=a+2bx^2+cx^4$, und durch $[n]$ werde bezeichnet das Integral $\int\frac{x^n.\partial x}{\sqrt{R}}$. Differenziirt man den Ausdruck $y=x^{n-3}.\sqrt{R}$, so erhält man zunächst:

$$\partial y=\left((n-3)x^{n-4}.\sqrt{R}+\frac{x^{n-3}.\frac{\partial R}{2\partial x}}{\sqrt{R}}\right)\partial x.$$

oder da $\frac{\partial R}{\partial x}=4bx+4cx^3$ ist

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{(n-3)(ax^{n-4}+2bx^{n-2}+cx^n)+2bx^{n-2}+2cx^n}{\sqrt{R}}.$$

Wird dieses Differenzial im Zähler nach Potenzen von x geordnet, so entsteht:

$$\partial y = \frac{(n-3)ax^{n-4}.\partial x+(n-2).2b.x^{n-2}\partial x+(n-1)cx^n\partial x}{\sqrt{R}},$$

und wenn man gliedweise integrirt, so erhält man die Reductionsformel:

$$x^{n-3}.\sqrt{R} = (n-3)a.[n-4]+2(n-2)b.[n-2]+(n-1)c.[n].$$

Ist, wie wir hier voraussetzen, n eine *positive* ganze Zahl, so wird das Integral $[n]=\int\frac{x^n.\partial x}{\sqrt{R}}$ durch diese Formel auf die beiden Integrale $[n-2]$ und $[n-4]$ zurückgeführt.

Ist nun $x=\mathrm{sn}\,u$, so ist $\partial u=\frac{\partial x}{\sqrt{(1-(1+k^2)x^2+k^2x^4)}}$ nach §. 8. Da nun $1-(1+k^2)x^2+k^2x^4=\mathrm{cn}^2u\,\mathrm{dn}^2u=R=a+2bx^2+cx^4$ ist, so hat man $a=1$, $2b=-(1+k^2)$ und $c=k^2$; daher verwandelt sich die allgemeine Formel in

$$1.\quad (n-1)k^2.\int\mathrm{sn}^nu\,\partial u$$
$$=(n-2)(1+k^2).\int\mathrm{sn}^{n-2}u.\partial u-(n-3).\int\mathrm{sn}^{n-4}u.\partial u+\mathrm{cn}\,u.\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}^{n-3}u.$$

Setzt man $x=\mathrm{cn}\,u$, so ist $\partial x=-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\partial u$, also $-\partial u=\frac{\partial x}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}=\frac{\partial x}{\sqrt{(k'^2+(k^2-k'^2)x^2-k^2x^4)}}$; folglich

$$\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u=\sqrt{R}=\sqrt{(a+2bx^2+cx^4)},$$

und also $a=k'^2$, $2b=k^2-k'^2$, $c=-k^2$. Werden diese Werthe in der allgemeinen Formel substituirt, so verwandelt sie sich in

$$2.\quad (n-1)k^2.\int\mathrm{cn}^nu\,\partial u$$
$$=(n-2)(k^2-k'^2).\int\mathrm{cn}^{n-2}u.\partial u+(n-3)k'^2.\int\mathrm{cn}^{n-4}u.\partial u+\mathrm{sn}\,u.\mathrm{dn}\,u.\mathrm{cn}^{n-3}u.$$

Wird $x=\mathrm{dn}\,u$ gesetzt, also $\partial x=-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u.\partial u$, so ist $-\partial u=\frac{\partial x}{k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}=\frac{\partial x}{\sqrt{(-k'^2+(1+k'^2)x^2-x^4)}}$, also $\sqrt{R}=k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u$, ferner $a=-k'^2$, $2b=1+k'^2$, $c=-1$; die Reductions-Formel ist also

$$3.\quad (n-1).\int\mathrm{dn}^nu.\partial u$$
$$=(n-2)(1+k'^2).\int\mathrm{dn}^{n-2}u.\partial u-(n-3)k'^2.\int\mathrm{dn}^{n-4}u.\partial u+k^2\,\mathrm{sn}\,u.\mathrm{cn}\,u.\mathrm{dn}^{n-3}u.$$

Setzt man in der Formel (1.) k' für k, ferner ui für u, so verwandelt sie sich sofort in

$$4.\quad (n-1)k'^2.\int\mathrm{tn}^nu.\partial u$$
$$=-(n-2)(1+k'^2).\int\mathrm{tn}^{n-2}u.\partial u-(n-3).\int\mathrm{tn}^{n-4}u.\partial u+\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}^2u}\mathrm{tn}^{n-3}u.$$

Ist nun n in diesen Gleichungen eine gerade Zahl, so werden die auf der linken Seite in diesen Gleichungen stehenden Integrale durch wie-

derholte Anwendung derselben Reductions-Formeln zuletzt zurückgebracht auf solche zwei Integrale, in welchen der Exponent $n=0$ und $=2$ ist. Für $n=0$ hat man aber das Integral $\int \partial u = u$ und für $n=2$ kann das Integral dem §. 64. gemäfs immer auf das Modular-Integral el u zurückgebracht werden. Ist n aber eine ungerade Zahl, so können die Integrale sämmtlich auf solche zurückgebracht werden, für welche $n=1$ und $n=3$ ist. Der Exponent $n=3$ kann aber noch auf den Exponenten $n=1$ zurückgebracht werden; denn man kann die Gleichungen (1.) bis (4.) im §. 62. multipliciren mit ∂u, und gliederweise integriren, wodurch man erhält:

$$2k^2.\int \mathrm{sn}^3 u.\partial u = (1+k^2)\int \mathrm{sn}\, u.\partial u + \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u,$$

$$2k^2.\int \mathrm{cn}^3 u.\partial u = (k^2-k'^2).\int \mathrm{cn}\, u.\partial u + \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{dn}\, u,$$

$$2.\int \mathrm{dn}^3 u.\partial u = (1+k'^2).\int \mathrm{dn}\, u.\partial u + k^2\, \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{cn}\, u,$$

$$2k'^2.\int \mathrm{tn}^3 u.\partial u = -(1+k'^2).\int \mathrm{tn}\, u.\partial u + \frac{\mathrm{dn}\, u}{\mathrm{cn}^2 u},$$

und dieselben Resultate erhält man auch, wenn man in den früheren allgemeinen Formeln nur $n=3$ setzt. Die Integrale für $n=1$ lassen sich aber durch cyklische oder hyperbolische Arcus, d. h. durch Amplituden ausdrücken.

Setzt man in der Formel (1.) $u+iK'$ für u, so verwandelt sie sich sofort in

$$(n-1).\int \frac{\partial u}{\mathrm{sn}^n u} = (n-2)(1+k^2).\int \frac{\partial u}{\mathrm{sn}^{n-2} u} - (n-3)k^2.\int \frac{\partial u}{\mathrm{sn}^{n-4} u} - \frac{\mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u}{\mathrm{sn}^{n-1} u},$$

oder, wenn man $K-u$ für u setzt, in die folgende

$$5.\quad (n-1).\int \frac{\partial u}{\mathrm{snc}^n u}$$
$$= (n-2)(1+k^2).\int \frac{\partial u}{\mathrm{snc}^{n-2} u} - (n-3)k^2.\int \frac{\partial u}{\mathrm{snc}^{n-4} u} + \frac{\mathrm{cnc}\, u.\mathrm{dnc}\, u}{\mathrm{snc}^{n-1} u}.$$

Vertauscht man in der Formel (2.) die beiden conjugirten Modul und setzt man dann ui für u, so verwandelt sie sich in

$$6.\quad (n-1)k'^2.\int \frac{\partial u}{\mathrm{cn}^n u}$$
$$= (n-2)(k'^2-k^2).\int \frac{\partial u}{\mathrm{cn}^{n-2} u} + (n-3)k^2.\int \frac{\partial u}{\mathrm{cn}^{n-4} u} + \frac{\mathrm{sn}\, u\, \mathrm{dn}\, u}{\mathrm{cn}^{n-1} u}.$$

Die Formeln (3.) und (4.) können in ähnliche umgesetzt werden für negative Exponenten, indem man nur $K-u$ für u setzt, da dnc u

$= \frac{k'}{\mathrm{dn}\,u}$ und $\mathrm{tnc}\,u = \frac{1}{k'\,\mathrm{tn}\,u}$ ist. Hierdurch verwandelt sich die Formel (3.) in

$$7. \quad (n-1)k'^2.\int\frac{\partial u}{\mathrm{dn}^n u}$$
$$= (n-2)(1+k'^2).\int\frac{\partial u}{\mathrm{dn}^{n-2} u} - (n-3).\int\frac{\partial u}{\mathrm{dn}^{n-4} u} - \frac{k^2.\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}^{n-1} u}.$$

Siebenter Abschnitt.

§. 72.

Von den Modular-Logarithmen $\mathrm{lm}\,u$ und $\mathfrak{Lm}\,u$.

Die beiden im vorigen Abschnitte behandelten Modular-Integrale $\mathrm{el}\,u$ und $\mathfrak{El}\,u$, auf welche wir später noch oft zurückkommen werden, sind nur erste Differenziale einer neuen Function, wovon es ebenfalls zwei Nebenformen giebt, die sich, wie die cyklischen und hyperbolischen Functionen, gegenüberstehen und daher auch als zwei Functionen zu behandeln sind, damit man im Stande sei, die imaginären Formen auf reelle zurückzubringen. Es haben diese neuen Functionen eine *logarithmische Natur*, denn fast in alle sie betreffende Relationen mischen sich die natürlichen Logarithmen ein, und da sie nicht blofs von dem Argumente u, sondern auch von einem Modul abhängen, so werden wir sie *cyklische* und *hyperbolische Modular-Logarithmen* nennen, und durch $\mathrm{lm}\,u$ *) den cyklischen, sowie durch $\mathfrak{Lm}\,u$ den hyperbolischen Modular-Logarithmen des Argumentes u bezeichnen, wenn der Modul k ist, hingegen jenen mit $\mathrm{lm}'u$ und diesen mit $\mathfrak{Lm}'u$, wenn der Modul k' ist. Der vorhergehenden Erklärung gemäfs ist also

1. $\mathrm{lm}\,u = \int_0 \partial u.\mathrm{el}\,u$, oder umgekehrt $\mathrm{el}\,u = \frac{\partial\,\mathrm{lm}\,u}{\partial u}$, und
2. $\mathfrak{Lm}\,u = \int_0 \partial u.\mathfrak{El}\,u$, oder umgekehrt $\mathfrak{El}\,u = \frac{\partial\,\mathfrak{Lm}\,u}{\partial u}$.

Aus diesen einfachen Formeln müssen alle Eigenschaften der Modular-Logarithmen hergeleitet werden.

---

*) Die Buchstaben l und m der Characteristik $\mathrm{lm}\,u$ sind die Anfangs-Buchstaben von logarithmus modularis. Die Charaktere lm und $\mathfrak{Lm}$ sind hinlänglich unterschieden von den einfachen Zeichen l und $\mathfrak{L}$, wodurch nach §. 37. der Theorie der Potenzial-Functionen hyperbolische Arcus auf cyklische und umgekehrt zurückgebracht werden.

Setzt man in der Formel (1.) $-u$ für u, so erhält man $\mathrm{lm}(-u) = \int_0 \mathrm{el}(-u).\partial(-u)$; und da $\mathrm{el}(-u) = -\mathrm{el}u$ ist, so erhält man:

3. $\mathrm{lm}(-u) = \mathrm{lm}u$, und eben so $\mathfrak{Lm}(-u) = \mathfrak{Lm}u$.

Wird also statt eines Argumentes das gleich grofse entgegengesetzte genommen, so wird der Modular-Logarithme desselben nicht geändert.

Setzt man ui für u, so hat man $\mathrm{lm}(ui) = \int_0 i\partial u.\mathrm{el}(ui)$; da aber $\mathrm{el}(ui) = i.\mathfrak{El}u$ und $i^2 = -1$ ist, so erhalten wir:

$$\mathrm{lm}(ui) = -\int_0 \partial u.\mathfrak{El}u,$$

und also der Formel (2.) gemäfs:

4. $\mathrm{lm}(ui) = -\mathfrak{Lm}u$; eben so findet man $\mathfrak{Lm}(ui) = -\mathrm{el}u$.

Die Modular-Logarithmen werden also nicht imaginär, wenn man auch ui statt des Argumentes u setzt; sie befolgen in dieser Beziehung ein ähnliches Gesetz wie die Functionen $\log\frac{1}{\cos u}$ und $\log\mathfrak{Cos}u$, denn es ist bekanntlich $\log\frac{1}{\cos(ui)} = \log\frac{1}{\mathfrak{Cos}u}$, oder

$$\log\frac{1}{\cos(ui)} = -\log\mathfrak{Cos}u \quad \text{und} \quad \log\mathfrak{Cos}(ui) = -\log\frac{1}{\cos u}.$$

Multiplicirt man die Gleichungen (5.) des §. 70. mit ∂u, und integrirt man gliedweise, so erhält man die Formeln:

5. $$\begin{cases} \mathfrak{Lm}'u + \mathrm{lm}u = \frac{u^2}{2} + \log\frac{1}{\mathrm{cn}u} = \frac{u^2}{2} + \log\mathfrak{Cn}'u, \\ \mathfrak{Lm}u + \mathrm{lm}'u = \frac{u^2}{2} + \log\mathfrak{Cn}u = \frac{u^2}{2} + \log\frac{1}{\mathrm{cn}'u}, \end{cases}$$

wodurch die beiden Nebenformen der Modular-Logarithmen, wenn ihre Modul conjugirt sind, ohne Hülfe des Imaginären auf einander zurückgebracht sind. Schon in diesen Relationen zeigen sich die natürlichen Logarithmen.

Wegen der Einfachheit des durch die Formeln (4.) und (5.) ausgedrückten Zusammenhanges unter den cyklischen und hyperbolischen Modular-Logarithmen, werden wir uns im Folgenden gröfsten Theiles auf die Betrachtung der cyklischen Modular-Logarithmen beschränken.

Multiplicirt man die zweite der Formeln (5.) mit -1, und setzt man für $-\mathfrak{Lm}u$ seinen Werth $\mathrm{lm}(ui)$ der Formel (4.) gemäfs an die Stelle, so hat man

6. $$\mathrm{lm}(ui) = \mathrm{lm}'u - \frac{u^2}{2} - \log\frac{1}{\mathrm{cn}'u},$$

und diese Formel dient als Fundamental-Formel für die nachfolgende Betrachtung der cyklischen Modular-Logarithmen solcher Argumente, welche ganz oder zum Theil imaginär sind.

§. 73.

Relation unter den Modular-Logarithmen $\mathrm{lm}(a \pm u)$, $\mathrm{lm}\, a$ und $\mathrm{lm}\, u$. Entwicklung des Modular-Logarithmen eines Trinoms.

Es ist nach §. 65.

$$\mathrm{el}(a+u) - \mathrm{el}(a-u) = 2\,\mathrm{el}\, u + \frac{-2k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}\, u\,\mathrm{cn}\, u\,\mathrm{dn}\, u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u};$$

wird diese Gleichung mit ∂u multiplicirt, so erhält man

$$\partial u.\,\mathrm{el}(a+u) - \partial u.\,\mathrm{el}(a-u) = 2\partial\,\mathrm{lm}\, u + \partial \log(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u).$$

Da ferner $\partial\,\mathrm{lm}(a+u) = \partial u.\,\mathrm{el}(a+u)$ und $\partial\,\mathrm{lm}(a-u) = -\,\mathrm{el}(a-u).\,\partial u$ ist, so erhält man durch Integration

$$\mathrm{lm}(a+u) + \mathrm{lm}(a-u) = \text{const.} + 2\,\mathrm{lm}\, u + \log(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u).$$

Setzt man, um die Constante zu bestimmen, $u = 0$, so findet sich const. $= 2\,\mathrm{lm}\, a$; es ist also

1. $$\mathrm{lm}(a+u) + \mathrm{lm}(a-u) = 2\,\mathrm{lm}\, a + 2\,\mathrm{lm}\, u + \log(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u).$$

Setzt man in dieser Formel $a = K$, so hat man

2. $$\mathrm{lm}(K+u) + \mathrm{lm}(K-u) = 2\,\mathrm{lm}\, K + 2\,\mathrm{lm}\, u + 2\log \mathrm{dn}\, u,$$

und setzt man $a = u$, so entsteht

3. $$\mathrm{lm}\, 2u = 4\,\mathrm{lm}\, u + \log(1-k^2\,\mathrm{sn}^4 u).$$

Nach §. 66. ist $\mathrm{el}(K+u) + \mathrm{el}(K-u) = 2E$. Multiplicirt man diese Gleichung mit ∂u, und integrirt man, so entsteht, da $\partial u = \partial(K+u) = -\partial(K-u)$ ist, die Gleichung

4. $$\frac{\mathrm{lm}(K+u) - \mathrm{lm}(K-u)}{2} = E.u.$$

Eine Constante braucht nicht hinzugefügt zu werden, da jede Seite der Gleichung für $u = 0$ verschwindet.

Setzen wir in dieser Formel $u = K$, so erhalten wir

5. $$\mathrm{lm}(2K) = 2E.K.$$

Setzen wir aber ui für u, so entsteht die Gleichung

6. $$\frac{\mathrm{lm}(K+ui) - \mathrm{lm}(K-ui)}{2i} = E.u.$$

Setzt man in der Gleichung (3.) $u = K$, so erhält man $\mathrm{lm}(2K) = 4\,\mathrm{lm}\, K + 2\log k'$, daher ist

7. $$\mathrm{lm}\, K = \frac{EK}{2} + \log\sqrt{\frac{1}{k'}}.$$

Wird die Gleichung (2.) durch 2 dividirt, und der so eben gefundene Werth substituirt, so erhält man

$$8.\quad \frac{\operatorname{lm}(K+u)+\operatorname{lm}(K-u)}{2} = \frac{EK}{2} + \operatorname{lm} u + \log\left(\frac{\operatorname{dn} u}{\sqrt{k'}}\right).$$

Hieraus und aus (4.) erhält man durch Addition und Subtraction

$$9.\quad \begin{cases} \operatorname{lm}(K-u) = \operatorname{lmc} u = \frac{EK}{2} + \operatorname{lm} u + \log\left(\frac{\operatorname{dn} u}{\sqrt{k'}}\right) - E.u \quad \text{und} \\ \operatorname{lm}(K+u) = \operatorname{lmc}(-u) = \frac{EK}{2} + \operatorname{lm} u + \log\left(\frac{\operatorname{dn} u}{\sqrt{k'}}\right) + E.u. \end{cases}$$

Eine Relation unter Modular-Logarithmen, welche noch allgemeiner als die Formel (1.) ist, läfst sich auf folgende Art herleiten. Multiplicirt man die Gleichung (6.) des §. 65. mit ∂a und integrirt man, so erhält man

$$\operatorname{lm}(u+v+a) =$$
$$\operatorname{lm}(u+a)+\operatorname{lm}(v+a)-\operatorname{lm} a-\log(1+k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+v+a))+\text{const.}$$

Setzt man, um die Constante zu finden, $a=0$, so hat man

$$\operatorname{lm}(u+v) = \operatorname{lm} u + \operatorname{lm} v + \text{const.}$$

und also

$$10.\quad \operatorname{lm}(u+v+a) = \operatorname{lm}(u+a)+\operatorname{lm}(v+a)+\operatorname{lm}(u+v)-\operatorname{lm} u-\operatorname{lm} v-\operatorname{lm} a$$
$$-\log(1+k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+v+a)).$$

Setzt man in dieser Formel $u=b$ und $v=-b$, so verwandelt sie sich in die frühere Formel (1.); setzt man $-a$ für a, und beachtet man, dafs $\operatorname{lm}(-a)=\operatorname{lm}(+a)$ ist, so erhält man

$$\operatorname{lm}(u+v-a) = \operatorname{lm}(u-a)+\operatorname{lm}(v-a)+\operatorname{lm}(u+v)-\operatorname{lm} u-\operatorname{lm} v-\operatorname{lm} a$$
$$-\log(1-k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+v-a)).$$

Wird diese Gleichung von der früheren subtrahirt, so erhält man

$$11.\quad [\operatorname{lm}(u+v+a)-\operatorname{lm}(u+a)-\operatorname{lm}(v+a)]$$
$$-[\operatorname{lm}(u+v-a)-\operatorname{lm}(u-a)-\operatorname{lm}(v-a)]$$
$$= -\log\frac{1+k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+v+a)}{1-k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+v-a)}.$$

Zusatz. Setzt man in der Formel (3.) $u=\frac{1}{2}K$, so erhält man zunächst $4.\operatorname{lm}\frac{1}{2}K = \operatorname{lm} K + \log\left(\frac{1}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{1}{2}K}\right)$; da aber $\operatorname{sn}^2\frac{1}{2}K = \frac{1}{1+k'}$, also $k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{1}{2}K = \frac{1-k'^2}{(1+k')^2} = \frac{1-k'}{1+k'}$ und $1-k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{1}{2}K = \frac{2k'}{1+k'}$ ist, so erhalten wir

$$4.\operatorname{lm}\frac{K}{2} = \frac{EK}{2} + \log\sqrt{\frac{1}{k'}} + \log\frac{1+k'}{2k'} \quad \text{oder} \quad \operatorname{lm}\frac{K}{2} = \frac{EK}{8} + \tfrac{1}{4}\log\left(\frac{1+k'}{2\sqrt{k'^3}}\right).$$

§. 74.

Entwicklung von $\mathrm{lm}(u \pm 2mK)$ und reelles periodisches Verhalten des Ausdrucks $\mathrm{lm}\,u - \frac{E}{K} \cdot \frac{u^2}{2}$.

Setzt man in der Formel (4.) des §. 73. jetzt $K \mp u$ für u, so verwandelt sie sich in:

1. $\mathrm{lm}(2K-u) = \mathrm{lm}\,u + 2E(K-u)$ und $\mathrm{lm}(2K+u) = \mathrm{lm}\,u + 2E(K+u)$.

Aus der letzten Formel leiten wir noch eine allgemeinere her, indem wir darin nach einander $u+2K$, $u+4K$, $u+6K$ etc. für u setzen; addiren wir aber die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{lm}(u+2K) &= \mathrm{lm}\,u + 2E.(u+K),\\
\mathrm{lm}(u+4K) &= \mathrm{lm}(u+2K) + 2E.(u+3K),\\
\mathrm{lm}(u+6K) &= \mathrm{lm}(u+4K) + 2E.(u+5K),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathrm{lm}(u+2mK) &= \mathrm{lm}(u+2(m-1)K) + 2E.(u+(2m-1)K),
\end{aligned}$$

in welchen die unter einander stehenden zweiten Glieder, welche den gemeinschaftlichen Factor $2E$ haben, eine arithmetische Progression ausmachen und also dadurch summirt werden, dafs man die halbe Summe der beiden äufsersten Glieder mit der Anzahl der Glieder multiplicirt. So erhält man die Formel:

$$2.\quad \mathrm{lm}(u+2mK) = \mathrm{lm}\,u + 2E.(mu+m^2K),$$

in welcher m eine beliebige positive oder negative *ganze* Zahl vorstellt. Dafs diese Formel nämlich auch dann gilt, wenn m eine negative ganze Zahl bedeutet, läfst sich kurz so zeigen. Setzt man in der Formel (2.) $-u$ für u, so erhält man:

$$\mathrm{lm}(-u+2mK) = \mathrm{lm}\,u + 2E.(-mu+m^2K),$$

Da nun aber $-u+2mK = -(u-2mK)$ und also auch $\mathrm{lm}(-u+2mK) = \mathrm{lm}(u-2mK)$ ist, so erhält man:

$$\mathrm{lm}(u-2mK) = \mathrm{lm}\,u + 2E.(-mu+m^2K),$$

also dieselbe Formel, welche man auch erhält, wenn man $-m$ statt m in der Gleichung (2.) setzt. Der Gleichung (2.) gemäfs ist:

$$\mathrm{lm}(u+2mK) = \mathrm{lm}\,u + E(2mu+2m^2K)$$

oder

$$\mathrm{lm}(u+2mK) = \mathrm{lm}\,u + \frac{E}{2K}(4muK+4m^2K^2).$$

Da aber $(u+2mK)^2 = u^2+4muK+4m^2K^2$, und also auch

$$4muK+4m^2K^2 = (u+2mK)^2-u^2$$

ist, so erhält man durch die Substitution dieses Ausdrucks die Gleichung

$$\mathrm{lm}(u+2mK)-\frac{E}{2K}(u+2mK)^2 = \mathrm{lm}\,u-\frac{E}{2K}.u^2.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite enthält ganz eben so das Argument $u+2mK$, wie der auf der rechten Seite das Argument u, und da diese Ausdrücke sich gleich sind, so haben wir also den Satz:

Der Ausdruck $\mathrm{lm}\,u-\frac{E}{K}.\frac{u^2}{2}$ *ändert seinen Werth nicht, wenn man das Argument* u *in ihm um ein beliebiges Vielfaches von* $2K$ *vermehrt, oder auch vermindert; er ist also eine periodische Function mit reellen Perioden; der Umfang einer jeden Periode ist* $=2K$.

§. 75.

Entwicklung von $\mathrm{lm}(K\pm ui)$ und $\mathrm{lm}(K\pm iK')$.

Nach Formel (11.) des §. 67. ist $\mathrm{el}(K-ui)=E-i(u+\mathrm{elc}'u-E')$; multiplicirt man diese Gleichung mit $\partial(-ui)=-i\partial u$, so erhält man:

$$\partial(K-ui).\mathrm{el}(K-ui) = -iE.\partial u-(u\partial u+\mathrm{elc}'u.\partial u-E'.\partial u)$$

und durch Integration entsteht hieraus

$$\mathrm{lm}(K-ui) = \text{const.}-iE.u-\left(\frac{u^2}{2}-\mathrm{lm}'(K'-u)-E.u\right)$$

oder auch

$$\mathrm{lm}(K-ui) = \text{const.}-E.ui-\frac{u^2}{2}+\mathrm{lmc}'u+E'.u,$$

wenn wir $\mathrm{lmc}u$ für $\mathrm{lm}(K-u)$, also auch $\mathrm{lmc}'u$ für $\mathrm{lm}'(K'-u)$ schreiben. Setzen wir, um die Constante zu finden, $u=0$, so erhalten wir:

$$\mathrm{lm}\,K = \text{const.}+\mathrm{lm}'K', \quad \text{also} \quad \text{const.} = \mathrm{lm}\,K'-\mathrm{lm}'K'.$$

Da nach §. 73. ist $\mathrm{lm}\,K=\frac{EK}{2}+\log\sqrt{\frac{1}{k'}}$, also $\mathrm{lm}'K'=\frac{E'K'}{2}+\log\sqrt{\frac{1}{k}}$, so erhalten wir $\text{const.}=\frac{EK-E'K'}{2}+\log\sqrt{\frac{k}{k'}}$, und es ist also:

$$1.\quad \begin{cases} \mathrm{lmc}(ui) = \mathrm{lm}(K-ui) \\ = \frac{EK-E'K'}{2}+\log\sqrt{\frac{k}{k'}}+\mathrm{lmc}'u+E'.u-\frac{u^2}{2}-E.ui \\ \mathrm{lmc}(-ui) = \mathrm{lm}(K+ui) \\ = \frac{EK-E'K'}{2}+\log\sqrt{\frac{k}{k'}}+\mathrm{lmc}'u+E'.u-\frac{u^2}{2}+E.ui. \end{cases}$$

Substituirt man für $\mathrm{lmc}'u$ der Gleichung (9.) des §. 73. gemäfs den Werth

$$\mathrm{lmc}'u = \frac{E'K'}{2}+\mathrm{lm}'u+\log\left(\frac{\mathrm{dn}'u}{\sqrt{k}}\right)-E'.u,$$

so erhält man die noch einfacheren Ausdrücke:

$$2.\quad \begin{cases} \mathrm{lm}(K-ui) = \frac{EK}{2} + \mathrm{lm}'u + \log\left(\frac{\mathrm{dn}'u}{\sqrt{k'}}\right) - \frac{u^2}{2} - E.ui, \\ \mathrm{lm}(K+ui) = \frac{EK}{2} + \mathrm{lm}'u + \log\left(\frac{\mathrm{dn}'u}{\sqrt{k'}}\right) - \frac{u^2}{2} + E.ui. \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln (1.) noch $u = K'$, so entsteht

$$\mathrm{lm}(K \mp iK') = \frac{EK - E'K' - K'^2}{2} + E'K' + \log\sqrt{\frac{k}{k'}} \mp EK'.i,$$

oder also

$$3.\quad \begin{cases} \mathrm{lm}(K-iK') = \frac{EK + E'K' - K'^2}{2} + \log\sqrt{\frac{k}{k'}} - EK'.i, \\ \mathrm{lm}(K+iK') = \frac{EK + E'K' - K'^2}{2} + \log\sqrt{\frac{k}{k'}} + EK'.i. \end{cases}$$

Die Formeln (2.) lassen sich auch also herleiten. Setzt man in den Formeln (9.) des §. 73. ui für u, wodurch sich $\mathrm{dn}\,u$ verwandelt in $\frac{\mathrm{dn}'u}{\mathrm{cn}'u}$, so erhalten wir

$$\mathrm{lm}(K \pm ui) = \frac{EK}{2} + \mathrm{lm}(ui) + \log\left(\frac{\mathrm{dn}'u}{\sqrt{k'}}\right) \pm E.ui + \log\frac{1}{\mathrm{cn}'u};$$

und da nach Formel (6.) des §. 72. ist $\mathrm{lm}(ui) + \log\left(\frac{1}{\mathrm{cn}'u}\right) = \mathrm{lm}'u - \frac{u^2}{2}$, so erhält man durch die Substitution dieses Werthes augenblicklich die Formeln (2.), woraus die Formeln (1.) leicht herzuleiten sind.

§. 76.

Zusammenhang zwischen den beiden Modular-Quadranten K und K' und den beiden elliptischen Quadranten E und E'.

Setzt man in der Gleichung (6.) des §. 72. für u an die Stelle $K'-u$, so erhält man:

$$\mathrm{lm}(iK'-ui) = \mathrm{lm}'(K'-u) - \frac{(K'-u)^2}{2} - \log\left(\frac{1}{\mathrm{cn}'(K'-u)}\right);$$

eben so ist

$$\mathrm{lm}(iK'+ui) = \mathrm{lm}'(K'+u) - \frac{(K'+u)^2}{2} - \log\left(\frac{1}{\mathrm{cn}'(K'+u)}\right);$$

und da $\mathrm{cn}'(K'+u) = -\mathrm{cn}'(K'-u)$ ist, so erhält man, wenn die obere Gleichung von der unteren subtrahirt wird:

$$\mathrm{lm}(iK'+ui) - \mathrm{lm}(iK'-ui) = 2E'u - 2K'u - \log\left(\frac{1}{-1}\right),$$

da nach Formel (4.) des §. 73. ist $\mathrm{lm}'(K'+u) - \mathrm{lm}'(K'-u) = 2E'.u$. Setzt man in dieser Formel $\frac{u}{i} = -ui$ für u, und beachtet man, dafs

$\log(-1) = \pi i$ ist, so erhält man:

$$\mathrm{lm}(u+iK') - \mathrm{lm}(iK'-u) = 2i(K'-E')u + \pi i,$$

oder auch, da $\mathrm{lm}(iK'-u) = \mathrm{lm}(u-iK')$ ist,

$$1. \quad \frac{\mathrm{lm}(u+iK') - \mathrm{lm}(u-iK')}{2i} = (K'-E')u + \tfrac{1}{2}\pi.$$

Setzt man in dieser Formel noch $u = K$, so verwandelt sie sich in:

$$\frac{\mathrm{lm}(K+iK') - \mathrm{lm}(K-iK')}{2i} = (K'-E').K + \tfrac{1}{2}\pi;$$

aber aus den Gleichungen (3.) des §. 75. erhält man durch die Subtraction auch

$$\frac{\mathrm{lm}(K+iK') - \mathrm{lm}(K-iK')}{2i} = EK',$$

und diese beiden verschiedenen Darstellungen derselben Gröfse geben also die Gleichung:

$$EK' = (K'-E')K + \tfrac{1}{2}\pi,$$

oder auch

$$2. \quad EK' + E'K - KK' = \tfrac{1}{2}\pi,$$

wodurch eine Relation unter den vier Quadranten K, K', E, E' ausgedrückt wird, welche sehr oft zur Anwendung kommt, und zuerst von *Legendre* auf einem ganz anderen Wege gefunden worden ist. Es läfst sich diese Formel auch auf die beiden folgenden Weisen darstellen:

$$\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} - 1 = \frac{\pi}{2KK'} \quad \text{und} \quad E'K = (K-E).K' + \tfrac{1}{2}\pi.$$

Wenn nur überhaupt bekannt ist, dafs das Product $E'K$ von dem Producte $(K-E)K'$ nur um eine Constante c verschieden ist, so läfst sich diese Constante c leicht finden; denn setzt man

$$E'K = (K-E)K' + c,$$

und verringert man immer mehr den Modul k, so nähern sich K und E der Grenze $\frac{1}{2}\pi$, also $K-E$ der Grenze Null, ferner nähert sich E' der Grenze 1, und da sich K' dem Logarithmen von $\frac{1}{0}$ nähert, so nähert sich das Product $(K-E).K'$ dennoch der Grenze Null, und es entsteht also

$$E'.K = 1.\tfrac{1}{2}\pi = c,$$

wodurch also die Constante c bestimmt ist. Diese Nachweisung schien noch nothwendig, weil wir die Constante $\frac{1}{2}\pi$ in der Gleichung (2.) aus der Formel $\log(-1) = \pi i$ hergeleitet haben, da doch überhaupt $\log(-1) = \pi i + 2\pi mi$ ist, wenn unter m eine beliebige positive oder negative ganze Zahl verstanden wird.

Zusatz. Ist der Modul $k = k' = \sqrt{\frac{1}{2}}$, so ist auch $E = E'$ und $K = K'$; daher verwandelt sich nun die allgemeine Formel in $2E.K - K^2 = \frac{1}{2}\pi$ und hieraus folgt

$$E = \tfrac{1}{2}K + \frac{\pi}{4K} = \tfrac{1}{2}\left(K + \frac{\frac{1}{2}\pi}{K}\right).$$

§. 77.

Entwicklung von $\mathrm{lm}(u + iK')$.

Setzt man in der Gleichung (6.) des §. 72. wieder $K' + u$ für u, wodurch man (wie im §. 76.) erhält

$$\mathrm{lm}(iK' + ui) = \mathrm{lm}'(K' + u) - \frac{(K'+u)^2}{2} - \log\left(\frac{1}{\mathrm{cn}'(K'+u)}\right),$$

und setzt man hierin $\frac{u}{i} = -ui$ für u, so erhält man

$$\mathrm{lm}(u + iK') = \mathrm{lm}'(K' - ui) - \frac{(K'-ui)^2}{2} - \log\frac{1}{\mathrm{cn}'(K'-ui)}.$$

Da aber nach §. 26 ist $\mathrm{cnc}'(ui) = \frac{ik}{k'}\,\mathrm{cnc}\,u = \frac{ik\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}$, so erhält man, da $\log i = \frac{1}{2}\pi i$ ist, zunächst

$$\mathrm{lm}(u + iK') = \mathrm{lm}'(K' - ui) - \frac{(K'-ui)^2}{2} - \log\left(\frac{\mathrm{dn}\,u}{k\,\mathrm{sn}\,u}\right) + \frac{\pi i}{2}.$$

Substituirt man hierin für $\mathrm{lm}'(K' - ui)$ den Werth $\frac{E'K'}{2} + \mathrm{lm}\,u + \log\frac{\mathrm{dn}\,u}{\sqrt{k}} - \frac{u^2}{2} - E'ui$ und für $-\frac{(K'-ui)^2}{2}$ den Werth $-\frac{K'^2}{2} + K'ui + \frac{u^2}{2}$, so erhält man, wenn man die sich aufhebenden Glieder wegläfst,

$$\mathrm{lm}(u + iK') = \frac{E'K' - K'^2}{2} + \mathrm{lm}\,u + (K' - E')ui + \log(k\,\mathrm{sn}\,u) - \log\sqrt{k} + \frac{\pi i}{2},$$

oder auch

$$\mathrm{lm}(u + iK') = -\frac{K'(K'-E')}{2} + \mathrm{lm}\,u + \log(\mathrm{sn}\,u.\sqrt{k}) + i((K'-E')u + \tfrac{1}{2}\pi),$$

$$\mathrm{lm}(u - iK') = -\frac{K'(K'-E')}{2} + \mathrm{lm}\,u + \log(\mathrm{sn}\,u.\sqrt{k}) - i((K'-E')u + \tfrac{1}{2}\pi).$$

Wird die untere Gleichung von der oberen subtrahirt, so erhält man wieder die Formel (1.) im §. 76.; woraus wir *Legendre's* berühmtes Theorem hergeleitet haben.

Es können diese beiden Formeln auch auf folgende Art gefunden werden. Nach §. 67. Formel (15.) ist $\mathrm{el}(u + iK') = \mathrm{el}\,u + \frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u} + i(K' - E')$. Multiplicirt man diese Gleichung mit ∂u, und integrirt, so findet sich

$$\mathrm{lm}(u + iK') = \text{const.} + \mathrm{lm}\,u + \log\mathrm{sn}\,u + i(K' - E')u.$$

Die Constante kann nun nicht dadurch gefunden werden, dafs man $u=0$ setzt, wohl aber, indem man $u=K$ setzt; dadurch erhält man

$$\text{const.} = \operatorname{lm}(K+iK') - \operatorname{lm} K - i(K'-E')K.$$

Werden hierin die Werthe von $\operatorname{lm}(K+iK')$ aus §. 75. und von $\operatorname{lm} K$ aus §. 73. substituirt, so erhält man dieselbe Formel, wie oben.

§. 78.

Entwicklung von $\operatorname{lm}\left(u+\frac{iK'}{2}\right)$, $\operatorname{lm}\left(\frac{iK'}{2}\right)$ und $\operatorname{lm}\left(\frac{K+iK'}{2}\right)$.

Nach §. 73. Formel (3.) ist $4.\operatorname{lm} u = \operatorname{lm} 2u - \log(1-k^2\operatorname{sn}^4 u)$; ferner ist nach §. 32. $\operatorname{sn}^2 u = \frac{1-\operatorname{cn} 2u}{1+\operatorname{dn} 2u}$ und $k\operatorname{sn}^2 u = \frac{1-\operatorname{dn} 2u}{1+\operatorname{cn} 2u}$, also $k^2\operatorname{sn}^4 u = \frac{(1-\operatorname{cn} 2u)(1-\operatorname{dn} 2u)}{(1+\operatorname{cn} 2u)(1+\operatorname{dn} 2a)}$, und folglich $1-k^2\operatorname{sn} u = \frac{2(\operatorname{cn} 2u+\operatorname{dn} 2u)}{(1+\operatorname{cn} 2u)(1+\operatorname{dn} 2u)}$. Hiernach verwandelt sich die Formel in

$$4.\operatorname{lm} u = \operatorname{lm} 2u + \log\frac{(1+\operatorname{cn} 2u)(1+\operatorname{dn} 2u)}{2(\operatorname{cn} 2u+\operatorname{dn} 2u)} \quad \text{oder}$$

$$4\operatorname{lm}\frac{u}{2} = \operatorname{lm} u + \log\frac{(1+\operatorname{cn} u)(1+\operatorname{dn} u)}{2(\operatorname{cn} u+\operatorname{dn} u)}.$$

Setzt man in dieser Formel $u+iK'$ für u, so verwandelt sich $\operatorname{cn} u$ in $\frac{-i\operatorname{dn} u}{k\operatorname{sn} u}$ und $\operatorname{dn} u$ in $\frac{-i\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}$; also verwandelt sich der Bruch

$$\frac{(1+\operatorname{cn} u)(1+\operatorname{dn} u)}{2(\operatorname{dn} u+\operatorname{cn} u)} \text{ in } \frac{(k\operatorname{sn} u - i\operatorname{dn} u)(\operatorname{cn} u+i\operatorname{sn} u)}{2(\operatorname{dn} u+k\operatorname{cn} u)\operatorname{sn} u}.$$

Wird nun auch für $\operatorname{lm}(u+iK')$ sein Werth aus §. 77. substituirt, so heben sich die Glieder $+\log\operatorname{sn} u$ und $-\log\operatorname{sn} u$ auf und man erhält:

$$4\operatorname{lm}\left(\frac{u+iK'}{2}\right) = -\frac{K'(K'-E')}{2} + \operatorname{lm} u + \log\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right) + \log(k\operatorname{sn} u - i\operatorname{dn} u) + \log(\operatorname{cn} u + i\operatorname{sn} u - \log(\operatorname{dn} u + k\operatorname{cn} u) + i((K'-E')u + \tfrac{1}{2}\pi).$$

Da aber $\log(k\operatorname{sn} u - i\operatorname{dn} u) = i\arcsin(\operatorname{dn} u) = i\arccos(k\operatorname{sn} u)$ und $\log(\operatorname{cn} u + i\operatorname{sn} u) = i\operatorname{am} u$ ist, so erhält man:

$$4\operatorname{lm}\left(\frac{u+iK'}{2}\right) = -\frac{K'(K'-E')}{2} + \log\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right) - \log(\operatorname{dn} u + k\operatorname{cn} u) + \operatorname{lm} u + i(\tfrac{1}{2}\pi - \arccos(k\operatorname{sn} u) + \operatorname{am} u + (K'-E')u),$$

und da $\frac{1}{2}\pi - \arccos(k\operatorname{sn} u) = \arcsin(k\operatorname{sn} u)$ ist, so reducirt sich der Ausdruck auf den einfacheren

$$1.\quad \operatorname{lm}\left(\frac{u+iK'}{2}\right) = -\frac{K'(K'-E')}{8} + \tfrac{1}{4}\log\left(\frac{\sqrt{k}}{2\operatorname{dn} u + 2k\operatorname{cn} u}\right) + \frac{\operatorname{lm} u}{4} + i\left(\frac{\arcsin(k\operatorname{sn} u) + \operatorname{am} u + (K'-E')u}{4}\right),$$

in welchem auch noch $\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$ für $\arcsin(k\operatorname{sn} u)$ gesetzt werden kann.

Hieraus erhält man noch für $u=0$ das particuläre und reelle Resultat:

$$2.\quad \mathrm{lm}\left(\frac{iK'}{2}\right) = -\frac{K'(K'-E')}{8} + \tfrac{1}{4}\log\left(\frac{\sqrt{k}}{2(1+k)}\right),$$

und für $u=K$ findet sich ein zweites, aber imaginäres Resultat

$$\mathrm{lm}\left(\frac{K+iK'}{2}\right) = -\frac{K'(K'-E')}{8} + \log\sqrt[4]{\frac{\sqrt{k}}{2k'}} + \frac{EK}{8} + \log\sqrt[4]{\frac{1}{\sqrt{k'}}}$$
$$+i\left[\frac{\arcsin(k)}{4} + \tfrac{1}{4}((K'-E')K + \tfrac{1}{2}\pi)\right],$$

welches sich noch zusammenziehen läfst auf

$$3.\quad \mathrm{lm}\left(\frac{K+iK'}{2}\right) = \frac{EK+E'K'-K'^2}{8} + \log\sqrt[4]{\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{k'}{k^3}}\right)} + \tfrac{1}{4}i(\arcsin(k)+EK).$$

§. 79.

Entwicklung von $\mathrm{lm}(u+2niK')$ und periodisches Verhalten des Ausdrucks

$$\mathrm{lm}\,u - \left(1-\frac{E'}{K'}\right)\cdot\frac{u^2}{2}.$$

Es ist dem §. 76. oder auch 77, gemäfs $\mathrm{lm}(u+iK') = \mathrm{lm}(u-iK') + 2i((K'-E')u+\frac{1}{2}\pi)$. Setzt man in dieser Formel $u\pm iK'$ für u, so verwandelt sie sich in

$$1.\quad \mathrm{lm}(u\pm 2iK') = \mathrm{lm}\,u \pm 2i((K'-E')(u\pm iK')+\tfrac{1}{2}\pi),$$

oder auch, wenn man für πi wieder $\log(-1)$ an die Stelle setzt, in

$$\mathrm{lm}(u+2iK') = 2i(K'-E')(u+iK') + \log(-1) + \mathrm{lm}(u)$$
$$\mathrm{lm}(u+4iK') = 2i(K'-E')(u+3iK') + \log(-1) + \mathrm{lm}(u+2iK')$$
$$\mathrm{lm}(u+6iK') = 2i(K'-E')(u+5iK') + \log(-1) + \mathrm{lm}(u+4iK')$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathrm{lm}(u+2niK') = 2i(K'-E')(u+(2n-1)iK') + \log(-1) + \mathrm{lm}(u+(2n-2)iK').$$

Addirt man diese Gleichungen, deren Anzahl $=n$ ist, so erhält man die allgemeinere Formel

$$2.\quad \mathrm{lm}(u+2niK') = \mathrm{lm}\,u + 2i(K'-E')(nu+n^2iK') + \log((-1)^n).$$

Es läfst sich diese Formel auch also darstellen:

$$\mathrm{lm}(u+2niK') = \mathrm{lm}\,u + \frac{(K'-E')}{2K'}(4nuiK' + 4n^2i^2k'^2) + \log((-1)^n),$$

und da $4nuiK' + 4n^2i^2K'^2 = (u+2niK')^2 - u^2$ ist, so verwandelt sich die Formel in:

$$\mathrm{lm}(u+2niK') - \left(1-\frac{E'}{K'}\right)\cdot\frac{(u+2niK')^2}{2} = \mathrm{lm}\,u - \left(1-\frac{E'}{K'}\right)\cdot\frac{u^2}{2} + \log((-1)^n).$$

Abgesehen von dem Gliede $\log((-1)^n)$ enthält der Ausdruck auf der linken Seite eben so das Argument $u+2niK'$, wie der auf der rechten Seite das Argument u; das Glied $\log((-1)^n)$ fällt aber auch weg, wenn man $2n$ für n setzt; denn dann ist $(-1)^n=1$ und also $\log((-1)^n)=\log 1=0$. Daher haben wir den Lehrsatz: *Der Ausdruck* $\operatorname{lm} u-\left(1-\frac{E'}{K'}\right).\frac{u^2}{2}$ *ändert seinen Werth nicht, wenn man das Argument* u *in ihm beliebig oft um* $4iK'$ *vermehrt oder auch vermindert; er ist also periodisch; die Perioden sind aber imaginär, da der Umfang einer jeden* $=4iK'$ *ist.*

Zusatz. Für die hyperbolischen Modular-Logarithmen erhält man leicht die Formeln

$$\operatorname{\mathfrak{Lm}}(u+2nK')=\operatorname{\mathfrak{Lm}} u+2(K'-E')(nu+n^2K')-\log(-1)^n \text{ und}$$

$$\operatorname{\mathfrak{Lm}}(u+2nK')-\left(1-\frac{E'}{K'}\right).\frac{(u+2nK')^2}{2}=\operatorname{\mathfrak{Lm}} u-\left(1-\frac{E'}{K'}\right).\frac{u^2}{2}-\log((-1)^n),$$

welche, wenn n eine gerade Zahl ist, nichts Imaginäres enthalten.

§. 80.

Entwicklung von $\operatorname{lm}(u+2mK+2niK')$ und unzählige daraus abgeleitete periodische Ausdrücke.

Die Entwicklung von $\operatorname{lm}(u+2mK+2niK')$ findet sich durch die Zusammensetzung der Formel (2.) im §. 74. und der Formel (2.) im §. 79. Um die bei dieser Zusammensetzung möglichen Reductionen besser übersehen zu können, eliminiren wir aus der zuletzt genannten Formel den elliptischen Quadranten E'. Da nach *Legendre's* Satze im §. 76. ist: $\frac{E}{K}+\frac{E'}{K'}-1=\frac{\pi}{2KK'}$, oder $\frac{E}{K}-\frac{\pi}{2KK'}=1-\frac{E'}{K'}$, so verwandelt sich jene Formel in

$$\operatorname{lm}(u+2niK')=\operatorname{lm} u+i\left(\frac{2EK'}{K}-\frac{\pi}{K}\right)(nu+n^2iK')+\log((-1)^n),$$

oder, der Umformung am Schlusse des §. 79. gemäfs,

$$\operatorname{lm}(u+2niK')-\frac{E}{2K}(u+2niK')^2+\frac{\pi}{4KK'}(u+2niK')^2$$
$$=\operatorname{lm} u-\frac{E}{2K}u^2+\frac{\pi}{4KK'}.u^2+\log(-1)^n.$$

Setzt man hierin $u+2mK$ für u, so entsteht

$$\operatorname{lm}(u+2mK+2niK')-\frac{E}{2K}(u+2mK+2niK')^2+\frac{\pi}{4KK'}(u+2mK+2niK')^2$$
$$=\operatorname{lm}(u+2mK)-\frac{E}{2K}(u+2mK)^2+\frac{\pi}{4KK}(u+2mK)^2+\log(-1)^n.$$

Da aber nach §. 74. $\mathrm{lm}(u+2m)K-\frac{E}{2K}(u+2mK)^2=\mathrm{lm}\,u-\frac{E}{2K}.u^2$ ist, so erhält man, wenn man der Kürze wegen für den Augenblick setzt:

$$U=\mathrm{lm}\,u-\frac{E}{2K}.u^2 \text{ und}$$

$$U'=\mathrm{lm}(u+2mK+2niK')-\frac{E}{2K}(u+2mK+2niK')^2,$$

durch die Substitution des angegebenen Werthes die Gleichung

$$U'-U+\frac{\pi}{4KK'}(u+2mK+2niK')^2-\frac{\pi}{4KK'}(u+2mK)^2-\log((-1)^n)=0.$$

Durch Entwicklung findet man $(u+2mK+2niK')^2-(u+2mK)^2$ $=4niK'(u+2mK)+4n^2i^2K'^2=4niK'(u+2mK+niK')=$ $2niK'(2u+4mK+2niK')=2niK'(2u+2mK+2niK')+4mniKK'$; und wird dieser Werth substituirt, so verwandelt sich die vorige Gleichung in

$$U'-U+\frac{n\pi i}{2K}(2u+2mK+2niK')+mn\pi i-\log(-1)^n=0.$$

Da nun aber

$$(u+2mK+2niK')^2-u^2=(2u+2mK+2niK')(2mK+2niK')$$

ist, so kann die Gleichung auch also dargestellt werden:

$$U'-U+\frac{n\pi i}{4K(mK+niK')}((u+2mK+2niK')^2-u^2)+\log((-1)^{n(m-1)})=0,$$

wenn man zugleich bedenkt, dafs $mn\pi i=\pm\log(-1)^{mn}$ ist. Setzt man noch aufserdem $\mu=\frac{m}{n}$, und für U und U' die Werthe, so hat man endlich

1. $$\mathrm{lm}(u+2mK+2niK')+\left(\frac{\pi i}{2K(\mu K+iK')}-\frac{E}{K}\right).\frac{(u+2mK+2niK')^2}{2}$$
$$=\mathrm{lm}\,u+\left(\frac{\pi i}{2K(\mu K+iK')}-\frac{E}{K}\right).\frac{u^2}{2}-\log((-1)^{n(m-1)}).$$

Ist nun m eine beliebige ganze Zahl, aber n eine gerade Zahl, oder ist n eine beliebige ganze Zahl, aber m eine ungerade Zahl, so ist in jedem dieser beiden Fälle $\log((-1)^{n(m-1)})=\log(+1)=0$, und der bewiesenen Formel gemäfs bleibt also der Ausdruck $\mathrm{lm}\,u+\left(\frac{\pi i}{K(2\mu K+2iK')}-\frac{E}{K}\right).\frac{u^2}{2}$ ungeändert, wenn darin $u+2mK+2niK'$ für u gesetzt wird, oder also u um $2mK+2niK'$ beliebig oft vermehrt oder auch vermindert wird, sofern nur das Verhältnifs $\mu=\frac{m}{n}$ unverändert bleibt. Der Ausdruck ist insofern periodisch und der Umfang einer jeden Periode $2\mu K+2iK'$, da $2mK+2niK'=n(2\mu K+2iK')$ ist.

Setzt man für μ den Werth $\frac{m}{n}$ in der Formel wieder an die Stelle, und schreibt man für

$$\frac{(u+2mK+2niK')^2-u^2}{2} \text{ wieder } (2u+2mK+2niK')(mK+niK),$$

so verwandelt sich die Formel in

$$\operatorname{lm}(u+2mK+2niK')+\frac{n\pi i(u+mK+niK')-2E(mK+niK')(u+mK+niK')}{K}$$
$$=\operatorname{lm}u-\log((-1)^{n(m-1)}),$$

oder auch

$$2.\quad \operatorname{lm}(u+2mK+2niK')=$$
$$\operatorname{lm}u+\frac{2E(mK+niK')-n\pi i}{K}.(u+mK+niK')+\log((-1)^{n(m-1)}).$$

Setzt man in dieser Formel $n=0$, so erhält man die Gleichung (2.) des §. 74.; setzt man aber $m=0$, so erhält man die Gleichung (2.) des §. 79.

§. 81.

Zurückführung der Modular-Logarithmen mit den Moduln $\frac{1}{k}$ und $\frac{ik}{k'}$ auf eben solche Functionen mit dem Modul k.

Im §. 68. wurde gefunden $\operatorname{el}\left(ku,\frac{1}{k}\right)=\frac{\operatorname{el}u-k'^2.u}{k}$. Wird diese Gleichung mit $k\partial u$ multiplicirt und so integrirt, dafs für $u=0$ beide Seiten der Gleichung verschwinden, so erhält man auf der Stelle die einfache Gleichung

$$1.\quad \operatorname{lm}\left(ku,\frac{1}{k}\right)=\operatorname{lm}u-k'^2.\frac{u^2}{2}.$$

Setzen wir in dieser Formul ku gleich dem Modular-Quadranten $k(K-iK')$ für den Modul $\frac{1}{k}$, so verwandelt sich der Ausdruck auf der rechten Seite in

$$\operatorname{lm}(K-iK')-k'^2.\frac{(K-iK')^2}{2}.$$

Substituiren wir hier in $\operatorname{lm}(K-iK')=\frac{EK+E'K'-K'^2}{2}+\log\sqrt{\frac{k}{k'}}-EK'.i$ (nach §. 75.), und $\frac{k'^2(K-iK')^2}{2}=\frac{k'^2K^2-k'^2K'^2}{2}-ik'^2KK'$, so erhalten wir schon

$$2.\quad \frac{K(E-k'^2K)+K'(E'-k^2K')}{2}+\log\sqrt{\frac{k}{k'}}-iK'(E-k'^2K),$$

als Ausdruck des Werthes, in welchen $\operatorname{lm}K$ *übergeht, wenn* $\frac{1}{k}$ *statt des Moduls* k *gesetzt wird.*

Wir leiten diesen Ausdruck, welchen wir mit $\mathfrak{K}$ bezeichnen, noch auf eine andere Art her. Nach §. 73. Formel (7.) ist $\operatorname{lm} K = \frac{EK}{2} + \log\sqrt{\frac{1}{k'}}$, und dieser Ausdruck muſs in $\mathfrak{K}$ übergehen, wenn man substituirt: $\frac{ik'}{k}$ für k', $\frac{E-k'^2.K+i(E'-k^2K')}{k}$ für E (nach §. 68.) und $k(K-iK')$ für K. Wird diese Substitution ausgeführt, so erhält man:

$$\mathfrak{K} = \frac{K(E-k'^2K)+K'(E'-k^2K')}{3} + \log\sqrt{\frac{k}{k'}} + i\left(\frac{K(E'-k^2K')-K'(E-k'^2K)}{2}\right) - \log\sqrt{i}.$$

Der reelle Theil dieses Ausdrucks, welchen wir mit A bezeichnen, ist

$$A = \frac{K(E-k'^2K)+K'(E'-k^2K')}{2} + \log\sqrt{\frac{k}{k'}}.$$

Er stimmt schon mit dem reellen Theile des Ausdrucks (2.) überein. Setzen wir ferner

$$p = K(E'-k^2K') \quad \text{und} \quad q = K'(E-k'^2K),$$

so ist

$$\mathfrak{K} = A + i\left(\frac{p-q}{2}\right) - \log\sqrt{i} = A + i\left(\frac{p-q}{2}\right) - \frac{\pi i}{4}.$$

Wenn man aber p und q addirt, so erhält man

$$p+q = KE'-k^2KK'+EK'-k'^2KK' = KE'+K'E-KK' = \tfrac{1}{2}\pi$$

nach §. 76.; also ist $p-q = \frac{1}{2}\pi - 2q$; und wird dieser Werth substituirt, so erhält man:

$$\mathfrak{K} = A + \frac{\pi i}{4} - qi - \frac{\pi i}{4} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{K} = A - qi,$$

und dieser Ausdruck ist mit (2.) einerlei, wenn man nur noch für A und q ihre Bedeutungen an die Stelle setzt.

Um nun auch den Modular-Logarithmen, $\operatorname{lm}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right)$ mit dem Modul $\frac{ik}{k'}$ auf den Modul k zurückzuführen, haben wir die Gleichung $\operatorname{el}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{E-\operatorname{elc} u}{k'} = \frac{\operatorname{el} u - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u}{k'}$ des §. 68. mit $k'u$ zu multipliciren, und so zu integriren, dafs das Integral auf beiden Seiten für $u=0$ verschwindet. Dadurch erhalten wir den einfachen Ausdruck

$$3. \quad \operatorname{lm}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \operatorname{lm} u + \log \operatorname{dn} u.$$

Der Modular-Logarithme des Quadranten für den Modul $\frac{ik}{k'}$ ist also $\operatorname{lm} K + \log k'$ oder auch

$$4. \quad \frac{EK}{2} + \log\sqrt{k'}.$$

Achter Abschnitt.

§. 82.

Zusammenhang unter den elliptischen Functionen der Argumente u, $\frac{1}{2}u$ und v mit den Moduln k und λ des §. 51.

Es ist nach §. 51. $\mathrm{dn}^2 v = \frac{2}{1+k'} \cdot \frac{k'+\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}$, oder nach §. 52. $\mathrm{dn}\,v = \frac{\mathrm{dn}\,\frac{1}{2}u + \mathrm{dnc}\,\frac{1}{2}u}{1+k'}$, oder endlich umgekehrt $\mathrm{dn}\,\frac{1}{2}u = \frac{\mathrm{dn}\,v + \lambda\,\mathrm{cn}\,v}{1+\lambda}$, nach §. 53. Von jeder dieser drei Formeln kann man ausgehen, wenn man die gesuchte Relation zwischen den Modular-Integralen der Argumente v und u (oder $\frac{1}{2}u$) mit den Moduln λ und k, welche durch die Gleichungen (1.) und (2.) des §. 51. mit einander verbunden sind, herleiten will. Wir gehen von der letzten Formel aus, weil sie am einfachsten zum Ziele führt, und beziehen also die Function $\mathrm{el}\,v$ auf den Modul λ, die Function $\mathrm{el}\,u$ und $\mathrm{el}(\frac{1}{2}u)$ aber auf den Modul k. Durch Quadrirung erhalten wir

$$\mathrm{dn}^2\tfrac{1}{2}u = \frac{\mathrm{dn}^2 v + 2\lambda\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \lambda^2\,\mathrm{cn}^2 v}{(1+\lambda)^2},$$

oder da $\lambda^2\mathrm{cn}^2 v = \mathrm{dn}^2 v - \lambda'^2$ ist, die wenig veränderte Formel

$$\mathrm{dn}^2\tfrac{1}{2}u = \frac{2\,\mathrm{dn}^2 v + 2\lambda\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v - \lambda'^2}{(1+\lambda)^2}.$$

Da nun aber nach §. 51. $u = (1+\lambda).v$, also auch $\frac{\partial u}{2} = (1+\lambda).\frac{\partial v}{2}$ ist, so verwandelt sich jene Gleichung, wenn sie hiermit multiplicirt und dann integrirt wird, sogleich in die folgende:

$$\mathrm{el}\,\tfrac{1}{2}u = \frac{\mathrm{el}\,v + \lambda\,\mathrm{sn}\,v - \frac{1}{2}\lambda'^2.v}{1+\lambda}$$

oder

$$1.\quad 2.\mathrm{el}\,\tfrac{1}{2}u = \frac{2.\mathrm{el}\,v + 2\lambda\,\mathrm{sn}\,v - \lambda'^2.v}{1+\lambda}.$$

Aus dieser Relation leiten wir einen Ausdruck von $\mathrm{el}\,u$ selbst durch $\mathrm{el}\,v$ her. Da nämlich nach §. 69.

$$2.\mathrm{el}(\tfrac{1}{2}u) = \mathrm{el}\,u + (1-\mathrm{dn}\,u)\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}},\quad \text{oder umgekehrt,}$$

$$\mathrm{el}\,u = 2.\mathrm{el}(\tfrac{1}{2}u) - (1-\mathrm{dn}\,u)\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}}$$

ist, so brauchen wir in den Ausdruck $(1-\mathrm{dn}\,u)\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}}$ nur die Modular-Functionen des Argumentes v einzuführen. Es ist aber nach §. 53.

$$\mathrm{cn}\,u = \frac{\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}{1+\lambda\,\mathrm{sn}^2 v} = \frac{(1-\lambda).\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}{\mathrm{dn}^2 v - \lambda\,\mathrm{cn}^2 v};$$

ferner ist $\operatorname{dn} u = \frac{1-\lambda \operatorname{sn}^2 v}{1+\lambda \operatorname{sn}^2 v}$, also $1-\operatorname{dn} u = \frac{2\lambda \operatorname{sn}^2 v}{1+\lambda \operatorname{sn}^2 v}$, und

$$\operatorname{sn} u = \frac{(1+\lambda)\operatorname{sn} v}{1+\lambda \operatorname{sn}^2 v}, \quad \text{also} \quad \frac{1-\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} = \frac{2\lambda}{1+\lambda}.\operatorname{sn} v.$$

Da nun aber $(1-\operatorname{dn} u).\sqrt{\frac{1-\operatorname{cn} u}{1+\operatorname{cn} u}} = \frac{1-\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}(1-\operatorname{cn} u)$ und also $= \frac{2\lambda}{1+\lambda}\operatorname{sn} v - \frac{2\lambda}{1+\lambda}.\operatorname{sn} v \operatorname{cn} u$ ist, so erhält man durch die Substitution dieses Werthes:

$$2. \quad \begin{cases} \operatorname{el} u = \frac{2.\operatorname{el} v - \lambda'^2.v + 2\lambda \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u}{1+\lambda} & \text{oder} \\ \operatorname{el} u = \frac{2.\operatorname{el} v - \lambda'^2.v + \frac{2\lambda \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{1+\lambda \operatorname{sn}^2 v}}{1+\lambda}. \end{cases}$$

Wir kehren nun auch noch die Formeln (1.) und (2.) um. Der ersten gemäfs ist:

$$(1+\lambda).\operatorname{el}(\tfrac{1}{2}u) + \frac{\lambda'^2 v}{2} - \lambda \operatorname{sn} v = \operatorname{el} v.$$

Da aber $1+\lambda = \frac{2}{1+k'}$, $\lambda'^2 = \frac{4k'}{(1+k')^2}$ und $v = \frac{(1+k')}{2}.u$, also $\frac{\lambda'^2 v}{2} = \frac{k'u}{1+k'}$ und $\lambda \operatorname{sn} v = \sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}\sqrt{\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}} = \frac{k}{1+k'}\sqrt{\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}}$ ist, so verwandelt sich diese Formel in

$$3. \quad \operatorname{el} v = \frac{2.\operatorname{el}\left(\frac{u}{2}\right) + k'.u - k\sqrt{\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}}}{1+k'}.$$

Kehren wir auch die erste der Gleichungen (2.) um, so haben wir zunächst

$$\frac{1+\lambda}{2}.\operatorname{el} u + \frac{\lambda'^2 v}{2} - \lambda \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u = \operatorname{el} v.$$

Da aber $\lambda \operatorname{sn} v = \frac{(1-k')\operatorname{sn} u}{1+\operatorname{dn} u}$ ist, so reducirt sich der Ausdruck auf

$$4. \quad \operatorname{el} v = \frac{\operatorname{el} u + k'u - \frac{k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{1+\operatorname{dn} u}}{1+k'} = \frac{\operatorname{el} u + k'u + \frac{\partial \log(1+\operatorname{dn} u)}{\partial u}}{1+k'}.$$

Die vorstehenden vier Gleichungen drücken nun den Zusammenhang zwischen den Modular-Integralen $\operatorname{el} u$, $\operatorname{el}(\frac{1}{2}u)$ und $\operatorname{el} v$, wovon sich die beiden ersten auf den Modul k beziehen, das letzte aber auf den Modul λ bezieht, aufs vollständigste aus.

Zusatz. Da sich in der Formel (3.) die Function $\operatorname{el}(\frac{1}{2}u)$ auf das Argument $\frac{1}{2}u$, die Modular-Function $\operatorname{dn} u$ aber auf das Argument u selbst bezieht, so mufs die Formel noch geändert werden. Nach §. 32. *a.* ist

aber, wenn man daselbst $2a = u$ setzt, $\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u} = \frac{k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{1}{2}u\,\mathrm{cn}^2\frac{1}{2}u}{\mathrm{dn}^2\frac{1}{2}u}$; daher verwandelt sich die Formel sogleich in

$$3.^* \quad \mathrm{el}\,v = \frac{2.\mathrm{el}(\frac{1}{2}u) + k'u - k^2\,\mathrm{sn}\frac{1}{2}u\,\mathrm{snc}\frac{1}{2}u}{1+k'}.$$

83.

Relation zwischen $\mathrm{el}'u$ und $\mathrm{el}'v$, wenn u, v, und die Moduln k' und λ' dieselben sind wie im §. 51.

Die vier Formeln des §. 82. beziehen sich auf einen Zusammenhang zwischen den beiden Moduln λ und k und den conjugirten λ' und k', welcher durch die vier Gleichungen (1.) des §. 51. ausgedrückt wird. Nach §. 54. darf man aber gleichzeitig λ' für k, λ für k', k' für λ und k für λ' setzen, ohne dafs jene Gleichungen dadurch geändert würden. Nehmen wir auch dieselbe Veränderung mit der Gleichung $v = \frac{1+k'}{2}.u$ oder $u = (1+\lambda)v$ vor, setzen wir aber gleichzeitig v für u, damit die Functionen von v sich demnächst auf den Modul λ' beziehen und bezeichnen wir den dadurch geänderten Werth des früheren v mit x, so verwandelt sich die Gleichung $v = \frac{1+k'}{2}.u$ in $x = \frac{1+\lambda}{2}.v$, und, da $(1+\lambda)v = u$ ist, so ist $x = \frac{1}{2}u$. Man darf daher in den vorstehenden vier Gleichungen gleichzeitig λ' für k, λ für k', k' für λ, k für λ', v für u und $\frac{1}{2}u$ für v setzen, wenn dieselben Aenderungen auch gleichzeitig mit allen Formeln im §. 51., §. 52. und §. 53. vorgenommen werden. Setzt man $2v$ für u, so mufs man u für v setzen, da das Verhältnifs zwischen u und v constant ist. Macht man z. B. in der Gleichung (3.) des §. 82. die angezeigten Abänderungen, so verwandelt sie sich sofort in

$$\mathrm{el}'u = \frac{2\,\mathrm{el}'v + 2\lambda v - \lambda'\sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}'2v}{1+\mathrm{dn}'2v}}}{1+\lambda},$$

oder, weil nach §. 32. *a.* $\sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}'2v}{1+\mathrm{dn}'2v}} = \lambda'\,\mathrm{sn}'v\,\mathrm{snc}'v$ ist, in die folgende:

$$1. \quad \mathrm{el}'u = \frac{2\,\mathrm{el}'v + 2\lambda v - \lambda'^2\,\mathrm{sn}'v\,\mathrm{snc}'v}{1+\lambda}.$$

Die Gleichungen des §. 52. verwandeln sich aber in

$$2.\quad \begin{cases} \mathrm{sn}'u = (1+\lambda)\,\mathrm{sn}'v\,\mathrm{snc}'v, \\ \mathrm{cn}'u = \frac{\mathrm{dn}'v - \mathrm{dnc}'v}{1-\lambda}, \\ \mathrm{dn}'u = \frac{\mathrm{dn}'v + \mathrm{dnc}'v}{1+\lambda}, \\ \mathrm{am}'u = \frac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}'v + \mathrm{am}'v, \\ \mathrm{tn}'u = \frac{(1+\lambda)\,\mathrm{tn}'v}{1-\lambda\,\mathrm{tn}'^2 v} = \frac{\sin 2\,\mathrm{am}'v}{\cos 2\,\mathrm{am}'v + k}. \end{cases}$$

Es wird aber nicht unzweckmäfsig sein, wenn wir die Richtigkeit dieser Gleichungen durch die ausgeführte Rechnung nachweisen. Es ist $\frac{\partial \log \mathrm{dn}'v}{\partial v} = -\lambda'^2\,\mathrm{sn}'v\,\mathrm{snc}'v$, also $\frac{\partial(\lambda'^2\,\mathrm{sn}'v\,\mathrm{snc}'v)}{\partial v} = +\mathrm{dn}'^2 v - \frac{\lambda^2}{\mathrm{dn}'^2 v} = +\mathrm{dn}'^2 v - \mathrm{dnc}'^2 v$ (nach §. 62. Formel 7.). Differenziiren wir also die Gleichung (1.), so bekommen wir $\partial u.\mathrm{dn}'^2 u = \partial v\left(\frac{2\,\mathrm{dn}'^2 v + 2\lambda - \mathrm{dn}'^2 v + \mathrm{dnc}'^2 v}{1+\lambda}\right)$ $= \partial v\left(\frac{\mathrm{dn}'^2 v + 2\lambda + \mathrm{dnc}'^2 v}{1+\lambda}\right) = \frac{\partial v\,(\mathrm{dn}'v + \mathrm{dnc}'v)^2}{1+\lambda}$. Setzen wir aber $\partial u = (1+\lambda).\partial v$, so verwandelt sich diese Gleichung in der That in $\mathrm{dn}'^2 u = \frac{(\mathrm{dn}'v + \mathrm{dnc}'v)^2}{(1+\lambda)^2}$ oder $\mathrm{dn}'u = \frac{\mathrm{dn}'v + \mathrm{dnc}'v}{1+\lambda}$, welche gerade die dritte von den Gleichungen (2.) ist, und woraus die übrigen folgen.

Die Gleichungen $v = \frac{1+k}{2}.u$, oder $u = (1+\lambda)v$, wie auch die Modular-Gleichungen $\lambda = \frac{1-k'}{1+k'}$, $\lambda' = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$, $k' = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$ und $k = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}$ sind wieder dieselben, wie vorhin.

§. 84.

Einfaches Verfahren der Berechnung der elliptischen Quadranten E und E' aus denselben Modular-Zahlen, welche zur Berechnung des Quadranten K dienen.

Bezeichnen wir den Modular-Quadranten für den verkleinerten Modul $\lambda < k$ mit K_1 und den elliptischen Quadranten für eben diesen Modul mit E_1, und setzen wir in der Gleichung (2.) des §. 82. das Argument $v = K_1$, also $u = K$, so verwandelt sich die Function el$u$ in E und el$v$ in E_1; daher haben wir die Gleichung

$$E = \frac{2.E_1 - \lambda'^2.K_1}{1+\lambda} \quad \text{und noch aufserdem} \quad K = (1+\lambda).K_1.$$

Dividirt man jene Gleichung durch diese, so entsteht

$$\frac{E}{K}(1+\lambda)^2 = 2.\frac{E_1}{K_1} - \lambda'^2.$$

Wird das Verfahren der Verkleinerung des Moduls wiederholt, so werden die Gröfsen E, E_1, E_2, E_3 etc. immer gröfser und nähern sich der Grenze $\frac{1}{2}\pi$. Eben so werden die Gröfsen K, K_1, K_2, K_3 etc. immer kleiner, und auch sie nähern sich der Grenze $\frac{1}{2}\pi$. Setzen wir daher

$$t=1-\frac{E}{K};\quad t_1=1-\frac{E_1}{K_1};\quad t_2=1-\frac{E_2}{K_2};\quad t_3=1-\frac{E_3}{K_3}\ \text{etc.},$$

so nähern sich die Gröfsen t, t_1, t_2, t_3, t_4 etc., welche durch fortgesetzte Verkleinerung des Moduls entstehen, sehr rasch der Grenze Null. Führen wir t und t_1 in die obige Gleichung ein, so wird sie

$$(1+\lambda)^2.(1-t) = 2(1-t_1)-\lambda'^2$$

oder

$$t(1+\lambda)^2=2t_1+(1+\lambda)^2+\lambda'^2-2,\ \text{und also}\ t(1+\lambda)^2=2t_1+2\lambda.$$

Setzen wir nun, wie in §. 55., $\lambda=k_1$ und wenden wir überhaupt dieselbe Bezeichnung, wie am angeführten Orte an, so ist $1+\lambda=\frac{2}{1+k'}=\frac{2m}{m+n}=\frac{m}{m_1}$ und $\lambda=\frac{m-n}{m+n}=\frac{m-n}{2m_1}$: folglich ist

$$t,m^2 = 2.t_1.m_1^2+m_1(m-n).$$

Addiren wir aber die Gleichungen

$$\begin{aligned} m^2.t &= 2m_1^2.t_1+(m-n)m_1,\\ 2m_2^2.t_1 &= 4m_2^2.t_2+2(m_1-n_1)m_2,\\ 4m_2^2.t_2 &= 8m_3^2.t_3+4(m_2-n_2)m_3,\\ 8m_3^2.t_3 &= 16m_4^2.t_4+8(m_3-n_3)m_4 \end{aligned}$$

u. s. w.,

so entsteht der Ausdruck

$$\begin{aligned} m^2.t = 2^{r+1}.m_{r+1}^2.t_{r+1}&+(m-n)m_1+2(m_1-n_1)m_2+4(m_2-n_2)m_3\\ &+8(m_3-n_3)m_4\ldots.+2^r.(m_r-n_r).m_{r+1}. \end{aligned}$$

Nimmt man nun r grofs genug, oder eigentlich unendlich grofs, so ist $t_{r+1}=0$, und man erhält, da auch $m^2=1$ ist, die sehr rasch convergirende Reihe

$$1.\quad t=(m-n)m_1+2(m_1-n_1)m_2+4(m_2-n_2)m_3+8(m_3-n_3)m_4+16(m_4-n_4)m_5+\text{etc.}$$

Ist nach dieser Formel t berechnet, so hat man, da $\frac{E}{K}=1-t$ ist,

$$2.\quad E=K-K.t=\frac{\pi}{2\eta}-\frac{\pi}{2\eta}.t,$$

und da nach *Legendre's* Theoreme $\frac{E'}{K'}=\frac{\pi}{2KK'}+1-\frac{E}{K}$ ist, so hat man auch noch

3. $E' = \eta + K'.t,$

in welcher Formel wieder η dieselbe Bedeutung hat, wie im §. 55., der Quadrant K' aber nach der Formel (3.) des §. 57. zu berechnen ist.

Anmerkung. Es ist zwar streng genommen t_{r+1} nur dann $=0$, wenn r unendlich ist; aber bei einem vorgeschriebenen Grade der Genauigkeit, welchem gemäfs der unvermeidliche Fehler $< \frac{1}{10^7}$ sein soll, ist schon t_5 hinlänglich genau $=0$, zumal da, wie wir voraussetzen, der Modul $k < \sin \frac{1}{4}\pi$ ist. Sind die beiden Modular-Quadranten K und K' bereits berechnet, so geht die Berechnung von E und E' aus denselben Modular-Zahlen sehr bequem von Statten.

§. 85.

Zweiter Beweis der Formel $\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} - 1 = \frac{\pi}{2KK'}$.

Setzen wir in den Formeln des §. 83. das Argument $v = K_1'$, also $\mathrm{snc}' v = 0$, so wird $\mathrm{sn}' u = 0$ oder $u = 2K'$, und da $u = (1+\lambda)v$ ist, so ist

$$2K' = (1+\lambda).K_1',$$

und da sich die Formel (1.) des §. 83. nun verwandelt in $2E' = \frac{2E_1' + 2\lambda.K_1'}{1+\lambda}$, so erhalten wir also durch die Division:

$$\frac{E'}{K'}(1+\lambda^2) = 2.\frac{E_1'}{K_1'} + 2\lambda.$$

Da ferner nach §. 84. $t(1+\lambda)^2 = 2.t_1 + 2\lambda$ ist, so erhalten wir, wenn diese Gleichung von der vorigen subtrahirt wird,

$$\left(\frac{E'}{K'} + \frac{E}{K} - 1\right)(1+\lambda)^2 = 2\left(\frac{E_1'}{K_1'} + \frac{E_1}{K_1} - 1\right).$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\mathfrak{K} = \frac{E'}{K'} + \frac{E}{K} - 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}_1 = \frac{E_1'}{K_1'} + \frac{E_1}{K_1} - 1,$$

so ist jene Gleichung:

$$\mathfrak{K}(1+\lambda)^2 = 2.\mathfrak{K}_1.$$

Setzen wir nun wieder $\lambda = k_1$, wie im §. 55., und also $1+\lambda = \frac{2}{1+k!} = \frac{2m}{m+n} = \frac{m}{m_1}$, so ist

$$\mathfrak{K}.m^2 = 2m_1^2.\mathfrak{K}_1,$$

eben so ist

$2\mathfrak{K}_1.m_1^2 = 2^2 m_2^2.\mathfrak{K}_2$, $2^2.\mathfrak{K}_2.m_2^2 = 2^3 m_3^2.\mathfrak{K}_3$, $2^3.\mathfrak{K}_3.m_3^2 = 2^4.m_4^2.\mathfrak{K}$ u. s. w.

Werden diese Gleichungen mit einander multiplicirt, so entsteht

$$\mathfrak{K}.m^2 = 2^r.m_r^2.\mathfrak{K}_r.$$

Ist nun aber r grofs genug, so ist $m_r = \frac{\frac{1}{2}\pi}{K}$; ferner ist $\mathfrak{K}_r = \frac{E'_r}{K'_r} + \frac{E_r}{K_r} - 1$, und da $\frac{E_r}{K_r} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 1$, ferner $E'_r = 1$, also $\mathfrak{K}_r = \frac{1}{K'_r}$ wird, so ist $\mathfrak{K} = 2^r . \frac{(\frac{1}{2}\pi)^2}{K^2} . \frac{1}{K'_r} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{K^2} . 2^r . \frac{K_r}{K'_r}$. Da aber auch nach §. 57. $2^r . \frac{K_r}{K'_r} = \frac{K}{K'}$ ist, so erhalten wir durch die Substitution dieses Werthes: $\mathfrak{K} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{K^2} . \frac{K}{K'}$ oder auch $\mathfrak{K} = \frac{\pi}{2KK'}$; was bewiesen werden sollte.

Zusatz zu §. 85., zu §. 84. und §. 59. Die Gröfse $2^r . m_r$ kann leicht unmittelbar durch die auf einander folgenden immer kleiner werdenden Moduln k, k_1, k_2, k_3, k_4 etc. ausgedrückt werden. Es ist offenbar

$$m_r = \frac{m_1}{m} . \frac{m_2}{m_1} . \frac{m_3}{m_2} \ldots . \frac{m_r}{m_{r-1}}, \text{ oder auch}$$

$$2^r . m_r = \frac{m+n}{m} . \frac{m_1+n_1}{m_1} . \frac{m_2+n_2}{m_2} \ldots . \frac{m_{r-1}+n_{r-1}}{m_{r-1}} \text{ und also}$$

$$1. \quad 2^r . m_r = (1+k')(1+k'_1)(1+k'_2) \ldots (1+k'_{r-1}).$$

Ferner ist $1+k' = \frac{2}{1+k_1}$ und $1+k_1 = \frac{2\sqrt{k_1}}{k}$, also $1+k' = \frac{k}{\sqrt{k_1}}$; eben so ist $1+k'_1 = \frac{k_1}{\sqrt{k_2}}$, u. s. w. Daher erhalten wir durch die Substitution dieser Werthe:

$$2^r . m_r = \frac{k}{\sqrt{k_1}} . \frac{k_1}{\sqrt{k_2}} . \frac{k_2}{\sqrt{k_3}} \ldots . \frac{k_{r-1}}{\sqrt{k_r}} \text{ oder auch}$$

$$2. \quad 2^r . m_r = \frac{k}{k_r} \sqrt{(k_1 k_2 k_3 k_4 \ldots k_r)}.$$

Wir benutzen diese Formel noch zur Umformung der Formel (1.) im §. 84. Erheben wir dieselbe zum Quadrate, so erhalten wir, nach Fortschaffung des Nenners:

$$k^2 . k_1 . k_2 . k_3 \ldots k_r$$

$$= 4^r m_r^2 k_r^2 = 4^r (m_r^2 - m_r^2 k_r'^2) = 4^r (m_r^2 - n_r^2) = 4^r . 2(m_r - n_r) . m_{r+1},$$

und also rückwärts:

$$2^r (m_r - n_r) . m_{r+1} = \frac{k^2 k_1 k_2 k_3 \ldots k_r}{2^{r+1}}.$$

Wird dieser Werth in der Reihe (1.) des §. 84. benutzt, so verwandelt sie sich in

$$t = \frac{k^2}{2} + \frac{k^2 k_1}{4} + \frac{k^2 k_1 k_2}{8} + \frac{k^2 k_1 k_2 k_3}{16} + \frac{k^2 k_1 k_2 k_3 k_4}{32} + \text{etc. oder auch in}$$

$$3. \quad t = \frac{k^2}{2}\left(1 + \frac{k_1}{2} + \frac{k_1 k_2}{4} + \frac{k_1 k_2 k_3}{8} + \frac{k_1 k_2 k_3 k_4}{16} + \frac{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5}{32} + \text{etc.}\right).$$

Ist der Modul k selbst schon sehr klein, so hat man also näherungsweise $t=\frac{k^2}{2}$ oder $t=\frac{k^2}{2}+\frac{k^2 k_1}{2}$; u. s. w. Ferner ist $1+k'=\frac{2\sqrt{k'}}{k'_1}$, $1+k'_1=\frac{2\sqrt{k'_1}}{k'_2}$, $1+k'_2=\frac{2\sqrt{k'_2}}{k'_3}$ u. s. w. Werden diese Werthe in der Formel (1.) substituirt, so verwandelt sie sich in

$$3.\quad m_r=\frac{\sqrt{k'}}{k'_1}\cdot\frac{\sqrt{k'_1}}{k'_2}\cdot\frac{\sqrt{k'_2}}{k'_3}\cdot\ldots\cdot\frac{\sqrt{k'_{r-2}}}{k'_r}=\frac{\sqrt{k'}}{k'_r\sqrt{(k'_1.k'_2.k'_3\ldots.k'_{r-1})}},$$

oder da $m_r.k'_r=n_r$ ist, in den Ausdruck

$$4.\quad n_r=\sqrt{\frac{k'}{k'_1k'_2.k'_3.k'_4\ldots.k'_{r-1}}},$$

woraus, wenn r unendlich genommen wird, folgt:

$$5.\quad \eta=\sqrt{\frac{k'}{k'_1k'_2k'_3k'_4k'_5\ldots.}}=\frac{\pi}{2K}.$$

Die Factoren im Nenner nähern sich sehr rasch der Grenze Eins.

Nach §. 59. ist $\delta_r=\frac{m_{r-1}-n_{r-1}}{2}.\operatorname{sn}u_r=\frac{m_{r-1}}{2}.(1-k'_{r-1}).\operatorname{sn}u_r$ und nach Formel (2.) verwandelt sich dieser Ausdruck in

$$\delta_r=\frac{k}{2^r}\cdot\frac{1-k'_{r-1}}{k_{r-1}}\sqrt{(k_1k_2k_3\ldots.k_{r-1})}.\operatorname{sn}u_r.$$

Da ferner

$$\frac{1-k'_{r-1}}{k_{r-1}}=\frac{1-k'_{r-1}}{\sqrt{(1-k'_{r-1})}\sqrt{(1+k'_{r-1})}}=\sqrt{\frac{1-k'_{r-1}}{1+k'_{r-1}}}=\sqrt{k_r}$$

nach §. 51. ist, so ist also

$$6.\quad \delta_r=\frac{k}{2^r}\sqrt{(k_1k_2k_3\ldots.k_r)}.\operatorname{sn}u_r.$$

86.

Erste Art der Berechnung von $\operatorname{el}u$ und $\operatorname{el}'u$ aus $\operatorname{am}u$ und $\operatorname{am}'u$ in Anwendung derselben Modular-Zahlen, welche zur Berechnung von η oder K dienen.

In der Formel $\operatorname{el}u=\frac{2\operatorname{el}v-\lambda'^2v+2\lambda\operatorname{sn}v\operatorname{cn}u}{1+\lambda}$ ist $v<u$ und auch $\lambda<k$. Verbinden wir diese Gleichung (2.) des §. 82. mit der Gleichung $\frac{E}{K}(1+\lambda)^2=2.\frac{E_1}{K_1}-\lambda'^2$, so werden wir diese Gleichung zuvor mit der Gleichung $u=(1+\lambda)v$ multipliciren müssen, um das Argument λ'^2v zu eliminiren und auch den gleichen Nenner $1+\lambda$ zu erhalten. Es ist

$$\frac{E}{K}u=\frac{2.\frac{E_1}{K_1}v-\lambda'^2v}{1+\lambda},$$

und wird diese Gleichung von der obigen subtrahirt, so erhalten wir

$$\mathrm{el}\,u-\frac{E}{K}u=\frac{2\left(\mathrm{el}\,v-\frac{E_1}{K_1}v\right)+2\lambda\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u}{1+\lambda}\quad\text{oder auch}$$

$$1.\qquad \mathrm{el}\,u-\frac{E}{K}u=(1+k')\left(\mathrm{el}\,v-\frac{E'}{K_1}v\right)+(1-k')\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u.$$

Setzen wir in dieser Gleichung nun $k'=\frac{n}{m}$ und $\lambda=k_1$ also $k_1'=\frac{n_1}{m_1}$; ferner $v=u_1$, und wenden wir überhaupt dieselbe Bezeichnung, wie im §. 55., §. 58. und §. 84. an, so haben wir die Gleichung

$$m\left(\mathrm{el}\,u-\frac{E}{K}u\right)=2m_1\left(\mathrm{el}\,u_1-\frac{E_1}{K_1}u_1\right)+(m-n)\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,u_1.$$

Eben so ist

$$2m_1\left(\mathrm{el}\,u_1-\frac{E_1}{K_1}u_1\right)=4m_2\left(\mathrm{el}\,u_2-\frac{E_2}{K_2}u_2\right)+2(m_1-n_1)\,\mathrm{cn}\,u_1\,\mathrm{sn}\,u_2,$$

$$4m_2\left(\mathrm{el}\,u_2-\frac{E_2}{K_2}u_2\right)=8m_3\left(\mathrm{el}\,u_3-\frac{E_3}{K_3}u_3\right)+4(m_2-n_2)\,\mathrm{cn}\,u_2\,\mathrm{sn}\,u_3$$

u. s. w.

Wenn man diese Gleichungen addirt, so erhält man, da $m=1$ ist,

$$\mathrm{el}\,u-\frac{E}{K}u=2^r.m_r\left(\mathrm{el}\,u_r-\frac{E_r}{K_r}u_r\right)+(m-n)\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,u_1+2(m_1-n_1)\,\mathrm{cn}\,u_1\,\mathrm{sn}\,u_2$$
$$+4(m_2-n_2)\,\mathrm{cn}\,u_2\,\mathrm{sn}\,u_3\ldots.+2^{r-1}(m_{r-1}-n_{r-1})\,\mathrm{cn}\,u_{r-1}\,\mathrm{sn}\,u_r.$$

Wird nun r immer mehr vergröfsert, so nähert sich k_r der Grenze Null, also $\mathrm{el}\,u_r$ der Grenze u_r und also $\mathrm{el}\,u_r-\frac{E_r}{K_r}u_r$ der Grenze Null, da $E_r=K_r=\frac{1}{2}\pi$ wird. Daher haben wir die Reihe

$$\mathrm{el}\,u=\frac{E}{K}u+(m-n)\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,u_1+2(m_1-n_1)\,\mathrm{cn}\,u_1\,\mathrm{sn}\,u_2+4(m_2-n_2)\,\mathrm{cn}\,u_2\,\mathrm{sn}\,u_3$$
$$+8(m_3-n_3)\,\mathrm{cn}\,u_3\,\mathrm{sn}\,u_4+\text{etc.},$$

welche sehr rasch convergirt. Ist $m_r=n_r=\eta$ geworden, so ist auch das Glied, in welchem m_r-n_r als Factor vorkommt, gleich Null, und da wir uns den Modul k als $<\sin\frac{1}{4}\pi$ vorstellen, so ist in gewöhnlichen Rechnungen schon m_4-n_4 hinlänglich genau $=0$. Setzen wir nun, wie im §. 58., wieder $\mathrm{dn}\,u=\frac{\Delta}{m}$, $\mathrm{dn}\,u_1=\frac{\Delta_1}{m_1}$, so ist $\mathrm{sn}\,u_1=\frac{2m_1}{m+\Delta}\,\mathrm{sn}\,u$, oder auch $\mathrm{sn}\,u_1=\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}\sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}}=\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}\sqrt{\frac{m-\Delta}{m+\Delta}}$; ferner ist $\mathrm{cn}\,u=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{dn}^2u-k'^2}{1-k'^2}\right)}=\sqrt{\frac{\Delta^2-n^2}{m^2-n^2}}$, und also

$$(m-n)\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,u_1=\left(\frac{m-\Delta}{m+\Delta}.(\Delta^2-n^2)\right),$$

da aber auch nach §. 58. $\Delta_1^2 = \frac{n+\Delta}{m+\Delta} . m m_1$, also $\Delta_1^2 . \frac{(\Delta-n)(m-\Delta)}{m m_1}$ $= \frac{m-\Delta}{m+\Delta}(\Delta^2-n^2)$ ist, so erhalten wir

$$(m-n)\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,u_1 = \Delta_1 . \sqrt{\frac{(\Delta-n)(m-\Delta)}{m m_1}}.$$

In ähnlicher Weise können auch die übrigen Glieder dargestellt werden, und es ist also

$$\mathrm{el}\,u = \frac{E}{K}u + \Delta_1 . \sqrt{\frac{(m-\Delta)(\Delta-n)}{m m_1}} + 2\Delta_2 . \sqrt{\frac{(m_1-\Delta_1)(\Delta_1-n_1)}{m_1 m_2}}$$
$$+ 4\Delta_3 . \sqrt{\frac{(m_2-\Delta_2)(\Delta_2-n_2)}{m_2 m_3}} + 8\Delta_4 . \sqrt{\frac{(m_3-\Delta_3)(\Delta_3-n_3)}{m_3 m_4}} + \text{etc.}$$

Die in dieser Reihe vorkommenden Gröfsen Δ, $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ etc. sind sammt den Modular-Zahlen dieselben, welche dem §. 58. gemäfs auch zur Berechnung von u aus $\mathrm{am}\,u = \Phi$ dienen. Das Verhältnifs $\frac{E}{K} = 1-t$ mufs nach §. 84. berechnet werden. Durch die in einer geometrischen Progression stehenden Coefficienten 1, 2, 4, 8, 16 etc. wird die Convergenz wenig oder gar nicht verringert; sie bewirken höchstens einen Fehler in der letzten Decimalziffer des Resultates, welchen man dadurch, dafs man eine Decimalziffer mehr berechnet, leicht und sicher vermeiden kann.

Zusatz. Setzt man in den vorhin gefundenen Formeln ui für u, also auch u, i für u_1, $u_2 i$ für u_2, $u_3 i$ für u_3 etc. und setzt man $\Delta = \sqrt{(1+k^2\,\mathrm{tn}'^2 u)}$, so verwandelt sich $\Delta = \sqrt{(m^2\,\mathrm{cn}^2 u + n^2\,\mathrm{sn}^2 u)}$ in $\Delta = \frac{\sqrt{(m^2 - n^2\,\mathrm{sn}'^2\,u)}}{\mathrm{cn}'\,u}$, so dafs für $u=0$ ist $\Delta = m$ und für $u = K'$, $\Delta = \frac{1}{0}$. Nun ist Δ nicht mehr zwischen den Grenzen m und n enthalten, sondern es ist immer $\Delta > n$ und also $\Delta - n$ positiv; aber $m-\Delta$ ist negativ. Die vorige Reihe verwandelt sich nun also in

$$\mathfrak{El}\,u = \frac{E}{K}u + \Delta_1 \sqrt{\frac{(\Delta-m)(\Delta-n)}{m m_1}} + 2\Delta_2 \sqrt{\frac{(\Delta_1-m_1)(\Delta_1-n_1)}{m_1 m_2}} + \text{etc.}$$

Da aber $\mathrm{el}'\,u = u + \mathrm{tn}'\,u\,\mathrm{dn}'\,u - \mathfrak{El}\,u = u + \Delta\,\mathrm{sn}'\,u - \mathfrak{El}\,u$ ist, so erhalten wir nun, wenn $\mathrm{am}'\,u = \psi$ gesetzt wird, und also $\Delta = \sqrt{(1+k^2\,\mathrm{tang}^2\psi)}$, für $\mathrm{el}'\,u$ die folgende Reihe:

$$\mathrm{el}'\,u = \left(1-\frac{E}{K}\right)u + \Delta\sin\psi - \Delta_1 \sqrt{\frac{(\Delta-m)(\Delta-n)}{m m_1}} - 2\Delta_2 \sqrt{\frac{(\Delta_1-m_1)(\Delta_1-n_1)}{m_1 m_2}}$$
$$- 4\Delta_3 . \sqrt{\frac{(\Delta_2-m_2)(\Delta_2-n_2)}{m_2 m_3}} - 8\Delta_4 \sqrt{\frac{(\Delta_3-m_3)(\Delta_3-n_3)}{m_3 m_4}} - \text{etc.}$$

Die hierin vorkommenden Gröfsen haben dieselben Bedeutungen, wie im Zusatze zu §. 58.; die daselbst angegebenen Formeln dienen auch zur Berechnung des Argumentes u aus $\mathrm{am}'u = \psi$, und $1 - \frac{E}{K}$ ist nur noch nach §. 85. zu berechnen. Diese Formel ist anzuwenden, wenn der Modul $k' > \sin\frac{1}{4}\pi$ ist, weil dann $k < \sin\frac{1}{4}\pi$ ist.

§. 87.

Erste Art der Berechnung von $\mathrm{lm}\,u$ und $\mathrm{lm}'u$ aus $\mathrm{am}\,u$ und $\mathrm{am}'u$

Nach §. 86. ist

$$\mathrm{el}\,u = \frac{E}{K}u + m(1-k')\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,u_1 + 2m_1(1-k_1')\,\mathrm{cn}\,u_1\,\mathrm{sn}\,u_2 + \text{etc.}$$

Ferner ist nach §. 51. $\mathrm{sn}\,v = \mathrm{sn}\,u_1 = \frac{(1+k')\,\mathrm{sn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}$ und also das Glied

$$m(1-k').\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,u_1 = \frac{mk^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u} = \frac{-m\,\partial\log(1+\mathrm{dn}\,u)}{\partial u}.$$

Werden in gleicher Weise auch die folgenden Glieder umgeformt, so erhält man

$$\mathrm{el}\,u = \frac{E}{K}u - m.\frac{\partial\log(1+\mathrm{dn}\,u)}{\partial u} - 2m_1.\frac{\partial\log(1+\mathrm{dn}\,u_1)}{\partial u_1} + \text{etc.}$$

Da aber, wie im §. 57., $u = \frac{u_1}{m_1} = \frac{u_2}{m_2} = \frac{u_3}{m_3} = \text{etc.}$ und also auch

$$\partial u = \frac{\partial u_1}{m_1} = \frac{\partial u_2}{m_2} = \frac{\partial u_3}{m_3} = \frac{\partial u_4}{m_4} = \text{etc. ist,}$$

so findet man, wenn man jene Gleichung mit diesen multiplicirt und integrirt, auf der Stelle

$$\mathrm{lm}\,u = \frac{E}{K}.\frac{u^2}{2} + \log\frac{2}{1+\mathrm{dn}\,u} + 2\log\frac{2}{1+\mathrm{dn}\,u_1} + 4\log\frac{2}{1+\mathrm{dn}\,u_2} + 8\log\frac{2}{1+\mathrm{dn}\,u_3} + 16\log\frac{2}{1+\mathrm{dn}\,u_4} + \text{etc.,}$$

wenn die Constante so bestimmt wird, dafs das Integral für $u = 0$ verschwindet. Wird die Bezeichnung des §. 58. eingeführt, so ist

$$\mathrm{lm}\,u = \frac{E}{K}.\frac{u^2}{2} + \log\frac{2m}{m+\Delta} + 2\log\frac{2m_1}{m_1+\Delta_1} + 4\log\frac{2m_2}{m_2+\Delta_2} + 8\log\frac{2m_3}{m_3+\Delta_3} + \text{etc.}$$

Es convergirt diese Reihe sehr rasch und die Rechnung nach ihr ist sehr bequem, vorausgesetzt, dafs auch das Argument u in ihr aus $\mathrm{am}\,u = \varphi$ nach den Formeln des §. 58. berechnet wird.

Zusatz. Wir leiten sogleich noch eine Reihe zur Berechnung von $\mathrm{lm}'u$ her, wenn $\mathrm{am}'u = \psi$ gegeben ist und die Modular-Zahlen, welche

zur Berechnung von η oder K dienen, wieder gebraucht werden sollen. Setzen wir $\Delta = \sqrt{(1 + k^2 \operatorname{tang}^2 \psi)}$ und setzen ui für u, wodurch die Bedeutungen von Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 etc. geändert werden, während die Art ihrer Berechnung dieselbe bleibt, so erhalten wir sofort

$$\operatorname{lm}(ui) = -\frac{E}{K} \cdot \frac{u^2}{2} - \log \frac{m+\Delta}{2m} - 2 \log \frac{m_1+\Delta_1}{2m_1} - 4 \log \frac{m_2+\Delta_2}{2m_2} - \text{etc.}$$

und, da $\operatorname{lm}' u = \operatorname{lm}(ui) + \frac{u^2}{2} + \log \frac{1}{\operatorname{cn}' u}$ ist,

$$\operatorname{lm}' u = \left(1 - \frac{E}{K}\right)\frac{u^2}{2} + \log \frac{1}{\cos \psi} - \log \frac{m+\Delta}{2m} - 2 \log \frac{m_1+\Delta_1}{2m_1} - 4 \log \frac{m_2+\Delta_2}{2m_2}$$
$$- 8 \log \frac{m_3+\Delta_3}{2m_3} - 16 \log \frac{m_4+\Delta_4}{2m_4} - \text{etc.}$$

Auch diese Reihe convergirt desto rascher, je gröfser der Modul k' ist.

§. 88.

Zweite Art der Berechnung von $\operatorname{el} u$ und $\operatorname{el}' u$ aus $\operatorname{am} u$ und $\operatorname{am}' u$.

Setzt man in der Gleichung $2 . \operatorname{el} \frac{1}{2} u = \frac{2 . \operatorname{el} v + 2\lambda \operatorname{sn} v - \lambda'^2 v}{1+\lambda}$ und also auch in der Gleichung $u = (1+\lambda)v$ für u an dessen Stelle $2u$, wie auch im §. 59. geschehen ist, so werden diese Gleichungen:

$$2 \operatorname{el} u = \frac{2 . \operatorname{el} v - 2\lambda'^2 v + 2\lambda \operatorname{sn} v}{1+\lambda} \quad \text{und} \quad 2u = (1+\lambda)v.$$

Ferner ist

$$\frac{E}{K}(1+\lambda)^2 = 2 . \frac{E_1}{K_1} - \lambda'^2 \quad \text{und also} \quad 2 . \frac{E}{K} u = \left(2 . \frac{E_1}{K_1} v - \lambda'^2 v\right) : (1+\lambda).$$

Wird diese Gleichung von der obigen subtrahirt, so entsteht

$$\operatorname{el} u - \frac{E}{K} u = \frac{\operatorname{el} v - \frac{E_1}{K_1} v + \lambda \operatorname{sn} v}{1+\lambda}.$$

Setzen wir nun $\lambda = k_1$, ferner $v = u$, und wenden überhaupt die Bezeichnung des §. 59. an, so ist $\lambda = \frac{m-n}{m+n}$ und $1+\lambda = \frac{2m}{m+n} = \frac{m}{m_1}$, also $\frac{\lambda}{1+\lambda} = \frac{m-n}{2m}$, und folglich

$$m\left(\operatorname{el} u - \frac{E}{K} u\right) = m_1\left(\operatorname{el} u_1 - \frac{E_1}{K_1} u_1\right) + \frac{m-n}{2} \operatorname{sn} u_1, \quad \text{oder auch}$$

$$m\left(\operatorname{el} u - \frac{E}{K} u\right) = m_1\left(\operatorname{el} u - \frac{E_1}{K_1} u_1\right) + \delta_1.$$

Aus dieser einfachen Gleichung schliefst man auf ähnliche Art, wie im §. 86., dafs $\operatorname{el} u - \frac{E}{K} u = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \text{etc.}$, also

$$\mathrm{el}\,u = \frac{E}{K}u + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \text{etc.}$$

ist, wenn die Gröfsen δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 etc. nach den Formeln (3.) des §. 59. berechnet werden. Diese Formel ist sehr bequem, wenn man das Argument u nach Formel (4.) oder (5.) im §. 59. berechnet.

Zusatz. Setzt man ui für u, wie im Zusatze zu §. 59., so erhält man die Formel

$$\mathrm{el}'u = \left(1-\frac{E}{K}\right)u + \nabla\sin\psi - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 - \delta_4 - \delta_5 - \text{etc.},$$

wenn man den in ihr vorkommenden Gröfsen dieselben Bedeutungen giebt, welche sie im Zusatze zu §. 59. haben. Das Argument u wird man aus $\mathrm{am}'u = \psi$ nun ebenfalls nach den Formeln (9.) oder (10.) am angeführten Orte berechnen. Die Convergenz dieser Formel für $\mathrm{el}'u$ ist desto gröfser, je gröfser der Modul k' von $\mathrm{el}'u$ ist.

§. 89.

Zweite Art der Berechnung von $\mathrm{lm}\,u$ und $\mathrm{lm}'u$ aus $\mathrm{am}\,u$ und $\mathrm{am}'u$.

Nach §. 88. ist

$$\mathrm{el}\,u = \frac{E}{K}.u + \frac{m(1-k')}{2}.\mathrm{sn}\,u_1 + \frac{m_1(1-k_1')}{2}.\mathrm{sn}\,u_2 + \frac{m_2(1-k_2')}{2}.\mathrm{sn}\,u_3 + \text{etc.}$$

Da aber nach §. 59. $\mathrm{sn}\,u_1 = (1+k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u$ ist, so kann diese Reihe auch also dargestellt werden:

$$\mathrm{el}\,u = \frac{E}{K}u + \frac{m}{2}.\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u} + \frac{m_1}{2}.\frac{k_1^2\,\mathrm{sn}\,u_1\,\mathrm{cn}\,u_1}{\mathrm{dn}\,u_1} + \frac{m_2}{2}.\frac{k_2^2\,\mathrm{sn}\,u_2\,\mathrm{cn}\,u_2}{\mathrm{dn}\,u_2} + \text{etc.}$$

Da nun ferner $u = \frac{1}{1+k'}u_1$, also $u = \frac{m}{2m_1}u_1$ ist, so ist

$$\frac{u}{m} = \frac{u_1}{2m_1} = \frac{u_2}{4m_2} = \frac{u_3}{8m_3} = \text{etc.}$$

und also auch

$$\partial u = \frac{\partial u_1}{2m_1} = \frac{\partial u_2}{4m_2} = \frac{\partial u_3}{8m_3} = \text{etc.}$$

Wird die vorige Reihe hiermit multiplicirt und dann integrirt, so entsteht

$$\mathrm{lm}\,u = \frac{E}{K}.\frac{u^2}{2} + \tfrac{1}{2}\log\frac{1}{\mathrm{dn}\,u} + \tfrac{1}{4}\log\frac{1}{\mathrm{dn}\,u_1} + \tfrac{1}{8}\log\frac{1}{\mathrm{dn}\,u_2} + \text{etc.},$$

oder auch mit Benutzung der Gröfsen ∇, ∇_1, ∇_2, ∇_3 etc. des §. 59. die Reihe

$$\mathrm{lm}\,u = \frac{E}{K}.\frac{u^2}{2} + \tfrac{1}{2}\log\frac{m}{\nabla} + \tfrac{1}{4}\log\frac{m_1}{\nabla_1} + \tfrac{1}{8}\log\frac{m_2}{\nabla_2} + \tfrac{1}{16}\log\frac{m_3}{\nabla_3} + \text{etc.}$$

Zusatz. Setzt man, wie im Zusatze zu §. 59., in der vorigen Reihe ui für u und benutzt die Formel (6.) des §. 72., so erhält man

noch auf der Stelle die Reihe

$$\mathrm{lm}'u = \left(1-\frac{E}{K}\right).\frac{u^2}{2} + \log\frac{1}{\cos\psi} - \tfrac{1}{2}\log\frac{\nabla}{m} - \tfrac{1}{4}\log\frac{\nabla_1}{m_1} - \tfrac{1}{8}\log\frac{\nabla_2}{m_2} - \tfrac{1}{16}\log\frac{\nabla_3}{m_3} - \text{etc.},$$

in welcher die Gröfsen ∇, ∇_1, ∇_2 etc. dieselben Bedeutungen haben, wie im Zusatze zu §. 59., und in welcher das Argument u aus $\mathrm{am}'u = \psi$ nach der Formel (9.), oder auch Formel (10.) im angeführten Zusatze, zu berechnen ist. Die Convergenz dieser Reihe ist desto rascher, je gröfser der Modul k' von $\mathrm{lm}'u$ ist.

Neunter Abschnitt.

§. 90.

Differenzial-Gleichungen der ersten Ordnung für die Gröfsen $\arg\mathrm{am}(\varphi) = u$, $\mathrm{el}\,u$, K und E bei einer Aenderung des Moduls k.

Die Functionen $\arg\mathrm{am}(\Phi)$ und $\mathrm{el}\,u = \mathrm{el}\,\mathrm{am}(\Phi)$ können beide als Functionen der Amplitude Φ, aber auch beide als Functionen des Moduls k angesehen werden. Es lassen sich also auch Differenzial-Gleichungen unter der Voraussetzung, dafs die Amplitude Φ unveränderlich, der Modul k hingegen veränderlich sei, entwickeln. Setzen wir zur Abkürzung $\Delta = \sqrt{(1-k^2\sin^2\Phi)}$ und $u = \arg\mathrm{am}(\Phi)$, ferner $\mathrm{el}\,u = \mathrm{el}\,\mathrm{am}(\Phi) = v$, so ist

$$u = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta} \quad \text{und} \quad v = \int_0^{\varphi}\Delta.\partial\Phi, \text{ und also}$$

$$\frac{\partial u}{\partial k} = \int_0^{\varphi}\frac{\partial\left(\frac{1}{\Delta}\right)}{\partial k}.\partial\Phi \text{ und } \frac{\partial v}{\partial k} = \int_0^{\varphi}\frac{\partial\Delta}{\partial k}.\partial\Phi,$$

weil Φ und k ganz unabhängig von einander sind. Das Differenzial von $\sqrt{(1-k^2\sin^2\Phi)}$, unter Voraussetzung der Veränderlichkeit von k, ist $\frac{-k\partial k.\sin^2\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi}}$, also

$$\frac{\partial\Delta}{\partial k} = \frac{-k\sin^2\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} = \frac{-k^2\sin^2\varphi}{k\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\Delta^2-1}{k\Delta}, \text{ folglich}$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial k} = \frac{1}{k}\left(\Delta-\frac{1}{\Delta}\right), \text{ und da } \frac{\partial\left(\frac{1}{\Delta}\right)}{\partial k} = -\frac{\partial\Delta}{\partial k}:\Delta^2 \text{ ist, so ist}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\Delta}\right)}{\partial k} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{\Delta}\right).$$

Werden diese Werthe substituirt, so erhalten wir zunächst

$$\frac{\partial u}{\partial k} = \frac{1}{k}.\int_0^{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\Delta^3} - \frac{1}{k}.\int_0^{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\Delta},$$

$$\frac{\partial v}{\partial k} = \frac{1}{k}.\int_0^{\varphi} \partial\Phi.\Delta - \frac{1}{k}.\int_0^{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\Delta}.$$

Die vier in diesen Formeln vorkommenden Integrale verwandeln sich, da $\Phi = \operatorname{am} u$ und also $\partial\Phi = \operatorname{dn} u.\partial u$, folglich $\frac{\partial\varphi}{\Delta} = \partial u$ ist, sofort in

$$\frac{\partial u}{\partial k} = \frac{1}{k}.\int_0^{u} \frac{\partial u}{\operatorname{dn}^2 u} - \frac{u}{k}, \qquad \frac{\partial v}{\partial k} = \frac{1}{k}.v - \frac{u}{k}.$$

Wird die Formel (3.) des §. 64. benutzt, so ist

$$k.\frac{\partial u}{\partial k} = \frac{v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u}{k'^2} - u = \frac{1}{k^2}\left(v - k^2.\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right) - u \text{ und}$$

$$k.\frac{\partial v}{\partial k} = v - u.$$

Stellt man diese Gleichungen wie folgt dar:

$$1. \quad u = v - k.\frac{\partial v}{\partial k} = \operatorname{el} u - k.\frac{\partial \operatorname{el} u}{\partial k},$$

$$2. \quad v = k'^2\left(u + k.\frac{\partial u}{\partial k}\right) + k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u = \operatorname{el} u;$$

so dient die erste dazu, um aus einem analytischen Ausdrucke von $\operatorname{el} u$ oder v durch k den analytischen Ausdruck von $u = \arg\operatorname{am}(\Phi)$ herzuleiten. Die zweite Gleichung zeigt dagegen, wie aus einem analytischen Ausdrucke von $u = \arg\operatorname{am}(\Phi)$ der analytische Ausdruck von $v = \operatorname{el} u$ herzuleiten sei. Setzen wir $\Phi = \frac{1}{2}\pi$, also $u = K$ und $v = E$, so verwandeln sich diese Gleichungen in

$$3. \quad K = E - k.\frac{\partial E}{\partial k},$$

$$4. \quad E = k'^2\left(K + k.\frac{\partial K}{\partial k}\right).$$

§. 91.

Differenzial-Gleichungen der zweiten Ordnung für die Abhängigkeit der Gröfsen $u = \arg\operatorname{am}(\varphi)$ und $\operatorname{el}\operatorname{am}(\varphi)$ vom Modul k.

Der Gleichung (2.) im §. 90. gemäfs ist

$$v = k'^2 u + (k - k^3).\frac{\partial u}{\partial k} + \frac{k^2 \sin\varphi\cos\varphi}{\Delta},$$

also

$$\frac{\partial v}{\partial k} = \frac{\partial\left(k'^2 v + (k - k^3).\frac{\partial u}{\partial k} + \frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right)}{\partial k}.$$

Werden diese beiden Werthe in der Gleichung (1.) des §. 90. substituirt, so wird sie

$$u = k'^2 u + (k - k^3).\frac{\partial u}{\partial k} + \frac{k^2 \sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} - \frac{k\,\partial\left(k'^2 u + (k-k^3)\frac{\partial u}{\partial k} + \frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right)}{\partial k}.$$

Transportirt man das Glied $k'^2 u$, so ist die Gleichung durch k theilbar, und also

$$ku = k'^2.\frac{\partial u}{\partial k} + \frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} - \frac{\partial\left(k'^2 u + (k-k^3)\frac{\partial u}{\partial k} + \frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right)}{\partial k}.$$

Diese Gleichung, welche nur noch die als Function von k angesehene Gröfse u enthält, ist offenbar eine Differenzial-Gleichung der zweiten Ordnung. Differenziirt man wirklich, so ist noch eine namhafte Reduction möglich. Da am $u = \Phi$ als constant angesehen wird, so ist auch $\sin\Phi\cos\Phi$ constant, aber Δ veränderlich. Es ist nun aber

$$\frac{\partial\left(\frac{k^2}{\Delta}\right)}{\partial k} = \frac{2k.\Delta - k^2\left(\frac{\Delta^2-1}{k.\Delta}\right)}{\Delta^2} = \frac{2k\Delta - k\Delta + \frac{k}{\Delta}}{\Delta^2} = k\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta^3}\right),$$

also $\frac{\partial\left(\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right)}{\partial k} = k\sin\Phi\cos\Phi\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta^3}\right)$; ferner ist

$$\frac{\partial(k'^2 u)}{\partial k} = \frac{\partial u}{\partial k} - 2ku - k^2.\frac{\partial u}{\partial k} = k'^2.\frac{\partial u}{\partial k} - 2ku \text{ und}$$

$$\frac{\partial\left((k-k^3).\frac{\partial u}{\partial k}\right)}{\partial k} = (1-3k^2).\frac{\partial u}{\partial k} + (k-k^3).\frac{\partial^2 u}{\partial k^2}.$$

Werden diese Werthe substituirt, so entsteht die Gleichung

$$ku = k'^2.\frac{\partial u}{\partial k} + \frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} - k'^2.\frac{\partial u}{\partial k} + 2ku - (1-3k^2).\frac{\partial u}{\partial k} - (k-k^3).\frac{\partial^2 u}{\partial k^2} - \frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} - \frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^3}.$$

Läfst man die sich aufhebenden Glieder weg, so ist

$$(1-k^2).\frac{\partial^2 u}{\partial k^2} + \frac{1-3k^2}{k}.\frac{\partial u}{\partial k} - u + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^3} = 0,$$

oder auch

$$1.\quad (1-k^2).\frac{\partial^2 u}{\partial k^2} + \frac{1-3k^2}{k}.\frac{\partial u}{\partial k} - u + \frac{\operatorname{sn} u\,\operatorname{en} u}{\operatorname{dn}^3 u} = 0.$$

Noch leichter findet sich die Differenzial-Gleichung der zweiten Ordnung für die Gröfse $\operatorname{el} u$, wenn sie als eine Function des Moduls k betrachtet wird.

Nun ist der Werth $u = v - k.\frac{\partial v}{\partial k}$ und $\frac{\partial u}{\partial k} = \frac{\partial v}{\partial k} - \frac{\partial v}{\partial k} - k.\frac{\partial^2 v}{\partial k^2} = -k.\frac{\partial^2 v}{\partial k^2}$ in der Gleichung (2.) des §. 90. zu substituiren. Dadurch entsteht

$$v = (1-k^2)v - (k-k^3).\frac{\partial v}{\partial k} - k^2(1-k^2).\frac{\partial^2 v}{\partial k^2} + k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u, \quad \text{also}$$

$$(1-k^2).\frac{\partial^2 v}{\partial k^2} + \frac{1-k^2}{k}.\frac{\partial v}{\partial k} + v - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\triangle} = 0, \quad \text{oder}$$

$$2. \quad (1-k^2).\frac{\partial^2 \operatorname{el} u}{\partial k^2} + \frac{1-k^2}{k}.\frac{\partial \operatorname{el} u}{\partial k} + \operatorname{el} u - \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} = 0.$$

Setzen wir in den so eben entwickelten Gleichungen $u = K$, also auch $\operatorname{el} u = E$, so verwandeln sie sich in

$$3. \quad (1-k^2).\frac{\partial^2 K}{\partial k^2} + \frac{1-3k^2}{k}.\frac{\partial K}{\partial k} - K = 0 \quad \text{und}$$

$$4. \quad (1-k^2).\frac{\partial^2 E}{\partial k^2} + \frac{1-k^2}{k}.\frac{\partial E}{\partial k} + E = 0.$$

Zusatz. Da der Gleichung (1.) gemäfs

$$(k-k^3).\frac{\partial^2 u}{\partial k^2} + (1-3k^2).\frac{\partial u}{\partial k} - ku + \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^3 u} = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial\left((k-k^3).\frac{\partial u}{\partial k}\right)}{\partial k} = (k-k^3).\frac{\partial^2 u}{\partial k^2} + (1-3k^2).\frac{\partial u}{\partial k}$$

ist, so kann die Gleichung (1.) auch also dargestellt werden:

$$\frac{\partial\left((k-k^3).\frac{\partial u}{\partial k}\right)}{\partial k} = ku - \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^3 u}.$$

§. 92.

Differenzial-Gleichungen der ersten und zweiten Ordnung für die Abhängigkeit der Gröfsen $u = \arg\operatorname{am}'(\psi)$ und $\operatorname{el}\operatorname{am}'(\psi)$ von dem Modul k.

Setzen wir in der Gleichung (1.) des §. 90. für u an dessen Stelle ui, so erhalten wir zunächst

$$1. \quad u = \mathfrak{El}\, u - k.\frac{\partial \mathfrak{El}\, u}{\partial k}.$$

Da aber $\mathfrak{El}\, u = u + \operatorname{tn}' u.\operatorname{dn}' u - \operatorname{el}' u = u + \sin\psi.\triangle - \operatorname{el}' u$ ist, wenn wir $\triangle = \sqrt{(1+k^2\operatorname{tang}^2\psi)}$ und also $\frac{\partial\triangle}{\partial k} = \frac{k\operatorname{tang}^2\psi}{\triangle}$ setzen, so ist

$$u = u + \sin\psi.\triangle - \operatorname{el}' u - k.\frac{\partial u}{\partial k} - \frac{k^2\sin\psi\operatorname{tang}^2\psi}{\triangle} + k.\frac{\partial \operatorname{el}' u}{\partial k};$$

und da $\sin\psi\left(\triangle - \frac{k^2\operatorname{tang}^2\psi}{\triangle}\right) = \frac{\sin\psi}{\triangle}$ ist, so reducirt sich die Gleichung

wieder auf

$$\frac{\sin\psi}{\Delta} - \mathrm{el}'u - k.\frac{\partial u}{\partial k} + k.\frac{\partial\,\mathrm{el}'u}{\partial k} = 0.$$

Da ferner $\Delta = \frac{\mathrm{dn}'u}{\mathrm{cn}'u}$, also $\frac{\sin\psi}{\Delta} = \frac{\mathrm{sn}'u\,\mathrm{cn}'u}{\mathrm{dn}'u}$ ist, so kann die Gleichung auch also dargestellt werden:

$$2.\quad k.\frac{\partial u}{\partial k} = k.\frac{\partial\,\mathrm{el}'u}{\partial k} - \mathrm{el}'u + \frac{\mathrm{sn}'u\,\mathrm{cn}'u}{\mathrm{dn}'u}.$$

Setzt man in der Gleichung (2.) des §. 90. auch ui für u, so wird sie

$$3.\quad \mathfrak{E}iu = k'^2\left(u + k.\frac{\partial u}{\partial k}\right) + \frac{k^2\,\mathrm{tn}'u}{\mathrm{dn}'u},\quad \text{also}$$

$$-\mathrm{el}'u + u + \mathrm{tn}'u\,\mathrm{dn}'u = k'^2u + kk'^2.\frac{\partial u}{\partial k} + \frac{k^2\,\mathrm{tn}'u}{\mathrm{dn}'u}.$$

Da aber $\mathrm{tn}'u\,\mathrm{dn}'u - \frac{k^2\,\mathrm{tn}'u}{\mathrm{dn}'u} = \frac{k'^2\,\mathrm{sn}'u\,\mathrm{cn}'u}{\mathrm{dn}'u}$ ist, so verwandelt sich die Gleichung in

$$4.\quad \mathrm{el}'u = k^2u - kk'^2.\frac{\partial u}{\partial k} + \frac{k'^2\,\mathrm{sn}'u\,\mathrm{cn}'u}{\mathrm{dn}'u}.$$

Substituirt man den Werth $k.\frac{\partial u}{\partial k}$, welchen die Gleichung (2.) giebt, in der Gleichung (4.), so erhält man

$$\mathrm{el}'u = k^2u - kk'^2.\frac{\partial\,\mathrm{el}'u}{\partial k} + k'^2\,\mathrm{el}'u \quad \text{oder}$$

$$k^2u = k^2\,\mathrm{el}'u + kk'^2.\frac{\partial\,\mathrm{el}'u}{\partial k},\quad \text{oder auch}$$

$$5.\quad u = \mathrm{el}'u + \frac{k'^2}{k}.\frac{\partial\,\mathrm{el}'u}{\partial k}.$$

Diese Gleichung und die vorige (4.) lassen sich auch kürzer also herleiten. Vertauscht man in der Gleichung (1.) des §. 90. den Modul k mit k', so hat man

$$u = \mathrm{el}'u - k'.\frac{\partial\,\mathrm{el}'u}{\partial k'}.$$

Da nun aber $k^2 + k'^2 = 1$, also $k'\partial k' = -k\partial k$, und also $\frac{k'}{\partial k'} = \frac{-k'^2}{k\partial k}$ ist, so erhält man durch die Substitution dieses Werthes unmittelbar

$$u = \mathrm{el}'u + \frac{k'^2}{k}.\frac{\partial\,\mathrm{el}'u}{\partial k};$$

welches die Gleichung (5.) ist. Ganz eben so läfst sich die Gleichung (4.) aus der Gleichung (2.) des §. 90. herleiten. Setzen wir in den vorstehenden beiden Gleichungen $u = K'$, also $\mathrm{el}'u = E'$, so bekommen wir noch

$$6.\quad K' = E' + \frac{k'^2}{k}.\frac{\partial E'}{\partial k}\quad \text{und}$$

7. $E' = k^2.K' - kk'^2.\frac{\partial K'}{\partial k}$, woraus leicht folgt

$$\frac{k.\partial(K'-E')}{\partial k} + E' = 0.$$

Wenn wir in der Gleichung (1.) des §. 91. für u setzen ui, so verwandelt sie sich sofort in

8. $$(1-k^2).\frac{\partial^2 u}{\partial k^2} + \frac{1-3k^2}{k}.\frac{\partial u}{\partial k} - u + \frac{\mathrm{sn}'u\,\mathrm{cn}'u}{\mathrm{dn}'^3 u} = 0$$

und hat nun mit der Gleichung (1.) des §. 91. selbst wieder grofse Aehnlichkeit. Setzen wir auch in der Gleichung (2.) des §. 91. für u an dessen Stelle ui, so verwandelt sie sich in

$$(1-k^2).\frac{\partial^2 \mathfrak{El}u}{\partial k^2} + \frac{1-k^2}{k}.\frac{\partial \mathfrak{El}u}{\partial k} + \mathfrak{El}u - \frac{\mathrm{tn}'u}{\mathrm{dn}'u} = 0.$$

Aus dieser Gleichung läfst sich bequem eine Differenzial-Gleichung der zweiten Ordnung für die Differenz $u - \mathrm{el}'u$ herleiten. Da nämlich $\mathfrak{El}u = u - \mathrm{el}'u + \mathrm{tn}'u\,\mathrm{dn}'u$ ist, so erhalten wir, wenn wir für den Augenblick $u - \mathrm{el}'u = z$ und $\triangle = \sqrt{(1+k^2\tan^2\psi)}$, also $\mathrm{am}'u = \psi$ setzen, $\mathfrak{El}u = z + \sin\psi.\triangle$, also $\frac{\partial \mathfrak{El}u}{\partial k} = \frac{\partial z}{\partial k} + \frac{k\sin\psi\tan^2\psi}{\triangle}$. Da ferner

$\frac{\partial\left(\frac{k}{\triangle}\right)}{\partial k} = \frac{\triangle - \frac{k^2\tan^2\psi}{\triangle}}{\triangle^2} = \frac{1}{\triangle^3}$ ist, so ist $\frac{\partial^2 \mathfrak{El}u}{\partial k^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial k^2} + \frac{\sin\psi\tan^2\psi}{\triangle^3}$.

Werden diese Werthe substituirt, so entsteht die Gleichung

$$(1-k^2).\frac{\partial^2 z}{\partial k^2} + \frac{1-k^2}{k}.\frac{\partial z}{\partial k} + z + \frac{k'^2\sin\psi\tan^2\psi}{\triangle^3} + \frac{k'^2\sin\psi\tan^2\psi}{\triangle} + \mathrm{tn}'u\,\mathrm{dn}'u - \frac{\mathrm{tn}'u}{\mathrm{dn}'u} = 0.$$

Die vier letzten Glieder der Gleichung haben den Factor $\tan\psi = \mathrm{tn}'u$ gemeinschaftlich. Lassen wir ihn für den Augenblick weg, so sind dieselben

$$\frac{k'^2\,\mathrm{sn}'^2u\,\mathrm{cn}'^2u}{\mathrm{dn}'^3u} + \frac{k'^2\,\mathrm{sn}'^2u}{\mathrm{dn}'u} + \mathrm{dn}'u - \frac{1}{\mathrm{dn}'u} = \frac{k'^2\,\mathrm{sn}'^2u\,\mathrm{cn}'^2u}{\mathrm{dn}'^3u},$$

und wird der Factor $\mathrm{tn}'u$ wieder beigefügt, so haben wir die Gleichung

9. $$(1-k^2).\frac{\partial^2(u-\mathrm{el}'u)}{dk^2} + \frac{1-k^2}{k}.\frac{\partial(u-\mathrm{el}'u)}{\partial k} + u - \mathrm{el}'u + \frac{k'^2\,\mathrm{sn}'^3u\,\mathrm{cn}'u}{\mathrm{dn}'^3u} = 0.$$

Man könnte aus dieser Gleichung leicht eine Differenzial-Gleichung von der zweiten Ordnung für die Gröfse $\mathrm{el}'u$ in ihrer Abhängigkeit von k herleiten. Wir verfahren aber zu diesem Zwecke anders. Es ist $-k\partial k = k'\partial k'$, oder $\partial k' = -\frac{k}{k'}\partial k$, also $\frac{\partial \mathrm{el}'u}{\partial k} = -\frac{k'}{k}.\frac{\partial \mathrm{el}'u}{\partial k}$. Differenziiren wir noch einmal, so entsteht

$$\partial\left(\frac{\partial \operatorname{el}' u}{\partial k'}\right) = -\left(\frac{k'}{k}\cdot\frac{\partial^2 \operatorname{el}' u}{\partial k}+\frac{\partial \operatorname{el}' u}{\partial k}\cdot\frac{k\partial k'-k'\partial k}{k^2}\right)$$ und also

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial \operatorname{el}' u}{\partial k'}\right)}{\partial k'} = \frac{k'^2}{k^2}\cdot\frac{\partial^2 \operatorname{el}' u}{\partial k^2}-\frac{\partial \operatorname{el}' u}{\partial k}\cdot\frac{1}{k^3}.$$

Stellt man nun die Gleichung (2.) des §. 91., indem man zugleich die beiden conjugirten Modul mit einander vertauscht, also dar:

$$k^2\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial \operatorname{el}' u}{\partial k'}\right)}{\partial k'}+\frac{k^2}{k'}\cdot\frac{\partial \operatorname{el}' u}{\partial k'}+\operatorname{el}' u-\frac{\operatorname{sn}' u \operatorname{cn}' u}{\operatorname{dn}' u}=0$$

und substituirt man hierin die vorhin angegebenen Differenzial-Verhältnisse, so erhält man

$$k'^2\cdot\frac{\partial^2 \operatorname{el}' u}{\partial k^2}-\frac{1}{k}\cdot\frac{\partial \operatorname{el}' u}{\partial k}-k\cdot\frac{\partial \operatorname{el}' u}{\partial k}+\operatorname{el}' u-\frac{\operatorname{sn}' u \operatorname{cn}' u}{\operatorname{dn}' u}=0 \text{ oder}$$

10. $$k'^2\cdot\frac{\partial^2 \operatorname{el}' u}{\partial k^2}-\frac{1+k^2}{k}\cdot\frac{\partial \operatorname{el}' u}{\partial k}+\operatorname{el}' u-\frac{\operatorname{sn}' u \operatorname{cn}' u}{\operatorname{dn}' u}=0.$$

Setzen wir in den Gleichungen (8.), (9.) und (10.) $u = K'$, so haben wir noch

11. $$(1-k^2)\cdot\frac{\partial^2 K'}{\partial k^2}+\frac{1-3k^2}{k}\cdot\frac{\partial K'}{\partial k}-K'=0,$$

12. $$(1-k^2)\cdot\frac{\partial^2(K'-E')}{\partial k^2}+\frac{1-k^2}{k}\cdot\frac{\partial(K'-E')}{\partial k}+K'-E'=0,$$

13. $$(1-k^2)\cdot\frac{\partial^2 E'}{\partial k^2}-\frac{1+k^2}{k}\cdot\frac{\partial E'}{\partial k}+E'=0.$$

Zusatz. Vertauscht man auch in der Gleichung (9.) die beiden conjugirten Modul, so entsteht

$$k^2\frac{\partial\left(\frac{\partial(u-\operatorname{el} u)}{\partial k'}\right)}{\partial k'}+\frac{k^2}{k'}\cdot\frac{\partial(u-\operatorname{el} u)}{\partial k'}+u-\operatorname{el} u+\frac{k^2 \operatorname{sn}^3 u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^3 u}=0$$

und durch dasselbe Verfahren, wodurch die Gleichung (10.) hergeleitet wurde, findet man auch

$$(1-k^2)\cdot\frac{\partial^2(u-\operatorname{el} u)}{\partial k^2}-\frac{1+k^2}{k}\cdot\frac{\partial(u-\operatorname{el} u)}{\partial k}+u-\operatorname{el} u+\frac{k^2 \operatorname{sn}^3 u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^3 u}=0.$$

Wird also $u = K$ gesetzt, so haben wir noch

$$(1-k^2)\cdot\frac{\partial^2(K-E)}{\partial k^2}-\frac{1+k^2}{k}\cdot\frac{\partial(K-E)}{\partial k}+K-E=0.$$

§. 93.

Dritter Beweis der Formel $KE'+K'E-KK'=\frac{1}{2}\pi$.

Die Formeln (3.) und (4.) des §. 90. und die Formeln (6.) und (7.) des §. 92. können auch also dargestellt werden:

1. $\frac{\partial E}{\partial k} = -\frac{1}{k}(K-E)$; $\quad \frac{\partial K}{\partial k} = \frac{1}{kk'^2}(E-k'^2K)$;

2. $\frac{\partial E'}{\partial k} = \frac{k}{k'^2}(K'-E')$; $\quad \frac{\partial K'}{\partial k} = -\frac{1}{kk'^2}(E'-k^2K')$;

woraus noch folgt

3. $\frac{\partial(K-E)}{\partial k} = \frac{kE}{k'^2}$ und $\frac{\partial(K'-E')}{\partial k} = -\frac{E'}{k}$.

Diese Formeln müssen immer beim Differenziiren angewandt werden, wenn in einer Gleichung Modular-Quadranten oder auch elliptische Quadranten vorkommen, welche als veränderlich betrachtet werden. In Anwendung dieser Formeln läfst sich, was *Legendre* selbst eingesehen hat, das von ihm gefundene merkwürdige Theorem beweisen, wodurch ein Zusammenhang unter den vier Quadranten K, K', E und E' ausgedrückt wird.

Es ist der obigen Formel gemäfs

$$\frac{K'\partial E}{\partial k} = -\frac{KK'}{k} + \frac{EK'}{k}; \qquad \frac{E\partial K'}{\partial k} = -\frac{EE'}{kk'^2} + \frac{kEK'}{k'^2},$$

$$\frac{K\partial E'}{\partial k} = \frac{kKK'}{k'^2} - \frac{kKE'}{k'^2}; \qquad \frac{E'\partial K}{\partial k} = \frac{EE'}{kk'^2} - \frac{KE'}{k}.$$

Durch die Addition dieser vier Gleichungen erhält man

$$\frac{K'\partial E + E\partial K' + K\partial E' + E'\partial K}{\partial k} = \frac{\partial(K'E+KE')}{\partial k} = \frac{KK'(k^2-k'^2)+EK'-KE'}{kk'^2}.$$

Ferner ist $\frac{K'\partial K}{\partial k} = \frac{EK'}{kk'^2} - \frac{KK'}{k}$ und $\frac{K\partial K'}{\partial k} = \frac{k}{k'^2}KK' - \frac{KE'}{kk'^2}$, also

$$\frac{K'\partial K + K\partial K'}{\partial k} = \frac{\partial(KK')}{dk} = \frac{KK'(k^2-k'^2)+EK'-KE'}{kk'^2};$$

folglich ist $\frac{\partial(K'E+KE') - \partial(KK')}{\partial k} = 0$. Integrirt man also, so entsteht

$$K'E + KE' - KK' = \text{const.}$$

Die Constante ist $= \frac{1}{2}\pi$, wie am Schlusse des §. 76. gezeigt worden ist.

§. 94.

Differenzial-Gleichung der ersten Ordnung für das Verhältnifs $\frac{E}{K}$, und Ausdruck desselben durch eine nach Potenzen von k fortschreitende Reihe.

Es ist $\partial\left(\frac{E}{K}\right) = \frac{K\partial E - E\partial K}{K^2} = \frac{\left(-\frac{K^2}{k} + \frac{KE}{k} - \frac{E^2}{kk'^2} + \frac{EK}{k}\right)\partial k}{K^2}$ (nach §. 93.). Dividirt man wirklich jedes Glied des Zählers durch den Nenner K^2

und setzt, wie im §. 84., das Verhältnifs $\frac{E}{K} = 1 - t$, so erhält man

$$-\frac{\partial t}{\partial k} = -\frac{1}{k} + \frac{1-t}{k} - \frac{(1-t)^2}{kk'^2} + \frac{1-t}{k} \text{ oder}$$

$$\frac{\partial t}{\partial k} = \frac{1}{k} - \frac{2(1-t)}{k} + \frac{(1-t)^2}{kk'^2} \text{ und also}$$

$$\frac{\partial t}{\partial k} = \frac{(1-2t)k}{k'^2} + \frac{t^2}{kk'^2}.$$

Stellt man sich die Gröfse t in eine nach Potenzen von k fortschreitende Reihe entwickelt vor, so kann man nach der im Zusatze zu §. 85. gefundenen Formel schliefsen, dafs das Anfangs-Glied jener Reihe ebenfalls $\frac{k^2}{2}$ sein werde. Setzt man daher $t = \frac{k^2}{2} \cdot v$, so wird das Anfangs-Glied einer nach Potenzen von k fortschreitenden Reihe für v die Einheit sein. Aus der Gleichung

$t = \frac{k^2}{2} \cdot v$ folgt aber $\frac{\partial t}{\partial k} = \frac{k^2}{2} \cdot \frac{\partial v}{\partial k} + kv$, $t^2 = \frac{k^4}{4} v^2$, also $\frac{t^2}{k} = \frac{k^3 v^2}{4}$, $1-2t = 1-k^2v$: daher haben wir die Gleichung

$$\frac{k^2}{2} \cdot \frac{\partial v}{\partial k} + kv = \frac{(1-k^2v)k}{k'^2} + \frac{k^3 v^2}{4k'^2} \text{ oder}$$

$$2k \cdot \frac{\partial v}{\partial k} + 4v = \frac{4(1-k^2 v) + k^2 v^2}{k'^2}; \text{ also}$$

$$2(k-k^3) \cdot \frac{\partial v}{\partial k} + 4(1-k^2)v - 4 + 4k^2 v) - k^2 v^2 = 0 \text{ oder}$$

$$2(k-k^3) \cdot \frac{\partial v}{\partial k} + 4(v-1) - k^2 v^2 = 0.$$

Nach dieser Formel kann v ziemlich bequem in eine nach Potenzen von k fortschreitende Reihe entwickelt werden und dann hat man

$$\frac{E}{K} = 1 - \frac{k^2}{2} \cdot v.$$

Die Rechnung wird noch etwas einfacher, wenn man eine Gröfse $x = \frac{k^2}{4}$ einführt. Dann ist rückwärts $k = 2\sqrt{x}$, und $\partial k = \frac{\partial x}{\sqrt{x}}$, also $\frac{2k}{\partial k} = \frac{4x}{\partial x}$: folglich ist

$$4x(1-4x) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + 4(v-1) - 4xv^2 = 0, \text{ oder auch}$$

$$(1-4x) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v-1}{x} - v^2 = 0.$$

Zusatz. Setzt man $v = 1 + \overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 + \overset{3}{a}x^3 + \overset{4}{a}x^4 + \text{etc.}$ und substituirt man diese Reihe in der gefundenen Gleichung, so hat man zur Bestimmung der unbekannten Coefficienten die folgenden Formeln:

$$2\overset{1}{a} = 1,$$
$$3\overset{2}{a} = (4.1+2)\overset{1}{a},$$
$$4\overset{3}{a} = (4.2+2)\overset{2}{a} + \overset{1}{a^2},$$
$$5\overset{4}{a} = (4.3+2)\overset{3}{a} + 2\overset{2}{a}\overset{1}{a},$$
$$6\overset{5}{a} = (4.4+2)\overset{4}{a} + 2\overset{3}{a}\overset{1}{a} + \overset{2}{a^2},$$
$$7\overset{6}{a} = (4.5+2)\overset{5}{a} + 2\overset{4}{a}\overset{1}{a} + 2\overset{3}{a}\overset{2}{a},$$
$$8\overset{7}{a} = (4.6+2)\overset{6}{a} + 2\overset{5}{a}\overset{1}{a} + 2\overset{4}{a}\overset{2}{a} + \overset{3}{a^2},$$
$$9\overset{6}{a} = (4.7+2)\overset{7}{a} + 2\overset{6}{a}\overset{1}{a} + 2\overset{5}{a}\overset{2}{a} + 2\overset{4}{a}\overset{3}{a}$$

u. s. w.

und aus ihnen findet sich die Reihe

$$v = 1 + \tfrac{1}{2}x + x^2 + \frac{41}{2^4}x^3 + \frac{59}{2^3}x^4 + \frac{727}{2^5}x^5 + \frac{1171}{2^4}x^6 + \frac{498409}{2^{11}}x^7 + \frac{848479}{2^{10}}x^8 + \text{etc.}$$

Da nun $x = \frac{k^2}{2^2}$ und $t = \frac{k^2 v}{2}$ ist, so erhalten wir endlich, wenn wieder

$$E = K - Kt \quad \text{und} \quad E' = \frac{\pi}{2K} + K'.t$$

gesetzt wird (wie im §. 84.), für t die Reihe

$$t = \frac{k^2}{2} + \frac{1}{2^4}k^4 + \frac{k^6}{2^5} + \frac{41k^8}{2^{11}} + \frac{59k^{10}}{2^{12}} + \frac{727k^{12}}{2^{16}} + \frac{1171k^{14}}{2^{17}} + \frac{498409k^{16}}{2^{26}} + \frac{848479k^{18}}{2^{27}} + \text{etc.},$$

welche die Eigenthümlichkeit hat, dafs sämmtliche Nenner nur Potenzen der Zahl 2 sind. Werden diese Potenzen berechnet, so ist

$$t = \frac{k^2}{2} + \frac{k^4}{16} + \frac{k^6}{32} + \frac{41k^8}{2048} + \frac{59k^{10}}{4096} + \frac{727k^{12}}{65536} + \frac{1171k^{14}}{131072} + \frac{498409k^{16}}{67008864} + \frac{848479k^{18}}{134017728} + \text{etc.}$$

Da in wirklichen Anwendungen dieser Reihe $k^2 < \frac{1}{2}$ ist, so sieht man, dafs dieselbe immer ziemlich schnell convergirt.

§. 95.

Differenzial-Gleichung für das Verhältnifs $v = \frac{aE+b(K'-E')}{aK+bK'}$, wenn a und b ganz willkürliche, von k unabhängige Zahlen sind.

Setzen wir der Kürze wegen $\alpha' = aE+b(K'-E')$ und $\alpha = aK+bK'$, so ist nach §. 93.

$$\frac{\partial\alpha'}{\partial k} = -\frac{a}{k}(K-E) - \frac{b}{k}.E', \text{ also } -k.\frac{\partial\alpha'}{\partial k} = a(K-E)+bE',$$

oder auch $-k.\frac{\partial\alpha'}{\partial k} = \alpha-\alpha'$, und also

$$\frac{\partial\alpha'}{\partial k} = \frac{\alpha'-\alpha}{k}.$$

Ferner ist $\alpha-\alpha' = a(K-E)+bE'$, also $\frac{\partial(\alpha-\alpha')}{\partial k} = \frac{akE}{k'^2} + \frac{bk}{k'^2}(K'-E') = \frac{k}{k'^2}.\alpha'$, oder $\frac{\partial\alpha}{\partial k} - \frac{\partial\alpha'}{\partial k} = \frac{k}{k'^2}.\alpha'$. Wird hierzu die vorige Gleichung addirt, so entsteht

$$\frac{\partial\alpha}{\partial k} = \frac{\alpha'-\alpha}{k} + \frac{k}{k'^2}\alpha'.$$

Da nun aber $\frac{\partial v}{\partial k} = \frac{\partial\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)}{\partial k} = \frac{\alpha\partial\alpha'-\alpha'\partial\alpha}{\alpha^2\partial k}$ ist, so setzen wir zusammen

$$\alpha.\frac{\partial\alpha'}{\partial k} = \frac{\alpha\alpha'-\alpha^2}{k},$$

$$\alpha'.\frac{\partial\alpha}{\partial k} = \frac{-\alpha\alpha'+\alpha'^2}{k} + \frac{k}{k'^2}.\alpha'^2 = -\frac{\alpha\alpha'}{k} + \frac{\alpha'^2}{kk'^2},$$

und also $\frac{\partial v}{\partial k} = \frac{-\frac{\alpha^2}{k} + \frac{2\alpha\alpha'}{k} - \frac{\alpha'^2}{kk'^2}}{\alpha^2}$. Dividirt man also jedes Glied des Zählers durch α^2, indem man v für $\frac{\alpha'}{\alpha}$ setzt, so entsteht die Gleichung

$$\frac{\partial v}{\partial k} = -\frac{1}{k} + \frac{2v}{k} - \frac{v^2}{kk'^2},$$

welche also für beliebige Werthe der Gröfsen a und b richtig ist. Das vollständige Integral dieser Differenzial-Gleichung ist also

$$v = \frac{aE+b(K'-E')}{aK+bK'}.$$

§. 96.

Ausdruck der Abhängigkeit einer Function der Gröfse $v = \frac{a'K+b'K'}{aK+bK'}$ vom Modul k durch eine Differenzial-Gleichung der ersten Ordnung.

Bezeichnen a, b, a', b' vier ganz willkürliche und also vom Modul k unabhängige Gröfsen, und setzen wir jetzt

$$\alpha = aK + bK', \qquad \alpha' = a'K + b'K',$$

also $v = \frac{\alpha'}{\alpha}$, so ist $\frac{\partial v}{\partial k} = \frac{\alpha \cdot \frac{\partial \alpha'}{\partial k} - \alpha' \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial k}}{\alpha^2}$. Entwickeln wir vorläufig die Differenz $\alpha \partial \alpha' - \alpha' \partial \alpha$, so ist

$$\partial \alpha = a\partial K + b\partial K' = (aE - ak'^2 K + bk^2 K' - bE') \cdot \frac{\partial k}{kk'^2} \text{ und}$$

$$\partial \alpha' = a'\partial K + b'\partial K' = (a'E - a'k'^2 K + b'k^2 K' - b'E') \cdot \frac{\partial k}{kk'^2}.$$

Aus diesen Ausdrücken setzen wir zusammen $\alpha \partial \alpha' - \alpha' \partial \alpha$ durch die Substitution der vorhin angegebenen Werthe; durch eine namhafte, aber leichte Reduction, weil sie nur im Weglassen gleicher und entgegengesetzter Glieder besteht, findet sich

$$\alpha \partial \alpha' - \alpha' \partial \alpha = (ba' - ab')(EK' + E'K - KK') \cdot \frac{\partial k}{kk'^2},$$

welcher Ausdruck sich nach §. 93. noch reducirt auf

$$\alpha \partial \alpha' - \alpha' \partial \alpha = \tfrac{1}{2}\pi (ba' - ab') \cdot \frac{\partial k}{kk'^2}.$$

Da nun aber $\partial v = \frac{\alpha \partial \alpha' - \alpha' \partial \alpha}{\alpha^2}$, also rückwärts $\alpha^2 = \frac{\alpha \partial \alpha' - \alpha' \partial \alpha}{\partial v}$ ist, so ist

$$1. \qquad \alpha^2 = \tfrac{1}{2}\pi (ba' - ab') \cdot \frac{1}{kk'^2} \cdot \frac{\partial k}{\partial v}.$$

Ferner ist nach §. 91. $(1-k^2) \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial K}{\partial k}\right)}{\partial k} + \frac{1-3k^2}{k} \cdot \frac{\partial K}{\partial k} - K = 0$ und nach §. 92. ist

$$(1-k^2) \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial K'}{\partial k}\right)}{\partial k} + \frac{1-3k^2}{k} \cdot \frac{\partial K'}{\partial k} - K' = 0.$$

Wird die erste dieser beiden Gleichungen mit a und die zweite mit b multiplicirt, so erhält man durch die Addition dieser beiden Gleichungen, da

$$\alpha = aK + bK, \text{ also } \frac{\partial \alpha}{\partial k} = a \cdot \frac{\partial K}{\partial k} + b \cdot \frac{\partial K'}{\partial k} \text{ und}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \alpha}{\partial k}\right)}{\partial k} = a \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial K}{\partial k}\right)}{\partial k} + b \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial K'}{\partial k}\right)}{\partial k}$$

ist, noch die Gleichung

$$2. \qquad (1-k^2) \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial \alpha}{\partial k}\right)}{\partial k} + \frac{1-3k^2}{k} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial k} - \alpha = 0.$$

Wird aus den Gleichungen (1.) und (2.) die Gröfse α eliminirt, so erhalten wir eine Differenzial-Gleichung der dritten Ordnung zum Ausdrucke der Abhängigkeit der Gröfse $v = \frac{a'K+b'K'}{aK+bK'}$ vom Modul k. Diese Differenzial-Gleichung, welche bekannt ist, werden wir bald nachher ebenfalls herleiten. Es scheint aber zweckmäfsig, da eine Function von v gefunden werden kann, deren Abhängigkeit vom Modul k schon durch eine sehr einfache Differenzial-Gleichung der ersten Ordnung ausgedrückt wird, die Herleitung dieser Differenzial-Gleichung vorauszuschicken. Setzen wir

$$\beta = \frac{\partial \alpha}{\partial k}, \qquad \gamma = \frac{\partial \beta}{\partial k},$$

so haben wir, der Gleichung (2.) gemäfs,

$$(k-k^3).\gamma + (1-3k^2)\beta - k\alpha = 0 \quad \text{oder}$$

$$3. \qquad (k-k^3).\frac{\gamma}{\alpha} + (1-3k^2).\frac{\beta}{\alpha} = k,$$

und es findet diese Gleichung Statt, es mag $\partial^2 k = 0$ gesetzt werden oder nicht. Aus der Gleichung (1.) folgt

$$\log\alpha = \tfrac{1}{2}\log(\tfrac{1}{2}\pi(ba'-ab')) - \tfrac{1}{2}\log(k-k^3) - \log\sqrt{\frac{\partial v}{\partial k}},$$

und also durch Differenziiren

$$\frac{\partial\alpha}{\alpha} = -\tfrac{1}{2}.\frac{1-3k^2}{k-k^3}\,\partial k - \partial\log\sqrt{\frac{\partial v}{\partial k}}.$$

Dividiren wir diese Gleichung durch ∂k und setzen $\frac{\partial\log\sqrt{\frac{\partial v}{\partial k}}}{\partial k} = x$, so ist

$$\frac{\beta}{\alpha} = -\tfrac{1}{2}.\frac{1-3k^2}{k-k^3} - x.$$

Wird diese Gleichung noch einmal differenziirt, so erhält man zunächst

$$\frac{\alpha\partial\beta-\beta\partial\alpha}{\alpha^2} = \tfrac{1}{2}.\frac{1+3k^4}{(k-k^3)^2}\,\partial k - \partial x,$$

oder wenn man durch ∂k dividirt,

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \tfrac{1}{2}.\frac{1+3k^4}{(k-k^3)^2} - \frac{\partial x}{\partial k}.$$

Werden diese Werthe von $\frac{\beta}{\alpha}$ und $\frac{\gamma}{\alpha}$ in der Gleichung (3.) substituirt, so erhält man nach einer leichten Reduction die einfache Differenzial-Gleichung

$$\frac{\partial x}{\partial k} - x^2 = \tfrac{1}{4}.\left(\frac{1+k^2}{k-k^3}\right)^2$$

von der ersten Ordnung, deren Integral $x = \frac{\partial\log\sqrt{\frac{\partial v}{\partial k}}}{\partial k}$ und also eine Function von v ist.

§. 97.

Ausdruck des Zusammenhanges unter den beiden Moduln k und λ, wenn die dazu gehörigen Quadranten K und L und die conjugirten Quadranten K' und L' durch eine Gleichung von der Form $\frac{a'K+b'K'}{aK+bK} = \frac{\alpha'L+\beta'L'}{\alpha L+\beta L}$ mit einander verbunden sind.

Setzt man, wie im §. 96., $x = \frac{\partial \log \sqrt{\frac{\partial v}{\partial k}}}{\partial k}$ und sieht man weder ∂k, noch ∂v als constant an, so findet man durch die Entwicklung dieses Ausdrucks:

$$2x = \frac{\partial^2 v}{\partial k . \partial v} - \frac{\partial^2 k}{\partial k^2},$$

und wenn man quadrirt,

$$4x^2 = \frac{(\partial^2 v)^2}{\partial k^2 . \partial v^2} - 2.\frac{\partial^2 k . \partial^2 v}{\partial k^3 . \partial v} + \frac{(\partial^2 k)^2}{\partial k^4}.$$

Wenn man aber differenziirt, so entsteht

$$2.\frac{\partial x}{\partial k} = \frac{\partial^3 v}{\partial v . \partial k^2} - \frac{(\partial^2 v)^2}{\partial v^2 . \partial k^2} - \frac{\partial^2 v . \partial^2 k}{\partial v . \partial k^3} - \frac{\partial^3 k}{\partial k^3} + 2.\frac{(\partial^2 k)^2}{\partial k^4}.$$

Werden diese beiden Ausdrücke in der Gleichung $4.\frac{\partial x}{\partial k} - 4x^2 = \left(\frac{1+k^2}{k-k^3}\right)^2$ substituirt und die sich dabei aufhebenden Glieder weggelassen, so erhält man die Gleichung

$$2.\frac{\partial^3 v}{\partial v . \partial k^2} - 3.\frac{(\partial^2 v)^2}{\partial v^2 . \partial k^2} = 2\frac{\partial^3 k}{\partial k^3} - 3.\frac{(\partial^2 k)^2}{\partial k^4} + \left(\frac{1+k^2}{k-k^3}\right)^2,$$

oder auch

$$1. \quad 2.\frac{\partial^3 v}{\partial v} - 3.\frac{(\partial^2 v)^2}{\partial v^2} = 2.\frac{\partial^3 k}{\partial k} - 3.\frac{(\partial^2 k)^2}{\partial k^2} + \left(\frac{1+k^2}{k-k^3}\right)^2 \partial k^2,$$

welche sich, wenn man ∂k als constant ansieht und also $\partial^2 k = \partial^3 k = 0$ setzt, zusammenzieht auf

$$2.\frac{\partial^3 v}{\partial v} - 3.\frac{(\partial^2 v)^2}{\partial v^2} = \left(\frac{1+k^2}{k-k^3}\right)^2 . \partial k^2: \text{ aber auf}$$

$$2.\frac{\partial^3 k}{\partial k} - 3.\frac{(\partial^2 k)^2}{\partial k^2} + \left(\frac{1+k^2}{k-k^3}\right)^2 . \partial k^2 = 0,$$

wenn man v, obgleich es aus der Gleichung verschwunden ist, als diejenige Gröfse ansieht, in Beziehung auf welche k differenziirt werden mufs.

Sind λ und λ' zwei andere conjugirte Modul, wozu die Quadranten L und L' gehören, und setzen wir

$$v' = \frac{\alpha' L + \beta' L'}{\alpha L + \beta . L'}$$

indem wieder α, β, α', β' vier beliebige und vom Modul λ unabhängige

Gröfsen sind, so ist, der vorhin gefundenen Gleichung gemäfs, auch

$$2.\frac{\partial^3 v'}{\partial v'} - 3.\frac{(\partial^2 v')^2}{\partial v'^2} = 2.\frac{\partial^3 \lambda}{\partial \lambda} - 3.\frac{(\partial^2 \lambda)^2}{\partial \lambda^2} + \left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda-\lambda^3}\right)^2.\partial\lambda^2.$$

Setzen wir nun aufserdem $v = v'$, so giebt es, da v und v' Functionen von k und λ sind, einen eben durch diese Gleichung $v = v'$ ausgedrückten Zusammenhang zwischen den beiden Moduln k und λ, welchem gemäfs man entweder k als eine Function von λ, oder umgekehrt λ als eine Function von k, oder endlich k und λ als Functionen einer und derselben dritten veränderlichen Gröfse ansehen kann. In jedem dieser drei Fälle ist aber auch $\partial v = \partial v'$ und $\partial^2 v = \partial^2 v'$, und folglich

$$2.\quad 2.\frac{\partial^3 k}{\partial k} - 3.\frac{(\partial^2 k)^2}{\partial k^2} + \left(\frac{1+k^2}{k-k^3}\right)^2.\partial k^2 = 2.\frac{\partial^3 \lambda}{\partial \lambda} - 3.\frac{(\partial^2 \lambda)^2}{\partial \lambda^2} + \left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda-\lambda^3}\right)^2.\partial\lambda^2.$$

Die beiden Modul k und λ sind hiernach durch eine Differenzial-Gleichung der dritten Ordnung mit einander verbunden, deren vollständiges Integral die Gleichung $v = v'$ oder auch

$$\frac{\alpha' K + b' K'}{\alpha K + b K'} = \frac{\alpha' L + \beta' L'}{\alpha L + \beta L}$$

ist. Schafft man in dieser Gleichung die Nenner fort, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$a.KL + b.KL' + c.K'L + d.K'L' = 0,$$

in welcher a, b, c, d willkürliche Constanten sind.

Nach §. 54. ist z. B. $\frac{K}{K'} = 2.\frac{L}{L'}$ oder $KL' - 2K'L = 0$ eine Gleichung, welche unter der Form der Gleichung (3.) oder (4.) enthalten ist, und die durch die Gleichung $k = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}$ mit einander verbundenen Modul werden also die allgemeine Bedingungsgleichung (2.) befriedigen. Die Gleichung $k = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}$ ist also ein particuläres Integral der Gleichung (2.), welche, wie weiter unten erhellen wird, unzählige particuläre Integrale hat. Setzen wir $\lambda = \frac{1}{k}$, so ist nach §. 31.:

$$\frac{L}{L'} = \frac{K}{K'} - i, \quad \text{also} \quad LK' - KL' + iK'L' = 0$$

und auch $\lambda = \frac{1}{k}$ ist ein particuläres Integral der Gleichung (2.), wovon man sich durch die wirkliche Substitution auch leicht a posteriori überzeugen kann.

§. 98.

Vollständige Integration dreier Differenzial-Gleichungen der zweiten Ordnung.

Setzen wir, wie im §. 96., $\alpha = aK + bK'$, so ist $(1-k^2)\frac{\partial^2\alpha}{\partial k^2} + \frac{1-3k^2}{k}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial k} - \alpha = 0$; addirt man hierzu die Gleichung (1.) des §. 91., so erhält man, wenn $z = u + \alpha$ gesetzt wird, die Gleichung

$$1. \quad (1-k^2)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial k^2} + \frac{1-3k^2}{k}\cdot\frac{\partial z}{\partial k} - z + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)^3}} = 0,$$

welche eine Differenzial-Gleichung der zweiten Ordnung und deren vollständiges Integral also $z = u + \alpha$, oder auch

$$2. \quad z = \arg\operatorname{am}(\Phi) + aK + bK' \text{ ist.}$$

Wir leiten noch zwei dem vorigen ähnliche Resultate her. Nach §. 91. ist

$$(1-k^2)\cdot\frac{\partial^2 \operatorname{el} u}{\partial k^2} + \frac{1-k^2}{k}\cdot\frac{\partial \operatorname{el} u}{\partial k} + \operatorname{el} u - \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} = 0.$$

Setzt man hierin $u = K$, so hat man noch

$$(1-k^2)\cdot\frac{\partial^2 E}{\partial k^2} + \frac{1-k^2}{k}\cdot\frac{\partial E}{\partial k} + E = 0,$$

und wenn man $u = 2iK'$, also $\operatorname{sn} u = 0$ und $\operatorname{el} u = 2i(K'-E')$ setzt, so erhält man noch $(1-k^2)\cdot\frac{\partial^2(K'-E')}{\partial k^2} + \frac{1-k^2}{k}\cdot\frac{\partial(K'-E')}{\partial k} + K' - E' = 0$, welche Gleichung mit der im Zusatze zu §. 92. gefundenen dieselbe ist. Multipliciren wir nun die zweite dieser Gleichungen mit a, die dritte mit b, und addiren wir dann die drei Gleichungen, so erhalten wir

$$3. \quad (1-k^2)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial k^2} + \frac{1-k^2}{k}\cdot\frac{\partial z}{\partial k} + z - \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} = 0,$$

und das vollständige Integral dieser Gleichung ist also

$$4. \quad z = \operatorname{el} u + aE + b(K'-E')$$

Nach dem Zusatze zu §. 92. ist

$$(1-k^2)\cdot\frac{\partial^2(u-\operatorname{el} u)}{\partial k^2} - \frac{1+k^2}{k}\cdot\frac{\partial(u-\operatorname{el} u)}{\partial k} + u - \operatorname{el} u + \frac{k^2\operatorname{sn}^3 u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^3 u} = 0,$$

Aufserdem ist noch $(1-k^2)\cdot\frac{\partial^2(K-E)}{\partial k^2} - \frac{1+k^2}{k}\cdot\frac{\partial(K-E)}{\partial k} + K - E = 0$ und

$$(1-k^2)\cdot\frac{\partial^2 E'}{\partial k^2} - \frac{1+k^2}{k}\cdot\frac{\partial K'}{\partial k} + K' = 0.$$

Aus diesen drei Gleichungen setzen wir die Gleichung

$$5. \quad (1-k^2)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial k^2} - \frac{1+k^2}{k} + \frac{\partial z}{\partial k} + \frac{k^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^3 u} = 0$$

zusammen und ihr vollständiges Integral ist dann

$$6. \quad z = u - \operatorname{el} u + aE' + b(K-E).$$

(Die Fortsetzung folgt im nächsten Bande.)

22.

Ueber die Biegung krummer Flächen.

(Von dem Verfasser des Aufsatzes No. 20. in diesem Heft.)

Die bisher betrachteten Biegungen der Flächen, welche durch gerade Linien erzeugt werden, sind keinesweges die einzig möglichen; nur die Biegungen der *Ebene* lassen sich immer durch gerade Linien erzeugen. Dagegen stellen folgende Gleichungen eine Biegung der *Schraubenfläche* dar, welche keine geraden Linien enthält (wie leicht zu beweisen ist), nemlich:

$$x = \frac{1}{a}\sqrt{(n^2+q^2)}\cos ap, \qquad y = \frac{1}{a}\sqrt{(n^2+q^2)}\sin ap,$$

$$z = \frac{1}{a}\int_0^q \sqrt{\left(\frac{a^2n^2+(a^2-1)q^2}{n^2+q^2}\right)}\,dq.$$

a ist eine willkürliche Constante. Diese Formeln geben

$$ds^2 = (n^2+q^2)\,dp^2 + dq^2,$$

wie oben bei der Schraubenfläche; was hinreicht zu beweisen, dafs sie eine Biegung derselben ausdrücken, die übrigens eine Umdrehungsfläche ist, wie offenbar folgt, wenn man q constant setzt. Für $q = o$ erhält man $\sqrt{(x^2+y^2)} = r = \frac{n}{a}$; die Axe der Schraubenfläche (welche dem Werthe Null von q entspricht) ist demnach hier in einen Kreis vom Halbmesser $\frac{n}{a}$ gebogen, in welchem sie sich unzählige Male herumwindet. Die Drehungsaxe (z) geht durch den Mittelpunct dieses Kreises und steht senkrecht auf der Ebene desselben; die erzeugende Curve, den geraden Linien der Schraubenfläche entsprechend, geht vom Umringe dieses Kreises, in welchem sie ihren Scheitel hat, nach beiden Seiten symmetrisch fort. Ihre Grund-Eigenschaft wird durch die Gleichung $a^2r^2 = n^2+q^2$ gegeben, wenn man bemerkt, dafs q den Bogen der Curve, vom Scheitel bis zu dem Puncte dessen Abscisse $r\,(=\sqrt{(x^2+y^2)})$, bedeutet. Für $a = 1$ ist die Curve die Kettenlinie, die Fläche selbst aber ist diejenige sehr bekannte, welche eben so wie die Schraubenfläche, die Eigenschaft des kleinsten Inhaltes zwischen gegebenen Grenzen besitzt. Nimmt man $a<1$, so wird die Fläche imaginär, wenn $q > \frac{an}{\sqrt{(1-a^2)}}$; alsdann gilt die Biegung nur für einen

Theil der Schraubenfläche; wenn aber $a = 1$ oder > 1, gilt sie für das Ganze derselben.

Ueberhaupt ist es eine sehr anziehende, zugleich aber äufserst schwierige Aufgabe: alle möglichen Biegungen einer gegebenen Fläche darzustellen. Einige lassen sich in gewissen Fällen auf folgende Art finden:

In dem Ausdrucke des Linear-Elementes kann man immer $F = 0$ annehmen, und mithin setzen: $ds^2 = E\,dp^2 + G\,dq^2$. Dazu wird nur erfordert, dafs alle Curven auf der Fläche, für welche p allein sich ändert, diejenigen, für welche q allein veränderlich ist, unter rechten Winkeln schneiden. Dieses vorausgesetzt, nehme man für z eine unbestimmte Function von p oder von q; es sei z. B. $dz = Q\,dq$, und Q blofs von q abhängig. Alsdann erhält man $dx^2 + dy^2 = E\,dp^2 + (G - Q^2)\,dq^2$. Multiplicirt man mit der Gleichung $1 = \cos\psi^2 + \sin\psi^2$ und setzt zur Abkürzung $\sqrt{E} = u$, $\sqrt{(G - Q^2)} = v$, so folgt $dx^2 + dy^2 = (u\cos\psi\,dp + v\sin\psi\,dq)^2 + (u\sin\psi\,dp - v\cos\psi\,dq)^2$. Man setze demnach

$$\begin{aligned} dx &= u\cos\psi\,dp + v\sin\psi\,dq \\ dy &= -u\sin\psi\,dp + v\cos\psi\,dq, \end{aligned}$$

so lassen sich zuweilen die Functionen Q und ψ so bestimmen, dafs die Werthe von dx und dy integrabel werden. Zu diesem Ende mufs sein:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dq}\cdot\cos\psi - u\sin\psi\cdot\frac{d\psi}{dq} &= \frac{dv}{dp}\cdot\sin\psi + v\cos\psi\cdot\frac{d\psi}{dp}, \\ \frac{du}{dq}\cdot\sin\psi + u\cos\psi\cdot\frac{d\psi}{dq} &= -\frac{dv}{dp}\cdot\cos\psi + v\sin\psi\cdot\frac{d\psi}{dp}, \end{aligned}$$

oder einfacher, was auf dasselbe hinauskommt:

$$A.\quad \frac{du}{dq} = v\frac{d\psi}{dp} \text{ und } \frac{dv}{dp} = -u\frac{d\psi}{dq}.$$

Soll nun die Bestimmung von ψ möglich sein, so mufs der Bedingung $\dfrac{d\left(\frac{1}{v}\cdot\frac{du}{dq}\right)}{dq} = -\dfrac{d\left(\frac{1}{u}\cdot\frac{dv}{dp}\right)}{dp}$ durch die Wahl der Function Q (in $v = \sqrt{(G - Q^2)}$) genügt werden können. Diese Gleichung giebt

$$\frac{1}{v}\cdot\frac{d^2u}{dq^2} + \frac{1}{u}\cdot\frac{d^2v}{dp^2} = \frac{1}{v^2}\cdot\frac{dv}{dq}\cdot\frac{du}{dq} + \frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{dp}\cdot\frac{dv}{dp},$$

oder weil

$$v\frac{dv}{dp} = \tfrac{1}{2}\frac{dG}{dp}, \qquad v\frac{dv}{dq} = \tfrac{1}{2}\frac{dG}{dq} - Q\frac{dQ}{dq} \text{ und}$$

$$v\frac{d^2v}{dp^2} = \tfrac{1}{2}\frac{d^2G}{dp^2} - \frac{1}{4v^2}\cdot\left(\frac{dG}{dp}\right)^2 \text{ ist,}$$

$$\frac{d^2u}{dq^2}+\frac{1}{u}\left[\tfrac{1}{2}\frac{d^2G}{dp^2}-\frac{1}{4v^2}\left(\frac{dG}{dp}\right)^2\right]$$
$$=\frac{1}{v^2}\cdot\frac{du}{dq}\left(\tfrac{1}{2}\frac{dG}{dq}-Q\frac{dQ}{dq}\right)+\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{dp}\cdot\tfrac{1}{2}\frac{dG}{dp},$$

oder wenn man für v^2 seinen Werth $G-Q^2$ setzt und entwickelt:

$$\frac{du}{dq}.Q\frac{dQ}{dq}=MQ^2+N,$$

wo

$$M=\frac{d^2u}{dq^2}+\frac{1}{2u}.\frac{d^2G}{dp^2}-\frac{1}{2u^2}.\frac{du}{dp}.\frac{dG}{dp}\quad\text{und}$$
$$N=\frac{1}{4u}.\left(\frac{dG}{dp}\right)^2+\tfrac{1}{2}\frac{du}{dq}.\frac{dG}{dq}-GM$$

ist. Wenn nun die Ausdrücke $\frac{M}{\frac{du}{dq}}$ und $\frac{N}{\frac{du}{dq}}$ blofs noch q, nicht aber p enthalten, so kann hieraus Q und dann ψ gefunden werden.

Unter den Anwendungen, welche vorstehende Bemerkung gestattet, will ich nur diejenige auf *Umdrehungsflächen* hervorheben. Für solche kann man setzen:

$$x=\Phi(q).\cos p,\quad y=\Phi(q).\sin p,\quad z=f(q);$$

mithin

$$\partial s^2=(\Phi q)^2\partial p^2+((\Phi' q)^2+(f' q)^2)\partial q^2.$$

Hier sind die Gröfsen $u=\Phi q$, $G=(\Phi' q)^2+(f' q)^2$ unabhängig von p, wodurch der obigen Bedingung genügt wird. In der That erhält man aus den Gleichungen (*A.*), weil $\frac{dv}{dp}=0$,

$$\frac{d\psi}{dq}=0,\quad\frac{d\psi}{dp}.\sqrt{(G-Q^2)}=\Phi' q,$$

woraus folgt: $\frac{d\psi}{dp}=\frac{1}{a}$, $G-Q^2=a^2(\Phi' q)^2$. (a ist eine willkürliche Constante.) Hieraus ergeben sich die Gleichungen:

$$x=a\Phi(q).\sin\left(\tfrac{p}{a}\right),\quad y=a\Phi(q).\cos\left(\tfrac{p}{a}\right),$$
$$z=\int\sqrt{((f' q)^2+(1-a^2)(\Phi' q)^2)}.dq,$$

welche wieder eine Umdrehungsfläche darstellen, die für $a=1$ mit der vorigen zusammenfällt, für andere Werthe von a aber eine Biegung derselben darstellt. Für die *Kugel* kann man z. B. setzen $\Phi q=\cos q$, $fq=\sin q$, woraus erhalten wird:

$$x=a\cos q.\sin\left(\tfrac{p}{a}\right),\quad y=a\cos q.\cos\left(\tfrac{p}{a}\right),\quad z=\int_0^q\sqrt{(1-a^2\sin q^2)}.dq.$$

Diese Gleichungen geben für $a=1$ eine Kugel vom Halbmesser $=1$; für andere Werthe von a hingegen Biegungen derselben.

Um Mifsverständnissen vorzubeugen, bemerke ich noch, dafs bekanntlich eine in sich geschlossene convexe Fläche als unversehrtes Ganzes, unbiegsam ist. Man mufs sich daher, wenn von ihrer Biegung gesprochen wird, den Zusammenhang in einer gewissen Ausdehnung unterbrochen denken. Läfst man z. B. in den hier zunächst vorhergehenden Formeln a einen ächten Bruch bedeuten, so zeigt sich, dafs in der gebogenen Fläche einige Theile der ursprünglichen Kugelfläche auf einander fallen. Denn um die ganze gebogene Fläche zu erhalten, braucht man, was p betrifft, nur Werthe von 0 bis $2a\pi$ anzunehmen, während für die Kugel p von 0 bis 2π fortgeht; der übrige von $p=2a\pi$ bis $p=2\pi$ reichende Kugelstreifen deckt mithin, nach der Biegung, den zwischen $p=0$ und $p=2\pi\ (1-a)$ enthaltenen Streifen der gebogenen Fläche. Dies ergiebt sich, wie man sieht, aus den Formeln von selbst, wenn man nur festhält, dafs zu demselben Puncte der Fläche, vor und nach der Biegung, dieselben Werthe von p und q gehören.

23.

Aufgaben und Lehrsätze,

erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.

Fortsetzung der Sätze im vorhergehenden Hefte S. 278.

(Von Hrn. Prof. *Steiner* zu Berlin.)

1. Wenn von zwei beliebigen (algebraischen oder transcendenten) Curven AB, $\mathfrak{AB}$ (Fig. 33.) in derselben Ebene die erste auf der anderen, die als fest betrachtet wird, rollt, bis etwa der Punct B mit $\mathfrak{B}$ zusammentrifft, wo also die Bogen AB und $\mathfrak{AB}$ von irgend einer bestimmten, gleichen Länge sind, aber keiner einen singulären Punct enthalten soll: so beschreibt jeder mit der rollenden Curve fest verbunden gedachte Punct P irgend ein gemischtliniges Viereck $\mathfrak{A}PP_1\mathfrak{B}\mathfrak{A}$, welches von zwei Geraden $P\mathfrak{A}$, $P_1\mathfrak{B}$, die den Punct anfangs und am Ende der Bewegung mit den respectiven Berührungspuncten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ der Basis verbinden, und von den zwei Curvenbogen $\mathfrak{AB}$, PP_1, (wo PP_1 der Weg des Puncts P ist) begrenzt wird. Der Inhalt dieses Vierecks werde durch F, die Winkel, welche die Normalen in den Endpuncten der Bogen AB, $\mathfrak{AB}$ unter sich bilden, durch $a, \mathfrak{a}$ bezeichnet; so findet folgendes Gesetz statt:

„Es giebt allemal einen bestimmten Punct p, welcher unter allen das kleinste Viereck $\mathfrak{A}pp_1\mathfrak{B}\mathfrak{A} = f$ beschreibt; Puncte P, welche gleich weit von p entfernt sind, beschreiben Vierecke von gleichem Inhalte F, und auch umgekehrt; so dafs also allen Puncten, die in irgend einer um p beschriebenen Kreislinie liegen, gleich grofse Vierecke entsprechen; und zwar ist jedes derselben gerade um einen Sector des zugehörigen Kreises, dessen Centriwinkel der Summe der zwei Winkel $a, \mathfrak{a}$ gleich ist, gröfser als jenes kleinste Viereck. Oder wird der Abstand eines beliebigen Punctes P von dem Puncte p durch r bezeichnet, so ist allgemein:

$$F = f + \tfrac{1}{2}r^2(a + \mathfrak{a}).”$$

Dieser Satz gestattet zahlreiche Folgerungen. Ist der eigenthümliche Punct p gefunden, so können sofort z. B. auch unter allen Puncten, welche in der rollenden Curve selbst liegen, diejenigen bestimmt werden, deren entsprechende Vierecke ein (relatives) Maximum oder Minimum sind; denn dieselben müssen offenbar in den Fufspuncten der aus p auf

die Curve gefällten Normalen liegen. Ein Theil der Sätze, welche S. 278 d. Bds. mitgetheilt worden, sind besondere Fälle des vorstehenden Satzes; und ein sehr specieller Fall desselben führt zur Quadratur der verschiedenen Cykloiden.

„Welche charakteristische Eigenschaft hat aber der merkwürdige Punct p in Beziehung auf die gegebenen Curven AB, 𝔄𝔅? wie wird er durch diese bestimmt?"

2. *„Ist AB* (Fig. 34.) *ein beliebiger Bogen irgend einer ebenen Curve, der jedoch keinen singulären Punct enthält, und bewegt sich die veränderliche Tangente AC oder AD längs desselben, unter der Bedingung, dafs sie stets dem Leitstrahle AP gleich ist, welcher den jedesmaligen Berührungspunct mit irgend einem festen Pole P in der Ebene der Curve verbindet: so beschreibt die Tangente ein gemischtliniges Viereck ACC_1BA oder ADD_1BA, dessen Inhalt F gröfser oder kleiner ist, jenachdem der Pol P gewählt wird; jedoch haben jedesmal die beiden Vierecke ACC_1B, ADD_1B unter sich gleichen Inhalt. Es giebt allemal einen bestimmten Pol p, welchem das kleinste Viereck $Acc_1B = f$ entspricht. Auch findet die Gleichung statt:*

$$F = f + \tfrac{1}{2} r^2 a,$$

wo r den Abstand des Pols P von p und a den Winkel zwischen den Normalen in den Endpuncten A, B des gegebenen Bogens AB bezeichnet."

Der Satz findet auf gleiche Weise statt, wenn die Tangente (AC) zu dem entsprechenden Leitstrahle (AP) ein gegebenes oder constantes Verhältnifs haben soll, und zwar bleibt der eigenthümliche Pol p der nämliche.

Von dem vorstehenden Satze mögen folgende specielle Fälle hier erwähnt werden:

α) Es sei die gegebene Curve eine Ellipse; ihre halben Axen seien α, β; der Bogen AB sei ihr ganzer Umfang, so dafs B und A zusammenfallen, $a = 2\pi$ wird und die von dem Endpuncte C oder c der Tangente beschriebene Curve CC_1, oder cc_1, sich schliefst und in sich zurückkehrt; der von dieser Curve umschlossene ganze Raum heifse F_1 oder f_1 (er besteht aus dem obigen Viereck F und dem Inhalte der Ellipse); so fällt der eigenthümliche Punct p mit dem Mittelpuncte der Ellipse zusammen, und es ist

$$f_1 = (\alpha^2 + \beta^2)\pi,$$
$$F_1 = f_1 + r^2\pi = (\alpha^2 + \beta^2 + r^2)\pi;$$

das heifst: *„der Inhalt* (f_1) *der dem Mittelpuncte p der Ellipse ent-*

sprechenden Curve cc_1 ist gleich der Summe der zwei Kreisflächen, welche die Axen der Ellipse zu Durchmessern haben;" und *„der Inhalt F_1 der einem beliebigen Puncte P entsprechenden Curve (CC_1) ist so grofs als drei Kreisflächen, welche beziehlich die halben Axen der Ellipse und den Abstand ihres Mittelpunctes von jenem Puncte zu Radien haben."*

Liegt der Pol P insbesondere in der Kreislinie, welche mit der Ellipse concentrisch ist und durch die Brennpuncte derselben geht, so ist

$$F_1 = 2a^2\pi,$$

d. h.: *„der Inhalt der ihm entsprechenden Curve CC_1 ist gerade doppelt so grofs als die Kreisfläche, welche die grofse Axe der Ellipse zum Durchmesser hat."*

β) Geht die Ellipse in einen Kreis über, so dafs $\beta = \alpha$, so hat man:

$$f_1 = 2a^2\pi, \quad \text{und} \quad F_1 = 2a^2\pi + r^2\pi.$$

Liegt der Pol P in der Kreislinie selbst, so ist

$$F_1 = 3a^2\pi,$$

d. h., der Inhalt der ihm entsprechenden Curve ist dreimal so grofs als die Kreisfläche.

3. *„Sind AB, $\mathfrak{AB}$* (Fig. 35.) *gleich lange Bogen zweier beliebigen ebenen Curven, wovon jedoch keiner einen singulären Punct enthalten soll, und bewegt sich eine veränderliche Tangente $\mathfrak{QP}$ längs dem Bogen $\mathfrak{AB}$, unter der Bedingung, dafs sie stets dem Leitstrahle QP gleich ist, welcher den ihrem Berührungspuncte $(\mathfrak{Q})$ correspondirenden Punct Q im anderen Bogen AB mit irgend einem festen Pole P in der Ebene dieses Bogens verbindet, d. h., dafs in jedem Augenblicke $\mathfrak{QP} = QP$ und $\mathfrak{AQ} = AQ$ ist: so beschreibt die Tangente ein bestimmtes Viereck $\mathfrak{ACC_1BA}$, dessen Inhalt F kleiner oder gröfser ist, nachdem der Pol P gewählt wird; jedoch bleibt für jeden einzelnen Fall der Inhalt der nämliche, wenn die Tangente nach entgegengesetzter Richtung genommen wird, nämlich $\mathfrak{AD}$ statt $\mathfrak{AC}$. Es giebt allemal einen bestimmten Pol p, welchem das kleinste Viereck $\mathfrak{A}cc_1\mathfrak{B} = f$ entspricht. Auch findet die Relation statt:*

$$F = f + \tfrac{1}{2}r^2\mathfrak{a},$$

wo $\mathfrak{a}$ der Winkel zwischen den Normalen in den Endpuncten des gegebenen Bogens $\mathfrak{AB}$ und $r = Pp$ ist."

4. Fället man aus einem beliebigen Puncte P in der Ebene irgend einer geschlossenen convexen Curve C, die keinen singulären Punct enthält (eines sogenannten Ovales), Perpendikel auf alle Tangenten derselben,

so liegen die Fufspuncte in irgend einer neuen, in sich zurückkehrenden Curve, die allemal irgend einen bestimmten endlichen Inhalt $= F$ haben wird, und welche *„Fufspuncten-Curve"* des Puncts P in Bezug auf die gegebene Curve C heifsen mag.

„Sind in einer Ebene n beliebige Curven C_1, C_2, ... C_n, von der eben genannten Art, in beliebiger Lage gegeben, so giebt es allemal einen bestimmten Punct p, der die Eigenschaft besitzt, dafs die Summe der Inhalte der ihm entsprechenden Fufspuncten-Curven, $f_1 + f_2 + \ldots . f_n = s$, ein Minimum ist. Für irgend einen anderen Punct, — wenn die Summe der Inhalte der ihm entsprechenden Fufspuncten-Curven, d. i. $F_1 + F_2 + \ldots . + F_n$, durch S und sein Abstand von p durch r bezeichnet wird, — hat man:

$$S = s + \tfrac{1}{2} n r^2 \pi."$$

5. *„Unter allen Fufspuncten-Curven, in Bezug auf eine gegebene Hyperbel, hat diejenige ihres Mittelpuncts p den kleinsten Inhalt $= f$."* Diese Fufspuncten-Curve $IKLM$ (Fig. 36.) hat ungefähr gleiche Form wie die Lemniscate, in welche sie in der That übergeht, wenn die Hyperbel gleichseitig ist; der Punct p ist ein Durchschnitts- und zugleich ein zweifacher Wendungspunct derselben. Es seien A, B die Brennpuncte und C, D die Scheitel der Hauptaxe der Hyperbel. Ueber den Durchmessern Ap, pB und CD beschreibe man Kreise: so entstehen zwei krummlinige Dreiecke pEF, pGH, oder x, x_1, deren Summe gerade dem Inhalte f der Curve $IKLM$ gleich ist, so dafs $x + x_1 = 2x = f$, und auch, da die beiden Schleifen der Curve einander gleich sind, $x = IM = KL = \frac{1}{2} f$. Auch ist jeder Sector der Curve, aus ihrem Mittelpuncte p genommen, einem bestimmten correspondirenden Abschnitte von einem der beiden Dreiecke x, x_1 gleich.

Der Inhalt F der Fufspuncten-Curve eines beliebigen Punctes P (Fig. 37.), in Bezug auf die Hyperbel, kann — wenn er im gehörigen Sinne genommen wird — unter andern wie folgt dargestellt werden. Es seien RV, SU die Asymptoten der Hyperbel. Ueber Pp, als Durchmesser, sei der Kreis NPO und mit Pp um p der Kreis QPT beschrieben; ferner sei QT die Tangente des ersten Kreises im Puncte p: so entstehen die zwei Paar Räume y und z, y_1 und z_1, deren Grenzen sichtbar sind (nämlich sie sind gemischtlinige Dreiecke und Vierecke). Nun ist entweder

I. $F = f + 2y + 2z = 2(x + y + z)$,

oder

$$\text{II.} \quad F = 2x + 2y_1 + 2z_1,$$

nachdem nämlich P in einem äufsern oder inneren (wirklichen) Asymptoten-Winkel liegt, d. h. nachdem beziehlich die Hyperbel in den Winkeln RpU und SpV, oder RpS und UpV liegt. Es sind besondere Fälle möglich, wo die Form der Räume y, z, y_1, z_1 etwas modificirt wird.

„Soll der Inhalt F der Fufspuncten-Curve constant sein, so ist der Ort des Puncts P eine Ellipse, deren Axen auf die Axen der Hyperbel fallen, so dafs beide concentrisch sind, und zwar fällt die grofse Axe der Ellipse auf die zweite Axe der Hyperbel. Alle Orts-Ellipsen, welche auf diese Weise statt finden, wenn der Inhalt F der Fufspuncten-Curve gröfser oder kleiner angenommen wird, sind einander ähnlich; also ist das Verhältnifs ihrer halben Axen a_1, b_1 constant, und zwar ist:

$$a_1 : b_1 = 2\alpha b^2 + f : 2\alpha a^2 - f = \alpha(a^2 + b^2) + ab : \alpha(a^2 + b^2) - ab,$$

wo a, b die halben Axen der Hyperbel (beide reell genommen) sind, und wo α der Winkel ist, welchen die zweite Axe (b) der Hyperbel mit einer Asymptote bildet, oder $\alpha = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{a}{b}\right)$." — Ist die Hyperbel gleichseitig, so hat man:

$$a_1 : b_1 = \pi + 2 : \pi - 2.$$

Die Gleichung der Ellipse, in Bezug auf ihre Axen, ist im Allgemeinen:

$$y^2(\alpha c^2 + ab) + x^2(\alpha c^2 - ab) = (F - f)c^2,$$

wo $c^2 = a^2 + b^2$; und für den besonderen Fall, wo die gegebene Hyperbel gleichseitig ist:

$$y^2(\pi + 2) + x^2(\pi - 2) = 4(F - a^2).$$

6. Fället man aus irgend einem Puncte P in der Axe einer gegebenen Parabel auf alle Tangenten der letzteren Perpendikel, so entsteht eine Fufspuncten-Curve, welche eine zu der Axe senkrechte Asymptote (und P zum singulären Puncte) hat. Der ganze Inhalt dieser Fufspuncten-Curve ist unendlich grofs. (Beliebige Sectoren derselben, aus dem Pole P, sind leicht zu bestimmen.) Dagegen ist der Raum, welchen die Curve mit ihrer Asymptote einschliefst, von bestimmter endlicher Gröfse. Bezeichnet man denselben durch F, und den Abstand des Brennpuncts B der Parabel vom Scheitel A derselben durch a und die Entfernung des Punctes P von B durch $2x$, so ist:

$$F = x(2a \mp x)\pi,$$

wo das untere Zeichen (+) zu nehmen ist, wenn P innerhalb der Parabel, und zwar jenseits B liegt. Liegt P diesseits B, und namentlich aufserhalb der Parabel, so schneidet sich die Fufspuncten-Curve in P selbst und bildet eine Schleife, deren Fläche $= S$, in dem Raume F mit inbegriffen, jedoch als negativ genommen ist; d. h. in diesem Falle ist F die Differenz zwischen dem Raume T, der von der Asymptote und den beiden Armen der Curve, welche von P aus nach entgegengesetzten Richtungen neben jener ins Unendliche fortlaufen, eingeschlossen wird und der genannten Schleife S; so dafs also

$$F = T - S = x(2a - x)\pi.$$

Die Räume S und T lassen sich aber auch einzeln angeben; nämlich es ist:

$$S = (x+a)\sqrt{(a(2x-a))} - x(2a-x).2\alpha,$$
$$T = (x+a)\sqrt{(a(2x-a))} - x(2a-x)(\pi - 2\alpha),$$

und mithin ist der ganze, von der Curve und Asymptote begrenzte Raum R, wenn beide Theile absolut genommen werden:

$$R = 2(x+a)\sqrt{(a(2x-a))} + x(2a-x)(\pi - 4\alpha),$$

wo $\alpha = \text{arc}\left[\text{tang} = \sqrt{\left(\frac{2x}{a} - 1\right)}\right]$.

Wenn insbesondere $x = a$, also P in der Leitlinie der Parabel liegt, so ist $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ und die vier Formeln reduciren sich auf folgende:

$$F = \pi a^2; \qquad R = 4a^2;$$
$$S = 2a^2 - \tfrac{1}{2}\pi a^2; \qquad T = 2a^2 + \tfrac{1}{2}\pi a^2.$$

Wenn ferner $x = 2a$ (also PB oder $2x$ dem Parameter der Parabel gleich ist), so ist $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ und die Formeln sind:

$$F = 0; \qquad R = 6a^2\sqrt{3}; \qquad S = T = 3a^2\sqrt{3}.$$

Wird der Punct P in der Ebene der Parabel beliebig angenommen, so hat die ihm zugehörige Fufspuncten-Curve immer eine zur Axe der Parabel senkrechte Asymptote, deren Abstand von P constant ist.

„Welche Ausdrücke erhält man in diesem Falle für die Flächenräume F, S, T? und welches ist der Ort des Puncts P, wenn einer dieser Räume constant sein soll?"

7. *„Wenn eine gegebene Ellipse E auf irgend einer geschlossenen convexen Curve C von gleichem Umfange, die keinen singulären Punct, aber einen Mittelpunct hat, rollt, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt: so beschreibt ihr Brennpunct B irgend eine in*

sich zurückkehrende Curve $[B]$*, deren Länge constant ist, d. h.: die Basis* C *mag unter den vorausgesetzten Bedingungen sein, welche man will, und in welchen Puncten die Curven* E *und* C *einander anfänglich berühren mögen — die Curve* $[B]$ *hat immer dieselbe bestimmte Länge; nämlich sie ist allemal dem Umfange des Kreises gleich, welcher die grofse Axe* $= 2a$ *der Ellipse zum Radius hat; also ist stets*

$$[B] = 4a\pi.$$"

(Von Herrn Dr. *Stern* zu Göttingen.)

1. In den mir bekannten Lehrbüchern über Combinationslehre fehlt folgender einfache Satz, von dem sich mancherlei Anwendungen machen lassen. Bezeichnet $\overset{p}{C'}(n)$ die $p$te Classe der Combinationen mit Wiederholungen aus n Elementen, $\overset{p}{C}(n)$ dasselbe für die Combinationen ohne Wiederholungen, so ist

$$\overset{p}{C'}(n) = \overset{1}{C}(n)\,\overset{p-1}{C'}(n) - \overset{2}{C}(n)\,\overset{p-2}{C'}(n) + \overset{3}{C}(n)\,\overset{p-3}{C'}(n) \ldots . \pm \overset{p}{C}(n).$$

2. Ist p eine Primzahl von der Form $4n+3$, und bezeichnet man durch $\Sigma \operatorname{cotang} a.\frac{360^0}{p}$ die Summe der Werthe, welche man erhält, wenn man allmälig statt a alle quadratischen Reste der Zahl p substituirt, so ist

$$\Sigma \operatorname{cotang} a.\frac{360^0}{p} = \sqrt{p}.$$

3. Bezeichnet man durch $P \operatorname{cotang}\frac{a}{p}360^0$ das Product der Werthe, welche man erhält, wenn man statt a alle quadratische Reste der Primzahl $p = 4n+3$ substituirt, so hat man

$$P \operatorname{cotang}\frac{a}{p}360^0 = \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

4. Ist p eine Primzahl von der Form $8n+1$, also $p = a^2+b^2$, so hat man bekanntlich, wenn a eine ungerade Zahl ist,

$$\pm 2a \equiv \frac{4n \ldots . 2n+1}{1 \ldots . 2n} \pmod{p}.$$

Man hat aber auch

$$\pm 2a \equiv \frac{3n \ldots . 2n+1}{1 \ldots . n} \pmod{p},$$

und zwar mufs das positive Zeichen genommen werden, wenn

$$a=4m+1, \quad b=8r, \quad n=2s,$$
$$a=4m+1, \quad b=8r+4, \quad n=2s+1,$$
$$a=4m+3, \quad b=8r, \quad n=2s+1,$$
$$a=4m+3, \quad b=8r+4, \quad n=2s;$$

in den entgegengesetzten Fällen mufs das negative Zeichen genommen werden.

Formule générale d'intégration indéfinie.

(Par Mr. *Hill*, prof. à Lund.)

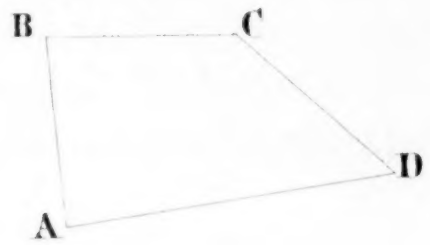
Soit ψx une fonction quelconque, qui se développe sous la forme $ax + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_4 x^4 + \ldots + a_n x^n + \ldots$, et supposons que l'équation $\psi x = y$ donne $x = \overline{\psi} y$, et que le terme indépendant de z de la fonction $\frac{z \cdot \overline{\psi}\left(\frac{u}{z}\right)}{(u - z\psi u)^2}$ soit U; nous aurons l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{du}{u \cdot U \cdot \psi u} = \log(\psi u) + \text{const.}$$

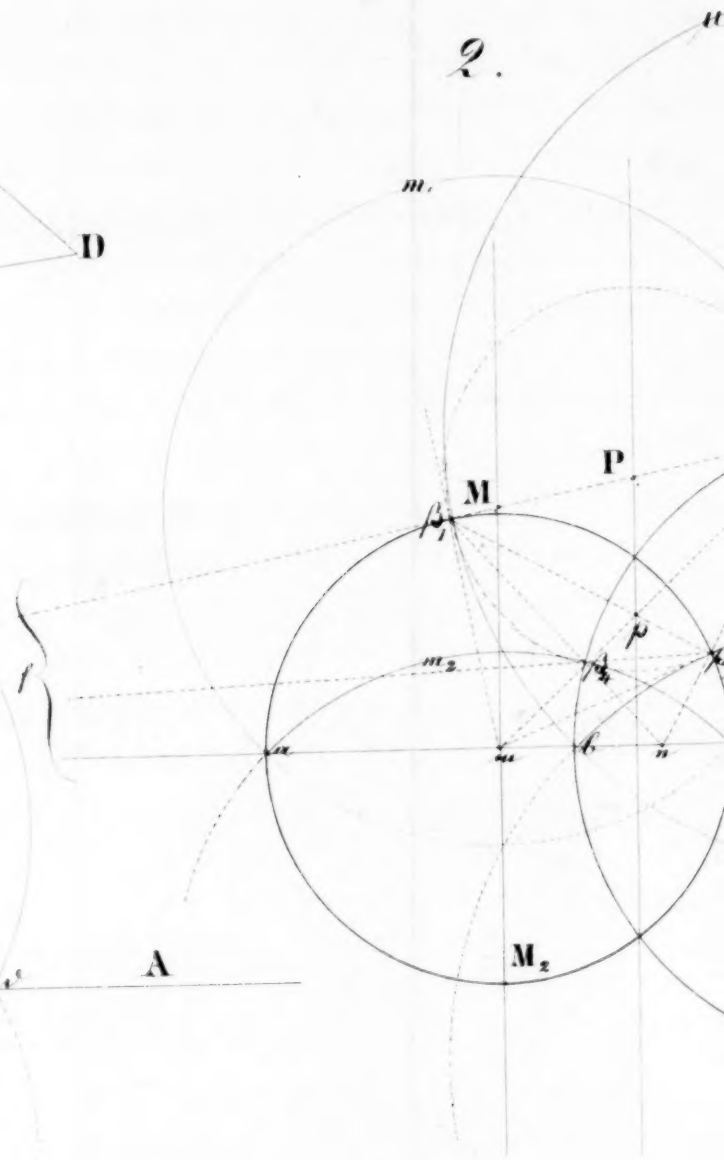
Druckfehler im 16. Bande.

Pag. 196	*lin.* 23	*pro:*	redeatur,	*legas:*	reddatur
— 26	-		venit,	-	- venimus
— 28	-		proportionales,	-	- proportionalia
— 30	-		tertiae,	-	- tertii
— 34	-		inveniendas,	-	- inveniendos
— 35	-		summam,	-	- summum

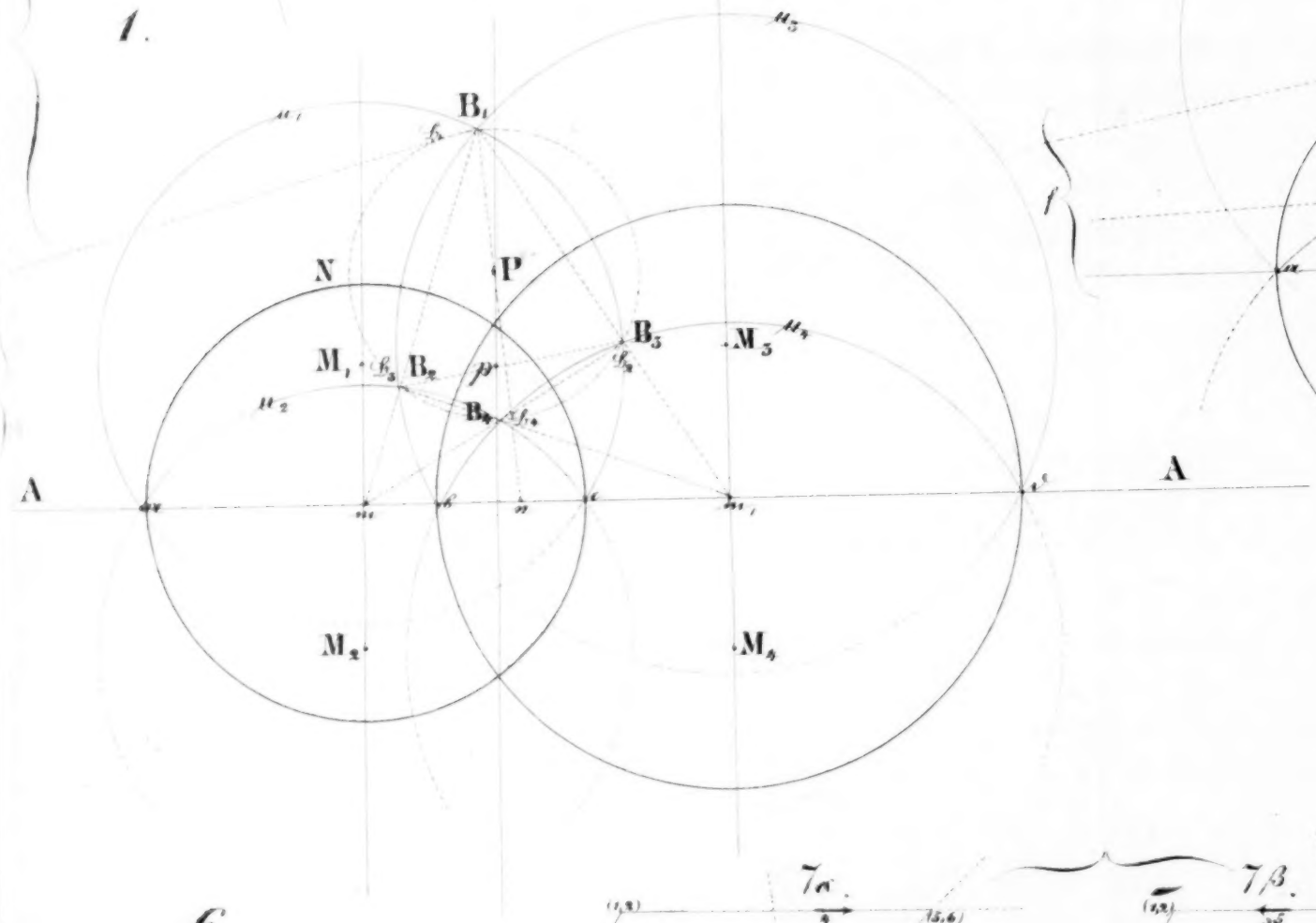
3.



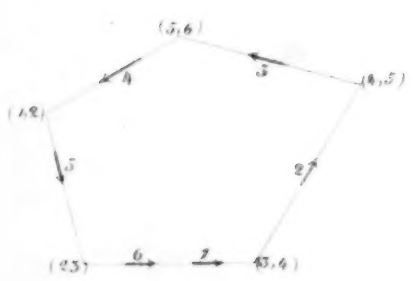
2.



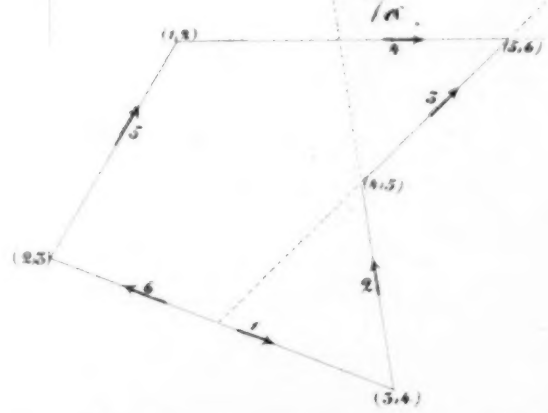
1.



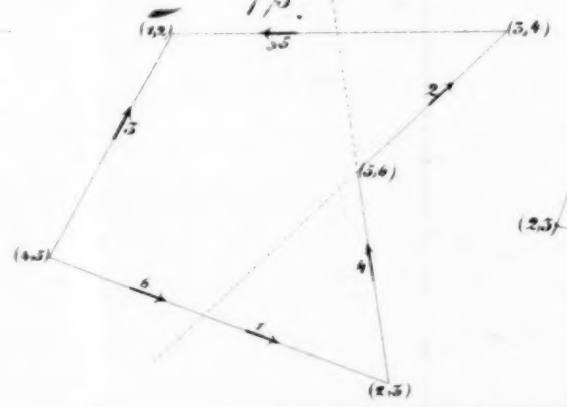
6.

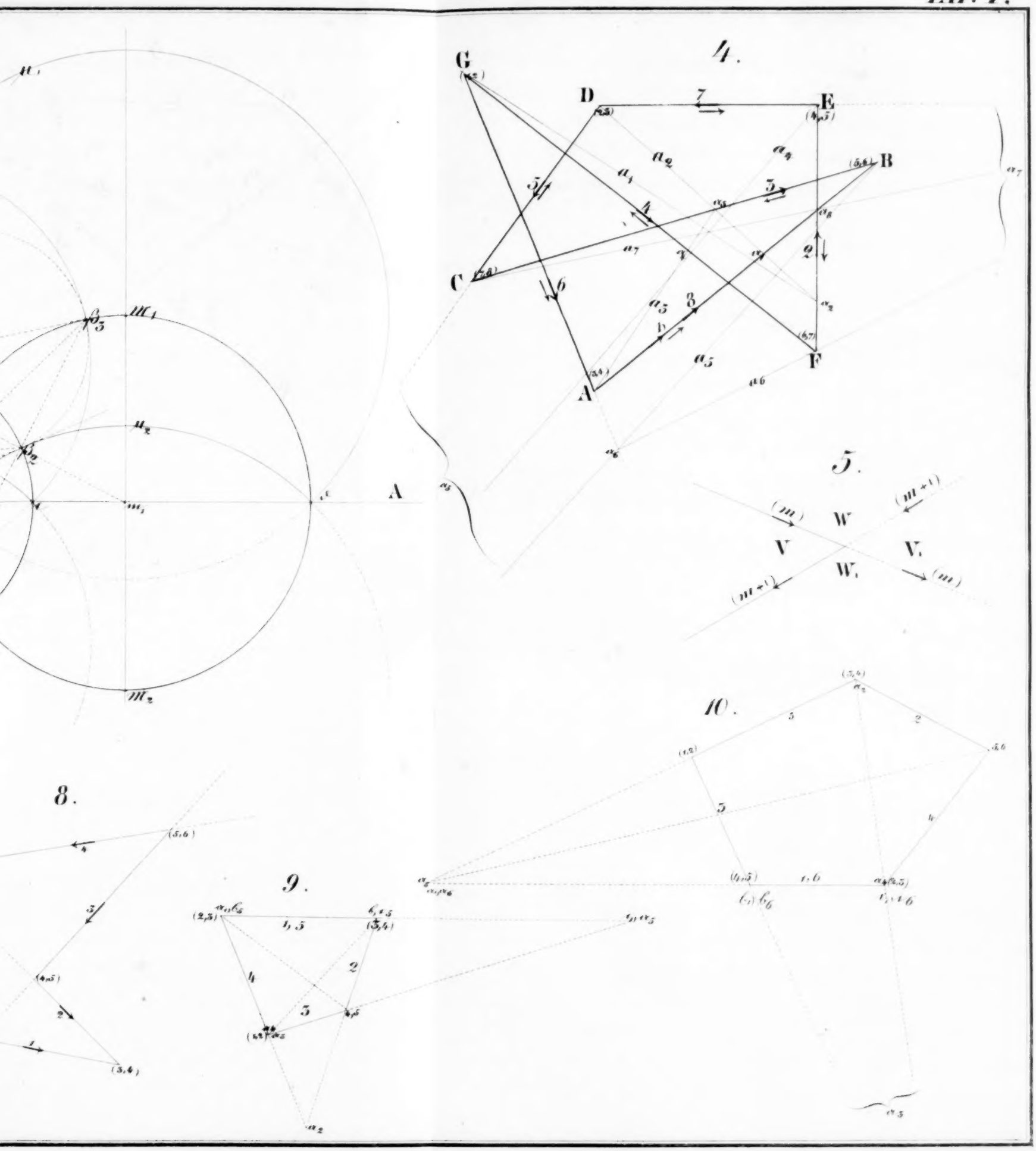


7α.

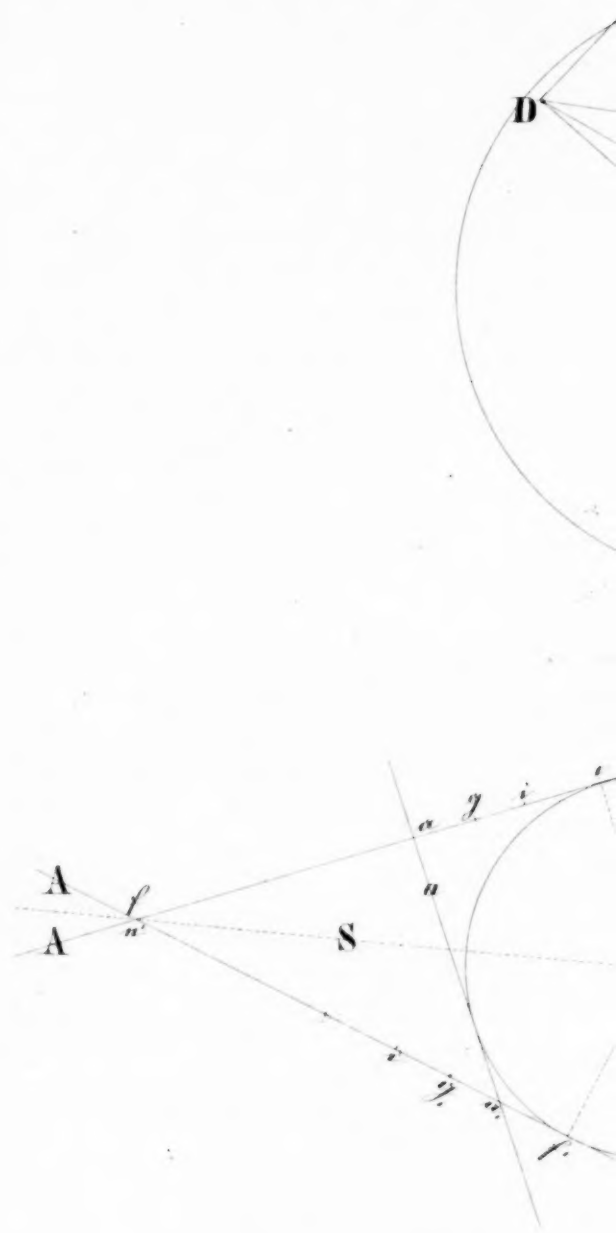


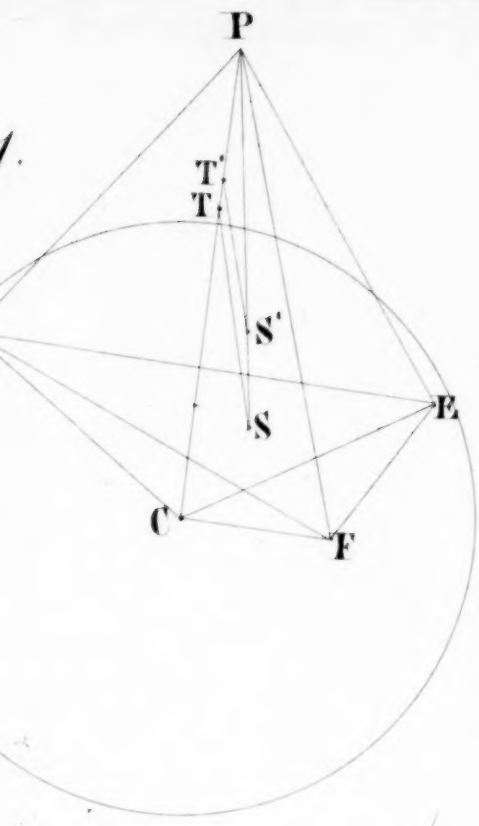
7β.



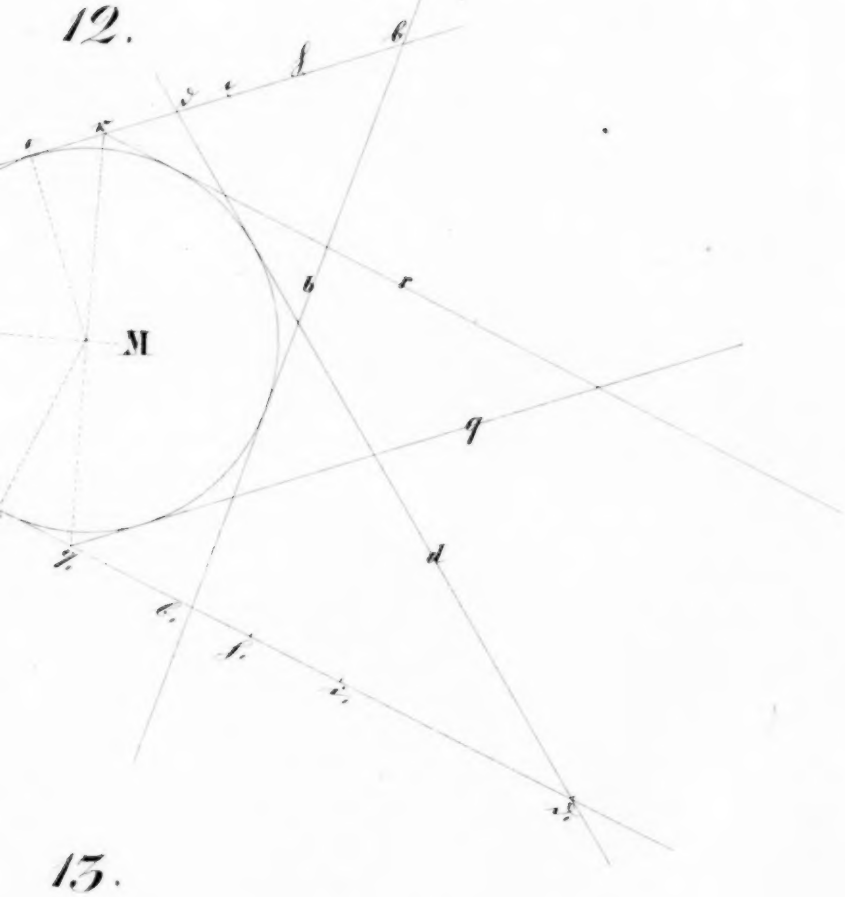

4.
G
D
E
B
C
A
F
5.
W
V
V₁
W₁
8.
9.
10.

11.





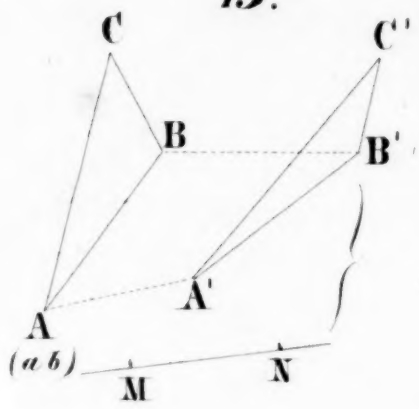
12.



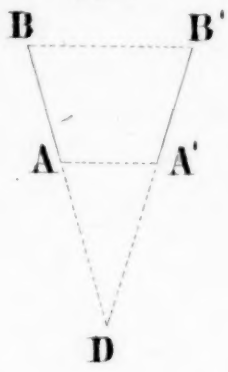
13.

14.

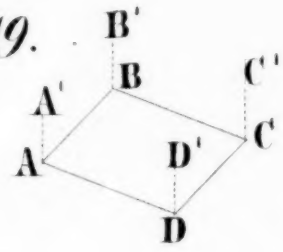
15.



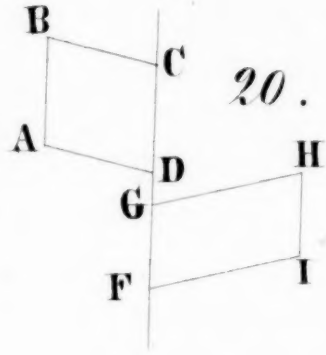
16.



19.

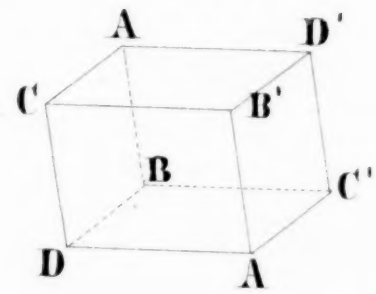


20.

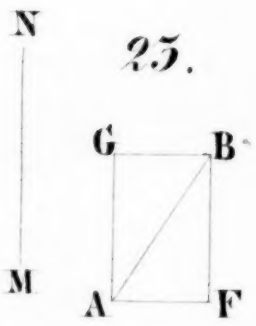


21

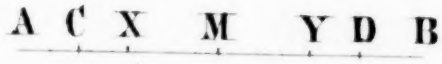
24.



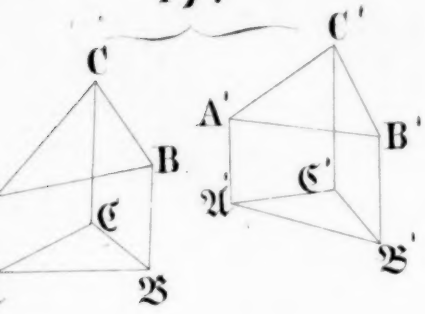
25.



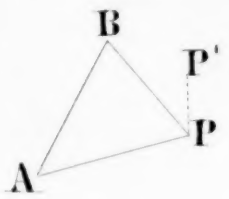
26.



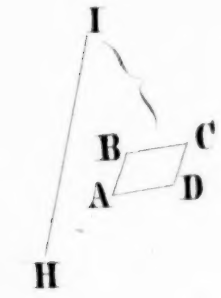
17.



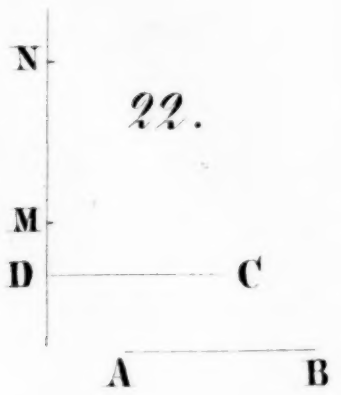
18.



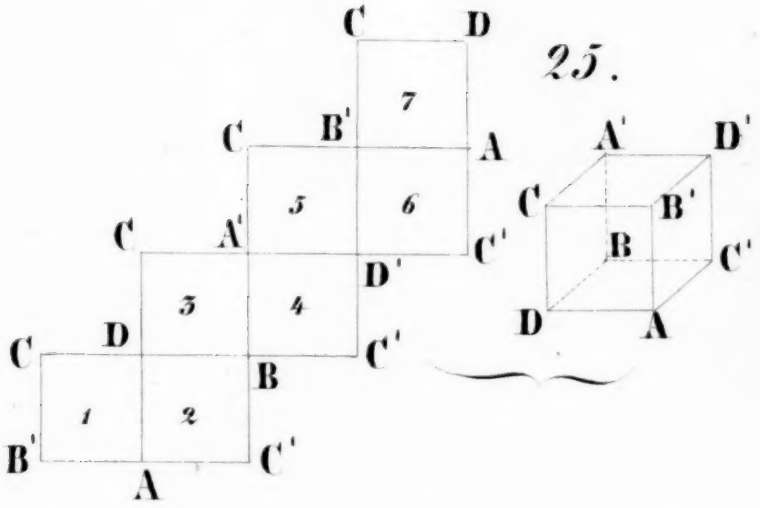
21.



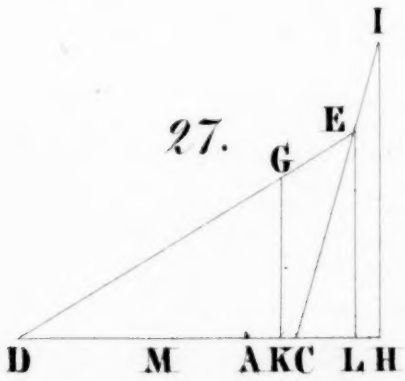
22.

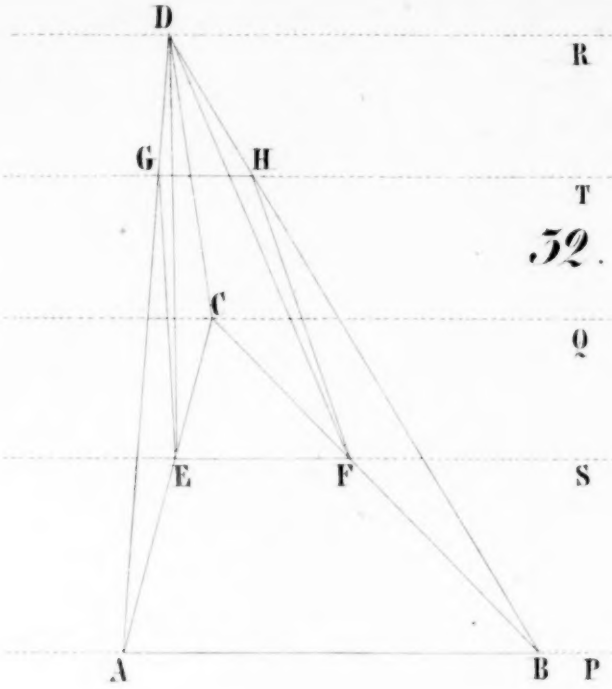


25.



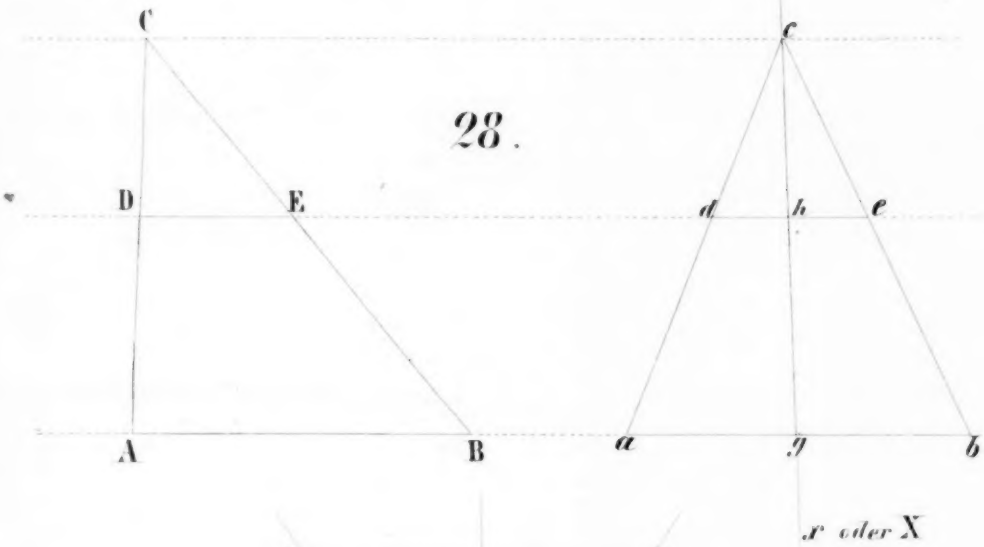
27.




D
G
H
C
E
F
A
B
P
R
T
Q
S

32.

d
g
m2
h
c
e
m1
a
m

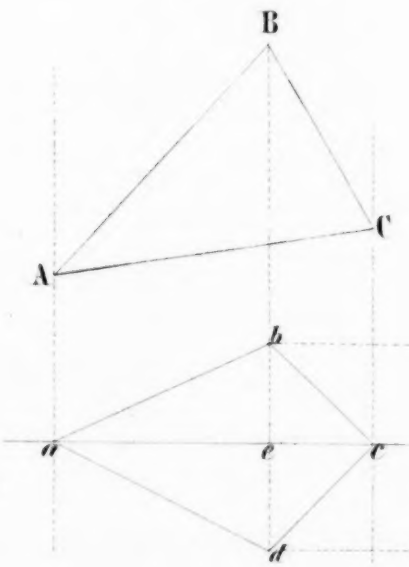

C
D
E
A
B
c
d
h
e
a
g
b
x oder X

28.

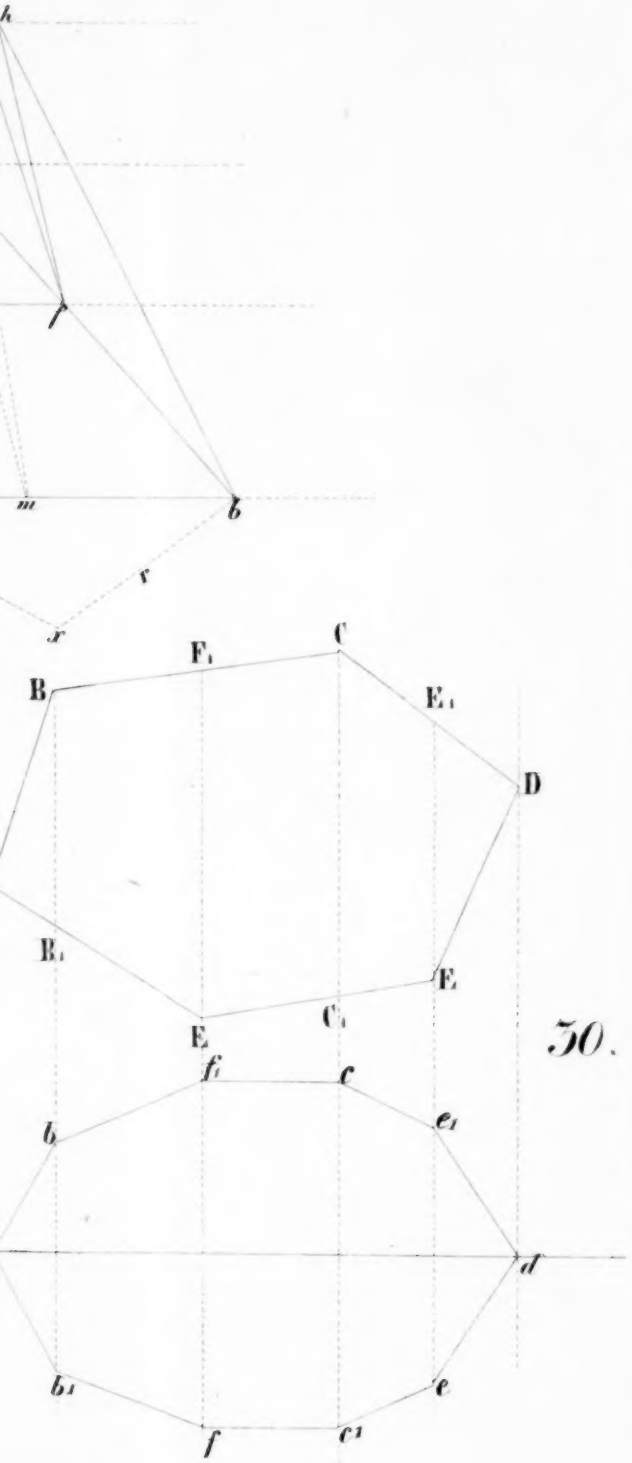
B
A
x
a

B
D
M
β
α
C
A
x2
x
x1

31.

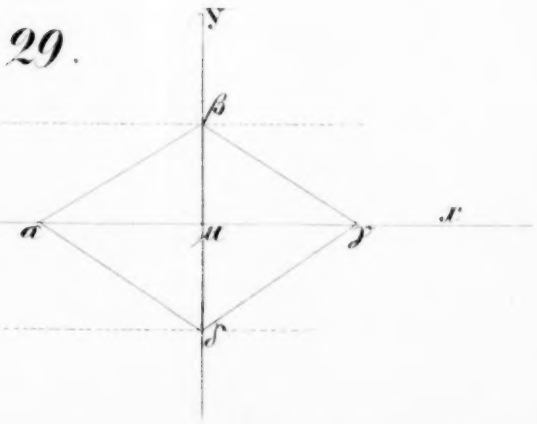

B
C
A
b
a
e
c
d

2

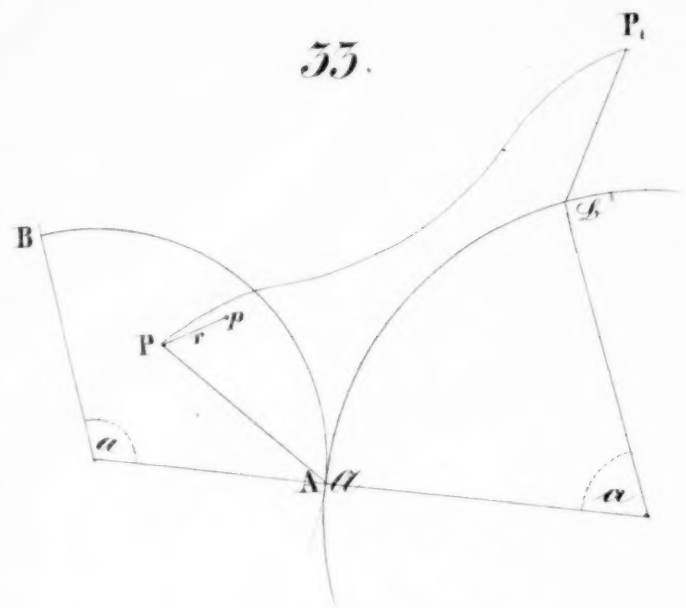


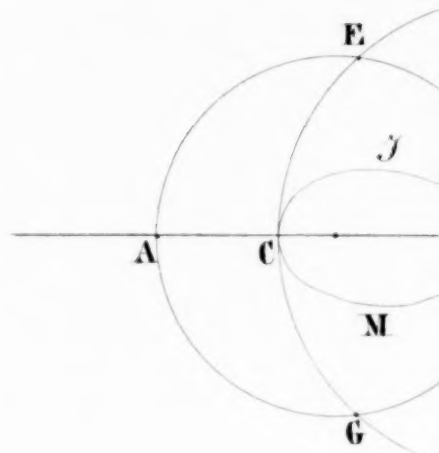
30.

29.

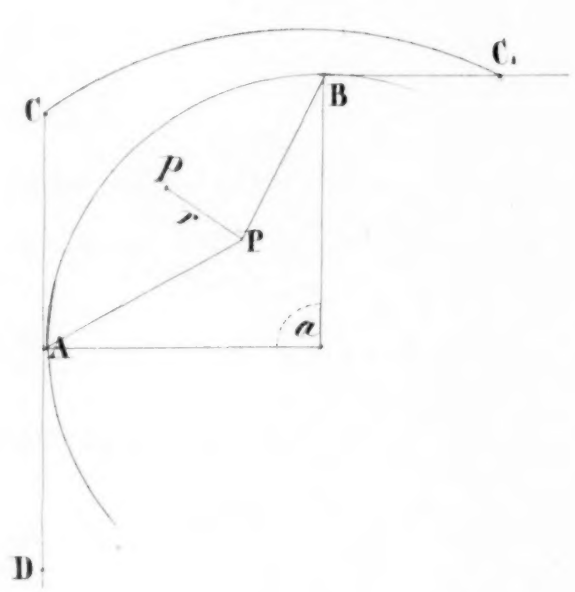


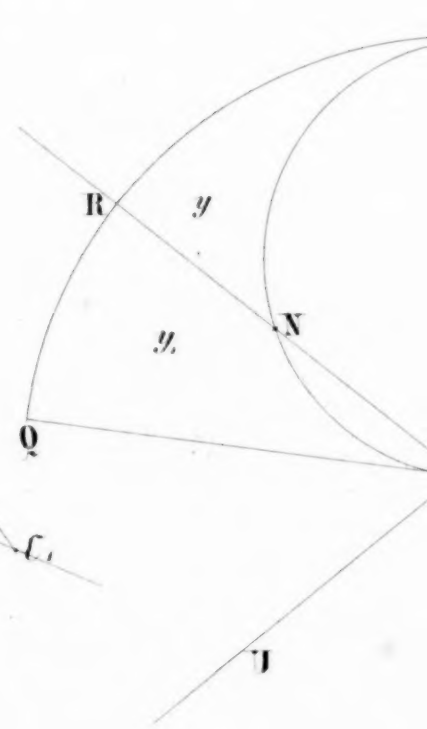
33.

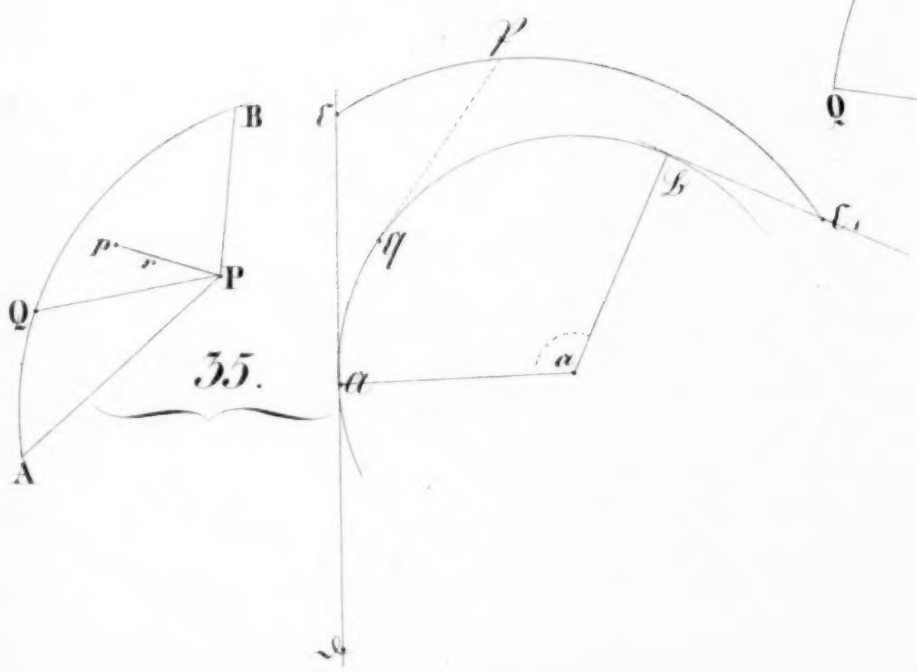




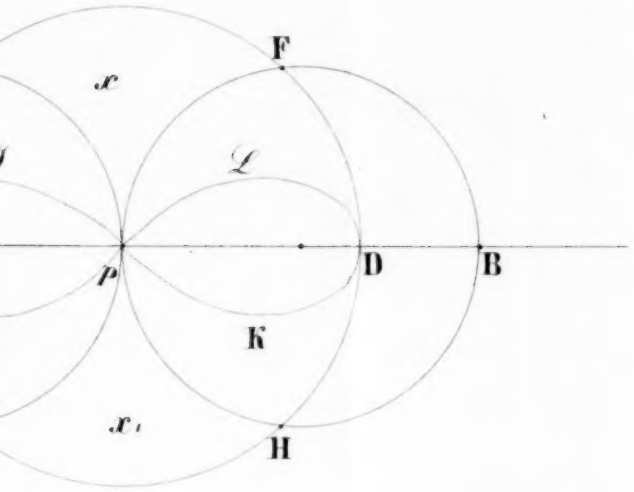
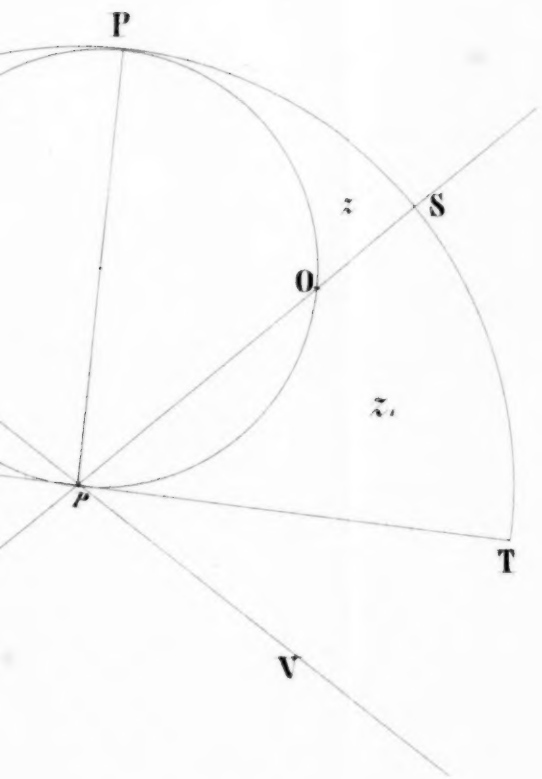
34.







36.



37.